西北大学"211"工程教学改革研究项目

西北大学面向21世纪课程教材

实变函数论

THEORY OF FUNCTIONS OF A REAL VARIABLE

王成堂　温作基　张　瑞

西北大学出版社

□ 责任编辑／雷援朝　□ 封面设计／王　祚

实变函数论

THEORY OF FUNCTIONS OF A REAL VARIABLE

ISBN 7-5604-1599-7

9 787560 415994 >

ISBN 7-5604-1599-7/O·103

定价：20.00元

实变函数论

王戍堂
温作基　张　瑞　编著

西北大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

实变函数论/王成堂，温作基，张瑞编著 .—西安：西北大学出版社，2001．10

ISBN 7-5604-1599-7

Ⅰ．实…　Ⅱ．①王…②温…③张…　Ⅲ．实变函数论　Ⅳ．O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 066761 号

实 变 函 数 论

王成堂 温作基 张 瑞　编著

西北大学出版社出版发行

（西北大学校内　邮编 710069　电话 8302590）

新华书店经销　　西安市建明印务有限责任公司印刷

850 毫米×1168 毫米　1/32 开本　7.75 印张　200 千字

2001 年 11 月第 1 版　　2001 年 11 月第 1 次印刷

印数：　1—1000

ISBN 7-5604-1599-7/O·103　　定价：20.00 元

前　言

实变函数论是数学系一门十分重要的专业基础课。本书的编者们多年来从事这门课及相关课程的教学工作，因而常有一些新的体会。感到面对不断发展的新形势，课程内容和体系很有必要进行改革和充实。其次，由于编者长期从事专业基础方面的科研工作，使得对于这一改革的必要性有了更深刻的理解，同时也就有了一些切实具体的想法。经过长期的教学实践和反复探索，逐渐形成了一本新教材的内容体系，产生了一本讲义。再经过近五、六年来的使用和修改，更臻于成熟，才得以成书。因此可以说这本书不是“编”出来的，而是编者们经过多年的教学实践“教”出来的，是坚持改革创新“改”出来的。

这本书除了保留实变函数论的主要经典内容以外，注意尽量能反映本学科新的研究成果及处理方法。在L-积分理论的建立和处理上作了较大改动，以使步骤更清晰，条理更清楚，与一些经典教科书的讲法（如那汤松的《实变函数论》）更易衔接，更易于读者接受。这也是编者在编写此书时贯穿始终的基本想法：在保持必要的逻辑

严密性的同时，尽量突出思想性，使读者感到更自然，在严格的逻辑推理面前避免使读者望而生畏。

在此要感谢西北大学和数学系对于本书的成书给予的充分重视和大力支持。2000年将实变函数论课程列为学校“211”建设的教改项目，并将此教材列为学校面向21世纪的新教材给予资助，使本书得以顺利出版。

作为一本教材，应该作到精益求精，但因编者水平所限肯定会多有不妥之处，以至于定会有错误出现。敬请同行和读者不吝指正。

编　者

2001.12

目　录

第一章　集与点集

我们在数学分析中已经接触过集的概念了．例如$[0,1]$就是满足$0\leqslant x\leqslant 1$的一切实数x之集，$C[0,1]$就是在区间$[0,1]$上定义的一切连续(实值)函数之集等等．本门课程的主要目的在于推广Riemann积分，从而建立起Lebesgue积分理论．作为基础，集这一概念就需要经常地介入．因此，在这门课程之始，就必须较系统地对其加以讲解，哪怕是“朴素的集合论”，也要尽可能地使其严密．强调一下，作为以后各章的基础，要求读者掌握集的基本概念，熟悉论证的方法．

§1　集及其运算

集是数学中最基本概念之一，已无法用更基本的概念去定义它．我们在这儿只讲康托的朴素集合论．所谓一个集可以描述为：集是将具有某一性质的一切事物集中起来考虑成一个整体的意思．重要的是，所谓给定一个集E，即是给定了刻划该集的特征性质．即命题$\varphi(x)$，使其对任何一事物z均(至少是理论上的)能唯一决定命题$\varphi(z)$是真是假．而在把所有使$\varphi(z)$为真的那些z作为整体考虑时即得到了集，记作$E=\{x;\varphi(x)\}$．比如，考虑“一切实代数数”之集．那么，$\varphi(x)$就是这样一个命题，首先x是实数，其次x还是代数数，也就是存在着自然数n以及不全为零的整数$a_0,a_1,\cdots,a_n$，使之合于条件$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$．须知真正去判断一个数是代数数还是超越数并非常为易事．比如$2^{\sqrt{2}}$是代数数吗？此问题直到上世纪四、五十年代才获解决．但这并不妨碍我

