

工程计算结构力学丛书

754524

551

2736

GONGCHENG JISUAN JIEGOU LIXUE CONGSHU

邹鸿地 编著

杆系结构矩阵分析

辽宁科学技术出版社

551

2734

工程计算结构力学丛书

杆系结构矩阵分析

邹鸿地 编著



辽宁科学技术出版社

一九八五年 沈阳

内 容 简 介

本书着重讲述用位移法对各种杆系结构进行矩阵分析, 导出平衡方程并求解位移和内力。全书共分六章, 内容有: 结构力学的一般概念; 各类杆件的单元分析及单元刚度矩阵的建立; 桁架结构及刚架结构的总体分析、总体平衡方程的建立和总体刚度矩阵的形成; 几个实际问题的处理方法等。各章配有较多例题, 以便于读者学习。

本书可供工程技术人员学习使用, 也可作高等院校工科专业师生的教学参考书或教材。

工程计算结构力学丛书

杆系结构矩阵分析

Ganxi Jiegou Juzhen Fenxi

邹鸿地 编著

辽宁科学技术出版社出版 (沈阳市南京街6段1里2号)

辽宁省新华书店发行 沈阳新华印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: $7\frac{1}{8}$ 字数: 167,000 插页: 3

1985年2月第1版

1985年2月第1次印刷

责任编辑: 李殿华

责任校对: 王 莉

封面设计: 赵多良

印数: 1—4,000

统一书号: 15288·88 定价: 1.35元

前 言

计算结构力学是一门新兴的力学分支，是力学理论和近代数字电子计算机上的计算方法相结合的产物。它的产生和发展，对于分析工程中复杂的结构问题发挥了重要作用。

目前，广大科技人员迫切需要学习和掌握有关电算和力学的基本理论以及解决力学问题的新方法——有限元法等知识，许多工科院校已经开设了与此有关的课程，许多工厂、设计研究院也都相继举办了短训班学习这方面的内容。为了适应这一需要，我们编写了这套工程计算结构力学丛书（简称丛书），包括：《工程力学中的计算方法》、《杆系结构矩阵分析》、《简明有限元法》、《简明弹性力学》、《有限元法的程序设计》等。

这套丛书，从数学的计算方法、力学的基本理论到具体计算的程序设计，都作了全盘考虑，力求作到前后呼应，相互联系，同时又注意保持各册的独立性，以便单册学习。叙述上力求简洁、清楚，并配有相当数量的例题。

这套丛书，可供工程技术人员自学参考，也可作高等院校工科专业师生的教学参考书或教材。

使用传统的结构力学的计算方法分析高层建筑和大型空间结构是很困难的，甚至是不可能的。电子计算机的出现和

结构矩阵分析法的发展，给解决这类问题带来了极大的方便。矩阵分析法是适应于在电子计算机上进行计算的方法，本书介绍如何利用矩阵分析法计算杆系结构的刚度和强度。全书共六章，第一、二两章介绍结构力学的一般概念；第三章对各类杆件进行单元分析；第四、五两章分别对桁架结构和刚架结构进行总体分析；第六章叙述一些实际问题的处理方法。

奚肖凤老师和张允真老师仔细地阅读了全部书稿，提出许多宝贵意见，凡恩开同志描绘了全部插图。在此表示感谢。

限于编者水平，书中错误和不当之处难免，恳请读者批评指正。

编 者

1983年9月

目 录

前 言

第一章 绪论	1
第一节 引言	1
第二节 平衡、协调和物理关系	2
第三节 叠加原理	6
第四节 结构的计算简图及荷载	7
第五节 杆系结构的分类	11
第六节 机动分析	14
第七节 静定结构与超静定结构	25
第八节 力法和位移法的基本思想	30
第二章 力法	35
第一节 概述	35
第二节 力法正则方程的建立	37
第三节 位移 δ_{ij} 和 Δ_{ip} 的计算	42
第四节 力法的解题步骤和例题	51
第五节 用矩阵表示力法正则方程	71
第三章 单元分析——单元刚度矩阵的建立	74
第一节 单元刚度矩阵的概念	74
第二节 平面桁架单元	81

