

高等學校教學用書

解析幾何習題集

О. Н. ЦУБЕРБИДЛЕР 著
樓 文 林 譯

高等教育出版社

代號 1 0 0 2
定價 1.22 元

高等學校教學用書



解析幾何習題集

O. H. 楚倍爾畢雷爾著

樓文林譯

高等教育出版社

本書係根據蘇聯國營技術理論書籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的楚倍爾畢雷爾 (О. Н. Пуберблиер) 著“解析幾何習題集”(Задачи и упражнения по аналитической геометрии) 1953年第十七版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定為高等工業學校教學參考書。

本書共分四篇：第一篇為直線解析幾何，第二篇為平面解析幾何，第三篇為空間解析幾何，第四篇為向量代數。

解 析 幾 何 習 題 集

書號236(課214)

楚 倍 爾 畢 雷 爾 著

樓 文 林 譯

高 等 教 育 出 版 社 出 版

北 京 瑞 瑞 廠 一 七 〇 號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

新 華 書 店 總 經 售

京 華 印 書 局 印 刷

北 京 南 新 華 街 甲 三 七 號

開本850×1168^{1/32} 印張9^{5/8} 字數285,000

一九五五年四月北京第一版 印數1—5,000

一九五五年四月北京第一次印刷 定價(7)1.22元

第十七版序言

本習題集是準備給高等工業學校和高等師範學校學生用的。在其中儘可能的應用物理學、力學及別的應用科學範圍內的問題。注意圖解，注意用機械作成曲線和曲面的問題，介紹最簡單機械的概念，使之與軌跡問題聯繫起來。

在編輯本習題集時也注意到函授學校的學生及自修數學者，所以在每章開始除了公式，還作了必要的理論說明，以便正確而有意識地應用這些公式。典型的問題在文內有解答，大多數問題的答案附有提示，有時並有詳細的解答。每一章以較易的例題開始，選擇問題的原則是：所有的問題都是由淺入深的。

我們盡力經常應用個別的提示、附註和問題來提醒學生們：它們在應用解析方法時都是要與幾何打交道的，每一步解析計算有相當的幾何內容，且所得的每個結果，有簡單的具體解釋。

書中的材料是這樣安排的：它使學生們在研究二次曲線(或曲面)的一般理論前就已得到它們的幾何性質的堅固知識。在一般理論內，主要的是注意力放在研究曲線(或曲面)，即研究二個問題：如何由曲線(曲面)的方程式判斷它所具有的性質及如何判斷它在所選坐標系中的位置的特點。

自第二版開始在那些對於高等工業學校來說材料是稍嫌貧乏的幾章中補充了新的習題，而以後由於對年青專家的要求提高了，所以又把習題集改寫並補充了較難的習題。

自第十一及以後各版內，新寫了關於向量代數及它在幾何內應用的第四編。向量的引入並沒有改動頭三篇的材料，這個符合於那些不研究或在學習解析幾何後單獨研究向量代數的高等工業學校學生的利

益。對於在解析幾何教程內研究向量代數的學生，自然要使研究空間幾何的時刻與熟習向量的時刻相適合，但第十五章所含的材料並不要求什麼預備知識，因此爲了鄰近課目的要求，可以把它提早學習。

第十六章的 § 1 是以第七章爲基礎的，因此應直接跟在它後面。祇有在第八章的材料因做了足夠數量的練習而爲學生鞏固掌握以後才能着手研究第 16 章 § 2。第十六章的 § 3 可與第九章同時研究，而 § 4 和 § 5 可與第十章同時研究。

第十六章的習題不包含本質上是新的幾何材料，但它提供了對同樣內容的習題應用不同方法的可能性。

學生們最好比較一下用坐標和向量表示的公式和方程式。比較求解的過程及所得的結果，並從向量表示式變換成坐標表示式或從坐標表示式變換成向量表示式，以便在解某一問題時，估計各個方法的優點。

在第十五版出版前曾經小心檢查過有沒有包含可使低年級學生產生不正確概念，例如與具體觀念聯繫不夠的科學原理。

在當時，本習題集的編輯是以 В. К. Млодзеевский 教授的古典教本，А. К. Власов 教授和別的莫斯科大學幾何學派代表的教本爲根據的，他們都是以投影幾何原理來編寫解析幾何教程的。因此就過早地引入了非固有元素的概念並且還仔細地解釋這些概念的意義和作用。