们考虑象“一切实代数数之集”这样的概念，因为任意给定一个实数时，该数是否为代数数是确定的. 一般常用大写字母 A、B… 去表示一个集. 设集 $E = \{x:\varphi(x)\}$ 已经给定，那么那些使 $\varphi(x)$ 成立的 x 就称作是集 E 的“元素”. 符号“$a \in E$”就表示“a 是 E 的元素”，并说“a 属于 E”. 应该指出，随便给出一个 a 时，那么 a 属于 E，$a \in E$ 或 a 不属于 E，$a \notin E$ 便是唯一决定的，当然这也只是从理论上而言，并不是就操作而言.

当集 A 是由有限个元素组成时，也就可以把 A 记作 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，这里的法则 $\varphi(x)$ 就是“x 与某一 a_i 相等”(同一事物的意思)，此即 $\varphi(x) \equiv \exists\, i \leqslant n(x = a_i)$.

有时出现这种情况，对于给出的法则 $\varphi(x)$，没有任何一个 x 能使之成立，此时的 $E = \{x:\varphi(x)\}$ 也被规定是集，但由于 E 中并没有元素，就把 E 叫做空集，记作 $\varnothing$. 实际情况表明引入空集 $\varnothing$ 是非常必要的. 一是由于在今后集的运算中会出现 $\varnothing$；二是对于给出的法则 $\varphi(x)$，并不是一下子都能立刻作出有无 x 满足它. 例如取 $\varphi(x)$ 为：x 是自然数，$x > 2$，且存在另外三个自然数[①] n_1, n_2, n_3，使得 $n_1^x + n_2^x = n_3^x$. 那么有无使 $\varphi(n)$ 成立的 n 呢？这是著名的费玛问题，是一个经过多少代最优秀数学家的努力均未能解之谜. 最近(1995)才为美国普林斯顿大学的年轻的数学家 Wiles 所解决：对这里的 φ，集 E 是空的，即 $E = \{x:\varphi(x)\} = \varnothing$. 至此，350 多年前就已提出的所谓“费玛大定理”才得到了第一个证明.

设 A、B 是集，说 A 是 B 的子集 $A \subset B$ 是指：A 的元素均是 B 的元素，逻辑关系式即是 $\forall\, x(x \in A \rightarrow x \in B)$. 当 $A \subset B$ 同时 $B \subset A$ 时，即 A 与 B 由同样元素组成时，自然就定义作 $A = B$. 由此

① 现代集论文献中把数“0”也算作自然数，这里指正整数，即按最古老称谓，自然数仅指 1，2….

说来，$\varnothing \subset A$ 永远成立，而且凡空集皆相等．例如设 $A = \{x \in R: x^2 + 1 = 0\}$，$B = \{x: x$ 是三角形且 x 有两条边的长度之和小于第三边$\}$，则 $A = B = \varnothing$.

下边引入集的运算：

定义 1.1 设 A、B 是两个集，由 A 中的元以及 B 中的元的全体组成的集称为 A 与 B 的并，记作 $A \cup B$，即：

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ 或 } x \in B\};$$

由一切同时属于 A 与 B 的元组成的集称为 A 与 B 的交，记作 $A \cap B$，即：

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ 而且 } x \in B\};$$

由属于 A 而不属于 B 的一切元组成的集称为 A 与 B 的差，记作 $A - B$，即：

$$A - B = \{x: x \in A \text{ 而且 } x \overline{\in} B\};$$

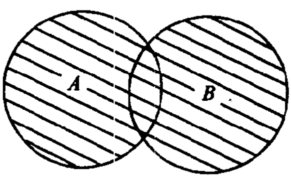

图 1.1　$A \cup B$

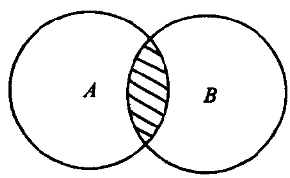

图 1.2 $A \cap B$

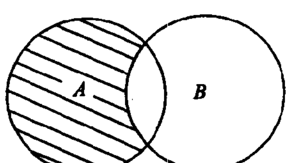

图 1.3　$A - B$

当 $B \subset A$ 时，$A - B$ 又称作是 B 关于 A 的补集（或余集），记作 $\complement_A B$.