第三节	梁单元.....	85
第四节	平面刚架单元.....	89
第五节	空间桁架单元.....	93
第六节	空间刚架单元.....	95
第七节	平板架单元.....	101
第八节	单元刚度矩阵的性质.....	103
第九节	坐标变换.....	105
第十节	小结和例题.....	112
第四章	用位移法计算桁架.....	124
第一节	建立结构总体平衡方程的原理.....	124
第二节	总体刚度矩阵各元素的物理意义.....	134
第三节	总体刚度矩阵的形成.....	137
第四节	总体刚度矩阵的性质.....	144
第五节	引入支承条件.....	150
第六节	节点位移和支承反力的计算.....	154
第七节	内力的计算.....	157
第八节	计算步骤和例题.....	160
第九节	空间桁架.....	170
第五章	用位移法计算刚架.....	178
第一节	总体平衡方程和总体刚度矩阵.....	178
第二节	非节点荷载的处理及总节点 荷载向量的形成.....	187
第三节	引入支承条件.....	195
第四节	计算节点位移和杆件内力.....	202
第五节	解题步骤及例题.....	203

第六节	空间刚架和平板架·····	211
第六章	用位移法处理几个实际问题·····	214
第一节	对称性的利用·····	214
第二节	装配内力、支座沉陷和温度应力问题·····	218
第三节	考虑剪切变形的单元刚度矩阵·····	221
第四节	模拟支承条件·····	225
第五节	斜支承·····	227
第六节	变截面问题·····	232
第七节	半铰的处理·····	235
第八节	子结构·····	237

第一章 绪 论

第一节 引 言

在工程设计与施工过程中，结构计算是一个重要环节；结构计算的速度和精度，直接关系到设计与施工的速度和质量，关系到结构物是否安全、适用、经济。多年来，结构计算使用的工具是算盘、计算尺、台式计算机等，采用的计算方法是和这些计算工具相适应的。这些方法常常要对结构做过多的简化，结果是计算时间长，计算精度低，对大型和复杂的结构甚至无法计算。

电子计算机的应用和推广，促使科学技术领域发生了一场根本变革。电子计算机具有运算速度快，计算精度高，逻辑加工能力强等多方面的优点，这是旧的计算工具所无法比拟的。电子计算机应用到结构计算领域，使计算速度和计算精度得到了空前提高，这已被实践所证明了。随着新的计算工具的应用，新的计算方法也大量问世。有限单元法、矩阵位移法、离散算子法等便是与电子计算机密切相关的计算方法。

本书着重讲述杆系结构分析中的矩阵位移法（刚度阵法），这种方法是和连续体的有限单元法密切联系的，是适应电子计算机计算（简称为电算）的一种方法。全书首先从各种杆系结构的杆件（杆单元）讲起，再讲述总体结构；在总体结构分析中，从平面结构讲起，然后推广到空间结构。

第二节 平衡、协调和物理关系

结构力学所研究的问题，主要有以下几个方面：力系平衡条件、变形协调条件、物理关系。

一、力系平衡条件

设整个结构是由若干个单元体组成的。若结构整体处于平衡状态，则每个单元也必须处于平衡状态。力系平衡的必要与充分条件是各力对于某一简化中心的主矢和主矩同时为零，即 $\Sigma \vec{F} = 0$ ， $\Sigma \vec{M} = 0$ 。如果用它们的分量表示，则有：

1. 空间力系的平衡条件

$$\left. \begin{aligned} \Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0, \Sigma F_z = 0 \\ \Sigma M_x = 0, \Sigma M_y = 0, \Sigma M_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