但在最近年代裏，與蘇維埃科學光輝發展的同時，所讀教程的性質也已改變了。一方面現在對於學數學的學生，解析幾何教程是以仿射度量幾何爲基礎的，而只在教程之末才給予投影幾何基礎。另一方面在高等工業學校內一般已經非常飽和的數學教程中，已不可能再包含投影幾何原理。因此在近來專爲高等工業學校編輯的教本內已把非固有元素完全除去。

因此在編輯本習題集第十五版時，改變了理論的解釋和改變了上面提到的那些包含非固有（太遙遠的）元素的所有習題的編輯。

經過改編後，二次曲線和曲面按它們與直線相交的特點來分類的

方法，如再予保留就不合理了。因此在本習題集的第十六版內又改寫和重新安排了關於二次曲線一般理論（第六章）和二次曲面一般理論（第十四章）的材料。在研究二次曲線時首先提出的問題是曲線中心的存在的問題；直接跟它聯接的是有關分解爲一對直線的曲線之考察和研究。不分解曲線的最後分類法是與把它化爲最簡單形式方程式的方法相聯繫的。

在二次曲面的一般理論內也用類似的計劃。這樣佈置材料就與現代高等工業學校的教學佈置很符合了。

第十七版內只改正了著者和出版社所看到的排印和個別錯誤。並沒有什麼改變。

目 錄

第十七版序言	i
--------------	---

第一編 直線解析幾何

第一章 直線上的點的位置、基本公式	1
-------------------------	---

1. 坐標變換公式	3
2. 基本公式	3

第二編 平面解析幾何

第二章 平面上點的坐標、基本公式	8
------------------------	---

1. 直角坐標、圖解	8
2. 二點間的距離、線段的方向、三角形的面積	13
3. 分線段為給定比	16
4. 斜角坐標系	19
5. 極坐標系	22
6. 投影、坐標的變換	24

第三章 方程式的幾何意義	29
--------------------	----

1. 按曲線的方程式作曲線	29
2. 按曲線的幾何性質作它的方程式	31

第四章 直線	39
--------------	----

1. 具有係數的直線方程式、二直線間的夾角、經給定點及給定方向 的直線方程式	39
2. 經過二已知點的直線方程式、截距式直線方程式、三已知點在一 條直線上的條件	43
3. 直線的法線方程式、從直線到點的距離	46
4. 直線的一般方程式、二直線的交點、三直線經過一點的條件、直線束	53

5. 混合的直線問題	59
第五章 二次曲線的基本性質	62
1. 圓	62
2. 橢圓	64
3. 雙曲線	76
4. 拋物線	83
5. 二次曲線的極坐標方程式	87
第六章 二次曲線的一般理論	89
1. 二次曲線的一般方程式、在坐標軸平行移動時這方程式的變換、 曲線的中心	89
2. 將二次曲線分解為一對直線的條件、一般二次方程式的研究	92
3. 二次曲線與直線的相交、切線方程式	97
4. 曲線的直徑、主軸、漸近線、移到共軛方向的曲線方程式、 移到漸近線上的曲線方程式	100
5. 用不變式變換二次曲線方程式	108
6. 極點和極線	110
7. 不在主方向上曲線的焦點的性質問題	114
8. 混合問題	115

第三編 空間解析幾何

第七章 直角坐標	119
第八章 方程式的幾何意義	126
第九章 平面	129
第十章 在空間內的直線	137
1. 直線方程式、二直線的夾角、在空間內二直線的相交條件	137
2. 直線與平面	143
第十一章 圓球面	148
第十二章 圓錐和圓柱	151
第十三章 二次曲面的最簡單方程式	154
第十四章 二次曲面的一般理論	162

1. 二次曲面的一般方程式及它在移動原點時的變換、曲面的中心、
方程式為圓錐或一對平面時的條件162
2. 曲面和直線及和平面相交、漸近方向、切平面165
3. 直徑平面、主方向、一般二次曲面方程式的研究並把它化為最簡單形式171