上述定义中的并、交运算可推广到任意个集的情形.即设 $\mathscr{A} = \{A_i; i \in I\}$ 为一集族(这里 I 是指标集)时,那么有下列定义

$$\bigcup \mathscr{A} = \bigcup_{i \in I} A_i = \{x: \text{存在 } i \in I, \text{使 } x \in A_i\},$$

$$\bigcap \mathscr{A} = \bigcap_{i \in I} A_i = \{x: \text{对一切 } i \in I, x \in A_i\}.$$

下列定理是明显的:

定理 1.1 (i) $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;

(ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

定理 1.1 还可推广到任意多个集的情况.

定理 1.2 **对于集 E 与任意集族 $\{A_i; i \in I\}$ 恒有以下两个分配律成立:**

$$\text{(i)} \quad E \cap (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (E \cap A_i),$$

$$\text{(ii)} \quad E \cup (\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} (E \cup A_i).$$

证明 (i)的证明: $x \in E \cap (\bigcup_{i \in I} A_i)$ 当且仅当 $x \in E$ 且 $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$,也就是 $x \in E$ 且存在某 $i \in I$,使得 $x \in A_i$. 而这一论断即是:存在某 $i \in I$ 使得 $x \in E \cap A_i$,此即 $x \in \bigcup_{i \in I} (E \cap A_i)$.

(ii)的证明: $x \in E \cup (\bigcap_{i \in I} A_i)$ 当且仅当下列二条中至少成立一个:

(a) $x \in E$;

(b) $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$.

(c) $x \in \bigcap_{i \in I} (E \cup A_i)$, 当且仅当对一切 $i \in I$, $x \in E \cup A_i$.

显然,无论是(a)成立或是(b)成立均导致(c)成立;反过来,若(c)成立则导致(a)与(b)至少有一个成立,因若(a)、(b)均不成立时,$x \bar{\in} E$ 且同时存在 $i_0 \in I$, $x \bar{\in} A_{i_0}$,那么便有 $x \bar{\in} E \cup A_{i_0}$,这就导致 (c)不成立.

由上所述,可见(ii)成立. □

我们在研究某类问题时，若所出现的集 A，B，… 均是集 X 的子集时，这时便称 X 为基本集．A，B，… 关于 X 的补集可记作 A^c，B^c，…．

下边是非常有用的 De Morgan 法则．

定理 1.3 对任意集族 $\{A_i; i \in I\}$，下列对偶关系成立

$$\text{(i)} \ (\bigcup_{i\in I} A_i)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c,$$

$$\text{(ii)} \ (\bigcap_{i\in I} A_i)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c.$$

证明 (i)的证明：$x \in (\bigcup_{i\in I} A_i)^c$ 当且仅当 $x \overline{\in} \bigcup_{i\in I} A_i$，即 $\forall\, i \in I$，$x \overline{\in} A_i$，这又等价于 $\forall\, i \in I$，$x \in A_i^c$，换个说法就是 $x \in \bigcap_{i\in I} A_i^c$．因此 $x \in (\bigcup_{i\in I} A_i)^c$ 当且仅当 $x \in \bigcap_{i\in I} A_i^c$．

(ii)的证明：注意关系 $(A^c)^c = A$．现在若取 $B_i = A_i^c$，那么由(i)已证得的 $(\bigcup_{i\in I} B_i)^c = \bigcap_{i\in I} B_i^c$ 可得(两边取补)，$\bigcup_{i\in I} B_i = (\bigcap_{i\in I} B_i^c)^c$，再代入 $B_i = A_i^c$，并注意 $B_i^c = A_i$，便有 $\bigcup_{i\in I} A_i^c = (\bigcap_{i\in I} A_i)^c$．于是证明了(ii)． □

§2 集的对等关系　可列集

在讲两集对等这个概念之前，简略介绍一下"映射"是很有必要的．它是数学分析中函数概念的推广．

定义 2.1 设 A、B 是两个非空集合，f 是一个法则，若对于每个 $x \in A$，在 B 中均恒有一个且仅有一个元 y 在 f 之下与之对应，记作 $y = f(x)$，则称 f 是以 A 为定义域取值于 B 的映射(或映象)，记作 $f: A \to B$．B 的子集 $f(A) = \{f(x); x \in A\}$ 称作是 f 的值域．

自然，所谓两个映射 f，g 相等，即 $f = g$ 是指：它们的定义域、值域全都相同，而且对定义域中每个 x，$f(x) = g(x)$．由此 $f = g$

并不是指它们的表达式必须完全一模一样，而是指在同一点 x 恒取同一值.

若映射 $f: A \to f(A)$ 是一对一的，记 $B_0 = f(A)$，那么就可以定义逆映射为 $f^{-1}: B_0 \to A$，即当 $y = f(x)$ 时，$x = f^{-1}(y)$. 在多对一情况下，通常也采用记号 $f^{-1}(B_1) = \{x: x \in A, f(x) \in B_1\}$. 应注意此处并不要求映射是 A 至 B_1 的满射，还应注意到单元素集 $\{y\}$，$f^{-1}(\{y\})$ 与 $f^{-1}(y)$ 的区别.