式中 x, y, z 为互相垂直的三个坐标轴，如图 1—1 中的 (a) 或 (b) 所示。 F_x, F_y, F_z 分别表示力对三个坐标轴的投影； M_x, M_y, M_z 分别表示力对三个坐标轴的力矩。

2. 平面力系的平衡条件

$$\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0, \Sigma M = 0 \quad (1-2)$$

式中 M 表示力对平面中任意指定点的力矩 (图 1—1c)。

上述的平衡条件对于取自结构中的每个隔离体都必须满足。这些隔离体可以是结构的整体，也可以是结构的某一单元。至于单元，可以是有限单元体 (例如杆系结构中的杆件)，也可以是微分单元体。

在动力学中，结构产生运动状态的变化，即出现惯性力，这时结构物已不处于平衡状态，但根据达朗伯原理，把相应的质量与加速度相乘再加上负号，作为静力荷载加在结构上，然后即可引用平衡条件进行结构计算。

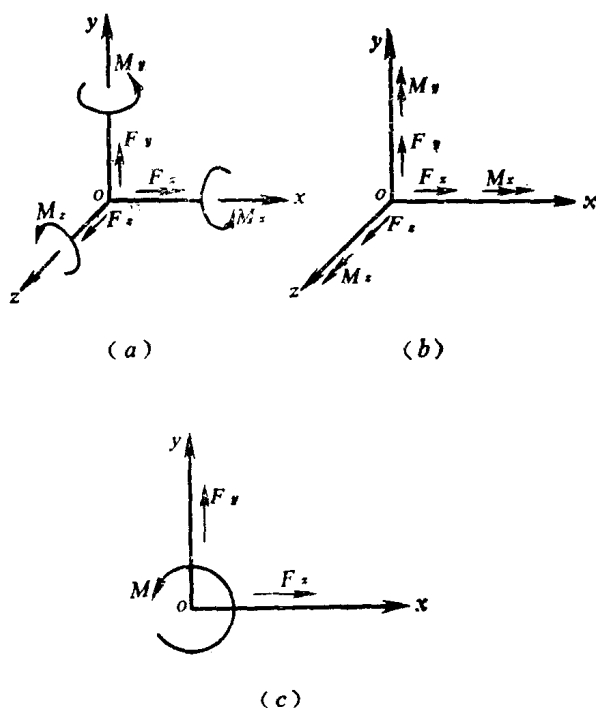


图 1-1

二、变形协调条件

结构在外界因素作用下将会发生变形。所谓变形即为结构的形状和尺寸的改变，这些改变较之于结构本身的尺寸是十分微小的。假设结构物由连续体组成，内部充满着密实的物质而无缝隙。若把整个结构分割成若干单元体，则在结构发生变形前后，这种连续性始终保持，即每个单元体虽发生变形，但当它们重新组合时，彼此仍紧密联系在一起形成一

个整体，这种现象称为变形协调条件或变形相容条件。变形协调条件是解决结构力学问题时必须满足的几何条件。

三、物理关系

前面讲述了力系平衡条件和变形协调条件，前者研究的是结构的受力状态，后者研究的是结构的几何状态。在受力和变形过程中，它们彼此保持一定的关系，即所谓的物理关系。

下面以桁架中的杆件为例来说明这种关系（图1—2a）。当桁架受到外力作用后，杆件在产生变形的同时转移到新的位置。为了便于说明，可以把这些几何变化分解为先发生刚体位移然后产生轴向变形。设轴向变形为 λ ，杆件所受轴力为 N ， λ 由 N 产生，同时随 N 而改变。对于不同的材料这种物理关系是不相同的，它可能是非线性的（图1—2b），也可能是线性的（图1—2c）。后者是最简单的物理关系，它服从虎克定律，我们所研究的问题大部分是这种线性物理关系。