第四編 向量代數的基礎和它在幾何學內的應用

第十五章 向量和它的運算176

1. 向量、向量的相等、向量的加法和減法、向量與數乘、向量的分解176
2. 向量投影、向量的數性乘法184
3. 矢性乘法、三向量的混合積、二重矢性積188

第十六章 向量代數在解析幾何學內的應用194

1. 用向徑決定點的位置、向量的坐標、用已知的向量的坐標運算、基本公式194
2. 向量方程式的幾何意義201
3. 平面203
4. 在空間內的直線212
5. 直線和平面218

答案和提示222

第一編 直線解析幾何

第一章 直線上的點的位置、基本公式

解析幾何方法的主要特點之一，就是用數來決定幾何圖形的位置。確定幾何圖形位置的數叫做它們的坐標。

我們暫時只研究位於一條直線上的點。為了可能在這條直線上決定點的位置，在其上規定坐標系如下：

1) 選定原點，即點 O (圖 1)，以它為標準確定其餘各點的位置；



2) 選定長度單位 ($e = PQ$) 來量從原點到所研究點的距離；

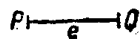


圖 1

3) 選定直線的正方向 (在圖上它用箭頭來表示)，這就不但可以按它們的絕對值，而且還可以按正負號來區別直線線段：線段的正或負要看從它的始點到終點的方向與直線的正向或反向相同而決定 (在圖 2 內，線段 OA 是正的， OB 是負的)。

在直線上規定好坐標系後，這直線的每一點 M 就對應於一個唯一的表明它的位置的無名數，即一個坐標 $x = \frac{OM}{PQ}$ ，它的絕對值是由所給的單位長量出的從原點到點 M 的距離，而符號表示點在原點的那哪一邊。

反之，每一個數字對應於直線上一個唯一的點，例如要作坐標為 $x = +3$ ，即 $\frac{OA}{PQ} = 3$ ，或 $OA = 3 \cdot PQ$ 的點 A 。點 A 為從原點向正 (圖 2) 且其長度為三個比例尺單位的線段終端所唯

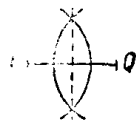


圖 2

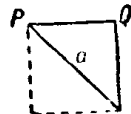
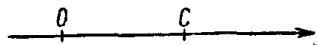


圖 3

一決定。

如果點 B 的坐標等於 $-\frac{1}{2}$ [其寫法是把它坐標寫在靠近點的標記的括弧內： $B(-\frac{1}{2})$]，則我們從原點向左取選定的單位 PQ 的一半(圖 2)作點 B 。再作點 $C(+\sqrt{2})$ ；在這個情況下 $OC = \sqrt{2} \cdot PQ$ ；爲要得到這樣的線段，作以線段 PQ 爲邊的正方形；正方形的對角線 $a = \sqrt{2} \cdot PQ$ ，因此由原點沿正方向取等於這個對角線長的線段，即得點 C (圖 3)。

當我們說已知一點，這就是說，已知它的坐標；當要按照某些條件求點時，這就是說，需要計算它的坐標。

因此在直線的點和實數間確立了一一對應，我們可以利用這個對應關係，以圖解方法表示出變數的任何變化。例如將變數 x 依次取等於等比級數

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, \dots$$

各項的值。這些變數的值用點

$$A_1(+\frac{1}{4}), A_2(+\frac{1}{2}), A_3(+1), A_4(+2), A_5(+4), A_6(+8), \dots$$

畫在直線上(圖 4)，我們顯然看出，這變數跳躍着變化，它每一次比前面的大一倍，如果變數

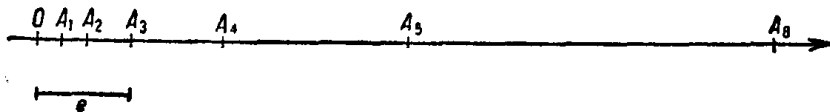


圖 4

按照等差級數項，例如： $1, 1.5, 2, 2.5, 3, \dots$ 變化規律變化，則我們在直線上得互相等距的一系列點(圖 5)。

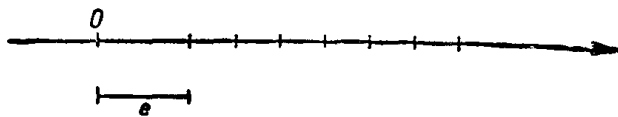


圖 5

在許多量具內，我們就是按直線上點的位置來判斷被研究量的變化的，例如我們按水銀柱的水平線在垂直的標度線上的位置來判斷溫度。在這種情況下，以在冰的融點時水銀水平位置爲始點，選從下向上方向爲正方向，又單位長度等於水銀從冰的融點轉到水的沸點(攝氏)的上升的 $\frac{1}{100}^{\circ}$ 。