若有两个映射 $f: A \to B, g: B \to C$，那么可以象数学分析中的复合函数那样去定义复合映射，即 $F = g \cdot f: A \to C$，它的意义是对 $x \in A, F(x) = g(f(x))$.

定理 2.1 (i) 若 $A_0 \subset A, B_0 \subset B$，则

(a) $f^{-1}(f(A_0)) \supset A_0$;

(b) $f(f^{-1}(B_0)) \subset B_0$.

(ii) $f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$;

$f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.

证明 (i)的证明：(a)若 $x \in A_0$，并设 $y = f(x)$，此时 $y \in f(A_0)$ 而且 $x \in f^{-1}(\{y\})$.（注意当 f 不是一对一时，不能写为 $x = f^{-1}(y)$）.(b) 设 $y \in f(f^{-1}(B_0))$ 时，则必存在 $x \in f^{-1}(B_0)$，使得成立 $y = f(x)$，那么由 $x \in f^{-1}(B_0)$ 知 $f(x) \in B_0$，此即 $y \in B_0$.

注意：因为 f 不必是满射，(b)包含关系不能改作等号，读者可构造反例说明这一点.

(ii)的证明：这里只就第二个等式证明，第一个等式建议读者自己补出.

$x \in f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i)$ 当且仅当 $f(x) \in \bigcap_{i \in I} B_i$，即当且仅当 $\forall i \in I$，$f(x) \in B_i$，这又等价于 $x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$. □

注意：关于(ii)，自然会联想到下列二式是否成立的问题：

(a) $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$;

$$(\mathrm{b})\quad f(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f(A_i).$$

(a)是成立的，实际上对每个 $i_0 \in I$，$\bigcup_{i\in I} B_i \supset B_{i_0}$，故得 $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) \supset \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$；另一方面，任设 $x \in f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i)$，则 $f(x) \in \bigcup_{i\in I} B_i$，于是存在 $i_0 \in I$，$f(x) \in B_{i_0}$，这么 $x \in f^{-1}(B_{i_0}) \subset \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$。因此证明了(a)成立．但(b)不必成立：设 A 至少包含两个元素 a_1, a_2（$I = \{1,2\}$），考虑由 A 至 B 的"常值"映射 f，$f(A) = \{b_0\}$，取 $A_1 = \{a_1\}$，$A_2 = \{a_2\}$，那么 (b)的左端是$\varnothing$，右端是单元素集 $\{b_0\}$．

例 1　集 E 的特征的函数 χ_E：

$$\chi_E = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \overline{\in} E. \end{cases}$$

就是一个常用的映射 $\chi_E: Z \to \{0,1\}$，此处 Z 表示基本集（比如 $Z = R, R^n, (a,b)$ 等）．

在算术中，人们总把注意力多集中在许多带有技巧性的理论及计算技术上．数论被认为是优美的、深奥的、困难的，但很少有人问及"数的本质是什么？"这一似乎非常平凡的问题，只有象康托那样的天才，才从这一"平凡"之中洞察到了带有根本性质的东西并把它向无限集作推广，从而作出了不平凡的成果．

定义 2.2　设 A,B 为两个集，所谓 A 与 B 对等，记作 $A \sim B$ 乃是指：存在由 A 至 B 之上的一个一对一映射 $f: A \to B$．

对等是集与集之间的一个"关系"，具有性质：

(i) 自反性：$A \sim A$；

实际取 f 为恒等映射 $f = id: A \to A$，$f(x) = x$ 即可．

(ii)对 称性：若 $A \sim B$，则 $B \sim A$；

若 $f: A \to B$ 是一对一满射，则 $g = f^{-1}: B \to A$ 便是 B 至 A 的一对一满射．

(iii)传 递性：若 $A \sim B, B \sim C$ 则 $A \sim C$．

设 f, g 是一对一满射 $f: A \to B$，$g: B \to C$，则 $F = g \cdot f: A \to$

C 便是由 A 至 C 的一对一满射.

对于两个对等的有限集 $A \sim B$,习惯于说其元素"个数相等"并以一记号表示这个"个数".这就是数的本质.对于两个抽象的无限集,也可引入类似概念.具体来说,上述(i)—(iii)说明对等关系是一等价关系,此关系将所考虑的集分成许多等价类,同一类中的集,其共同性质就是"彼此对等".于是类似于"个数",引入记号 λ、μ 等等,称作"势",集 A 的势也记作 $\bar{A}$, $|A|$ 等.