受力状态和几何状态的线性物理关系可表示为

$$N = k\lambda \quad (1-3)$$

式中的物理常数 k 称为杆件的刚度系数，通过试验和计算可以求得。

公式（1—3）中的关系也可以推广到线性结构。当结构上某处有静力 P 作用，则与 P 相应的位移为 Δ 。在线性关系范围内，外力 P 与位移 Δ 的关系为

$$P = K\Delta \quad (1-3)'$$

式中 K 称为结构的刚度系数，即产生单位位移所需要施加的相应外力。

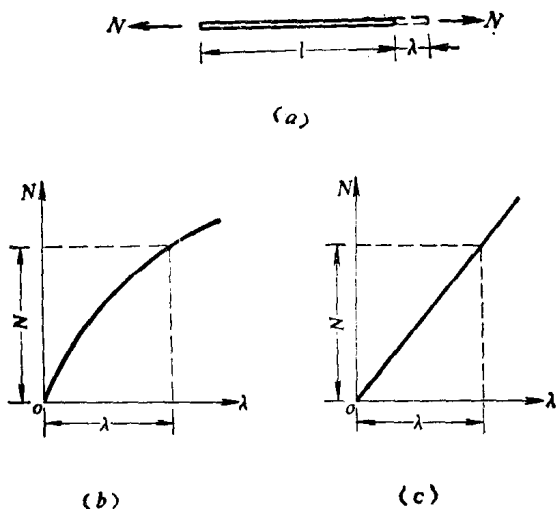


图 1-2

上面的物理关系也可以用另一种形式来表达, 即

$$\Delta = \delta P \quad (1-4)$$

式中的 δ 称为结构的柔度系数, 即单位力所产生的位移。

由式 (1-3) 和 (1-4) 得出

$$K\delta = 1 \quad (1-5)$$

上式说明刚度系数和柔度系数是互为倒数的, 它们的相乘积为 1。

整个结构的受力平衡条件和变形协调条件, 不仅在结构内部要满足, 在结构与外界接触的边界同样要满足, 即满足边界提供的受力条件和几何条件。

如果上述条件在整个结构中完全满足, 则得到的解答就是唯一精确的解答; 若其中某一条件不能严格地满足, 则所

得到的解答为近似解答。

第三节 叠加原理

叠加原理是小变形弹性结构计算中带有普遍性的原理。这个原理是近似的，它能使计算得到简化并能使计算的结果达到相当精确的程度。叠加原理，更合适的说法应该称为线性叠加原理，其内容是：结构上各个因素共同作用的结果等于其中每个因素单独作用结果的总和。这里所说的“因素”，可以是力、位移等。如果是力，这就是力的线性叠加，即结构上各个力共同作用的结果等于其中每个力单独作用结果的总和。

叠加原理必须满足以下两个条件才能应用。

一、几何条件

小变形结构是我们研究的对象。当结构的变形与结构本身原始尺寸相比极为微小时称为小变形结构。处理这种小变形结构的方法又可分为两类，各有其适用的条件。

1. 几何线性问题

处理这类小变形结构时，允许以变形前原始尺寸作为计算的依据，即不考虑变形对外力的方向或作用点的影响。今后遇到的均属这种小变形的情况，这就造成了在几何上进行线性叠加的条件。

2. 几何非线性问题

当变形虽然很小，但对作用力的影响显著，不能按原始尺寸进行计算，而应该以变形后的尺寸作为依据，这就造成了几何非线性条件，从而使计算复杂化，不能进行线性叠加。在实际问题中也会遇到这种情况。

二、物理条件

现限于讨论弹性物体:

1. 物理线性问题

结构是弹性体, 而且服从虎克定律, 即材料具备物理线性条件 (如图1—2c)。我们今后遇到的变形体均属于这种情况。

2. 物理非线性问题

结构是弹性体, 但不服从虎克定律, 这就造成了物理非线性的条件, 不能进行线性叠加。这种情况遇到的不多, 但值得引起注意。

总之, 叠加原理适用的条件为: 变形很小, 允许以变形前结构的原始尺寸作为计算的依据; 材料是服从虎克定律的弹性体。本书研究的是线性结构, 即叠加原理普遍适用。

第四节 结构的计算简图及荷载

一、计算简图

结构计算简图是对真实结构进行抽象和简化, 使其成为既能反映真实结构的主要特征, 又便于力学计算的模型。在力学计算中, 结构计算简图乃是真实结构的代表。选取计算简图的原则为:

(1) 抓住主要因素, 舍弃次要因素, 尽量反映结构的主要特征;

(2) 与所采用的计算工具相适应, 力求便于力学计算。

同一种结构由于具体情况不同, 所选取的计算简图也会因之而异。例如, 在初步设计中可选取较为简单的计算简

图，在最后设计中可选取较为精确的计算简图；进行动力计算时，由于计算比较复杂，可选取较为简单的计算简图，进行静力计算时可选取较为精确的计算简图。此外，由于使用的计算工具不同，所选取的计算简图也就不同。例如，手算的计算简图通常取得简单些，而电算的计算简图可取得精确些。选取结构计算简图十分重要，在进行结构设计之前要妥善地加以解决。

二、杆系结构的简化

1. 杆件

杆系结构是由细而长的构件组成，称这种构件为杆件或单元。通常杆件的长度大于它的横截面尺寸（宽度或高度）五倍以上时，就可以作为杆系结构来考虑。在杆系结构中，杆件用其轴线来表示，杆件的长度用节点间的距离来计算。杆件的自重则近似地转移到轴线上。

2. 节点

杆件的交点称为节点。节点可以简化为两类：铰节点和刚节点。

（1）铰节点。以平面铰节点为例，理想铰节点的几何特征是各杆可以绕铰节点自由转动。它相应的受力状态是在铰节点的杆端不存在转动约束作用，即不引起杆端力矩，只能产生杆端轴力和剪力。理想的铰节点用一个小圆圈表示（图1—3a）。

（2）刚节点。以平面刚节点为例，刚节点的几何特征是，当节点发生位移之后各杆不能绕节点作相对的转动，即各杆轴线间的夹角变形前后保持不变。刚节点的受力状态是，节点对杆端有防止相对转动的约束力矩存在，除产生杆端轴力和剪力以外，还产生杆端力矩。刚节点的表示如图1

— 3 (b) 所示。

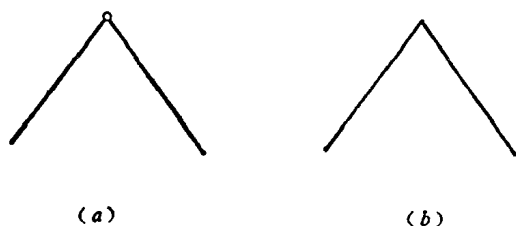


图 1—3

3. 支座

结构与基础相连接的部分称为支座或支承。平面结构的支座可分为固定铰支座、可动铰支座、固定支座三种。

(1) 固定铰支座。固定铰支座（简称铰支）的几何特征是结构可以绕铰中心 A 点自由转动（图1—4a），但 A 点不能作水平移动和竖向移动。固定铰支座的反力有两个，即限制水平移动和竖向移动的约束反力 X 和 Y 。这种支座可以通过铰中心的两根支杆来表示。

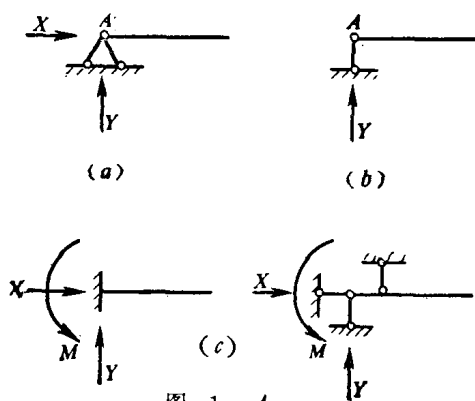


图 1—4