今后恒以 R 表示由一切实数组成之集,N 则表示由一切自然数组成之集,而 Q 则是一切有理数组成之集.

定义 2.3 若集 A 与 N 对等,即 $A \sim N$,则称 A 是可列集.

值得注意,若从对等这一关系对集作"量"的区分标准的话,无限集就有许多与有限集不同的特色.

例 2 以 $\tilde{N}$ 表示一切偶自然数之集,则 $N \sim \tilde{N}$.实际命 $f(n) = 2n$ 时,f 便建立起 N 与 $\tilde{N}$ 间的对等关系.

注意到 $A \sim N$ 的一个等价说法是 A 可排成序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$.

例 3 $Q \sim N$.

证明 对每个 $r \in Q$,取其既约表示 $r = \frac{p}{q}$,并记 $m(r) = \max\{|p|, |q|\}$,则 $m(r)$ 是一自然数且对每个 n,满足 $m(r) \leq n$ 的只有有限个 r.现在就可以将全部 Q 的元素毫无遗漏地排成一列,其规则是:

(i)当 $m(r_1) < m(r_2)$ 时,规定 r_1 在 r_2 之前;

(ii)当 $m(r_1) = m(r_2)$ 且 $r_1 < 0, r_2 \geq 0$ 时,规定 r_1 在 r_2 之前;

(iii)当 $m(r_1) = m(r_2)$ 且 $|r_1| < |r_2|$ 时,规定 r_1 在 r_2 之前.

以上出现了与直观概念不一致之处,即看起来非常稠密的集 Q 其势却等于 N 的势.原因恰在于我们的直观大多囿于有限,而又将有限直感经验未谨慎地加以扩大推广之原因.于是一自然提出

的问题是：是否所有无限集都与 N 对等呢？

定理 2.2 $[0,1]$ 不与 N 对等.

证明 用反证法. 设 $[0,1]\sim N$，推出矛盾如下：

由 $[0,1]\sim N$，设 $[0,1]$ 中一切数 a 毫无遗漏地被排列成：a_1，a_2，…，a_n，…，将每一 a_n 展开成无尽小数 $a_n=0.a_1^n a_2^n\cdots$，其中要求有无限个 i 使 $a_i^n\neq 0$. 注意这种展开式是一意的. 现构作一数 a^* 如下：$a^*=0.a_1^* a_2^*\cdots$，其中 $a_n^*\neq a_n^n$，那么 a^* 也是一无尽小数，但 a^* 却与每一 a_n 不等. 这是矛盾，因为 $a^*\in[0,1]$，按我们的假设它应是某一 a_n. □

例 4 任一 $\varepsilon>0$，$[0,\varepsilon]\sim[0,1]$

读者自证.

可列集是无限集，且在无限集中"元素个数是最少的". 此即

定理 2.3 任何无限集含有一个可列子集.

证明 设 A 是无限集. 由于 $A\neq\varnothing$，可取 $a_1\in A$，并命 $A_1=A-\{a_1\}$. 由于 A 无限，可见 $A_1\neq\varnothing$，任取 $a_2\in A_1$，并命 $A_2=A_1-\{a_2\}$. 一般地，设已作出 $a_1,\cdots,a_k$，并命 $A_k=A-\{a_1,a_2,\cdots a_k\}$ 时，$A_k\neq\varnothing$，便可任取 $a_{k+1}\in A_k$，这样便得一可列集 $\{a_n: n\in N\}$. □

例 5 若 A 是可列集，B 是有限集，则 $A\cup B$ 仍是可列集.

证明 设 $B=\{b_1,b_2\cdots,b_n\}$，$A=\{a_1,a_2,\cdots\}$，无妨设 $A\cap B=\Phi$，那么 $A\cup B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n,a_1,a_2,\cdots\}$. 设 $f:N\to A$ 使得 $N\sim A$，那么由 N 至 $A\cup B$ 的一对一满映射 g 可定义作

$$g(k)=\begin{cases}b_k, & k\leqslant n.\\ a_{k-n}, & k>n.\end{cases}$$

例 6 A_1，A_2 是两个不相交的可列集，$A=A_1\cup A_2$，则 A 是可列集.

证明 不妨设 $A_1=\{a_1^1,a_2^1,\cdots,a_n^1,\cdots\}$，$A_2=\{a_1^2,a_2^2,\cdots,a_n^2,\cdots\}$，那么 $A_1\cup A_2$ 便可排成一列：a_1^1，a_1^2，a_2^1，a_2^2，….