如果改變原點、直線的方向或長度單位，則直線上的點和數間的對應關係就不同——每

1. 坐標變換公式

如果移原點至點 $O'(a)$ ，則直線上任何一點的舊坐標 (x) 和同一點的新坐標 (x') 間存在下列的關係：

$$x = x' + a. \quad (1)$$

如果以與直線原來相反的方向為正方向，則所有點的坐標改變符號，而不變其絕對值：

$$x = -x'. \quad (2)$$

如果選新的長度單位 $e' = P'Q'$ ，則同一點的坐標反比於相應的單位，即

$$x = \frac{e'}{e} x'. \quad (3)$$

2. 基本公式

如果給定二點 A 和 B 以各自的坐標 x_1 和 x_2 ，則它們間的距離按公式

$$AB = x_2 - x_1 \quad (4)$$

計算，即線段長等於它的端點的坐標差，且必須終點的坐標減去始點的坐標。

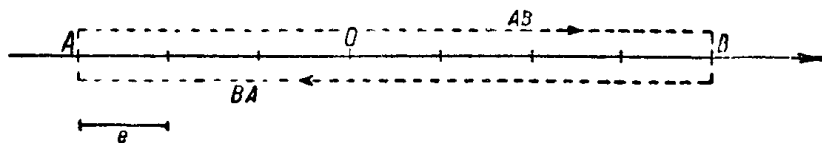


圖 6

因為這公式對於點的一切位置都正確，因此必須注意線段的正確的符號並把表示始點的字母放在第一位，而把表示線段終點位置的字母放在第二位。

例題 給定二點

$$A(-3) \text{ 及 } B(+4);$$

這時 $AB = 4 - (-3) = +7,$

$$BA = -3 - 4 = -7 \text{ (圖 6)}.$$

如果在直線上給定二點 $A(x_1)$ 和 $B(x_2)$ ，則所有第三個點 $C(x)$ 把線段 AB 分成某一一定的比 $\frac{AC}{CB}$ (圖 7)；我們用字母 λ 表示它，即：

$$\lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{\text{從始點至分點的線段}}{\text{從分點至終點的線段}}.$$

要計算 λ 用公式：

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x}; \quad (5)$$

λ 爲正或負值按照分點 $C(x)$ 在線段 AB 之內或之外而定。

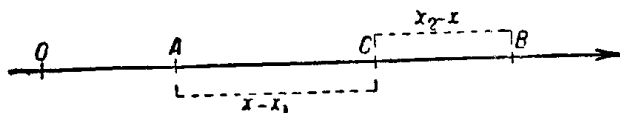


圖 7

反之,如果給定比 λ , 則相應於分點 C 的坐標由公式

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad (6)$$

決定。

其中,當 $\lambda=1$, $AC=CB$ 時,我們有

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad (7)$$

即線段中心的坐標等於它的端點的坐標的中和。

四點 A, B, C 和 D 的複比(非調和比)即爲二比的比, 其中點 C 分線段 AB 又 D 分同一線段 AB 把它表示爲

$$(ABCD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}.$$

如果 $(ABCD)=-1$, 則相應的四點叫做調和比。

1. 作下列各點：

$$A(+4), B(-2.5), C(-\frac{2}{3}), D(+1\sqrt{3}), E(-0.4)\dots, F(\sqrt{5}-1).$$

2. 作點,其坐標滿足方程式:

$$a) \frac{5x-2}{3} - \frac{2x-1}{7} = \frac{3x+4}{2} - 3;$$

$$b) x^2 - 4 = 0;$$

$$e) x^2 + 4x + 4 = 0;$$

$$c) x^2 + x - 6 = 0;$$

$$f) x^2 - x + 6 = 0.$$

$$d) x^3 - 4x^2 + 3x = 0;$$

3. 沿直線等速運動的點在任何時刻 t 的位置的公式爲 $x = vt + c$, 式中 v 是運動的速度, c 是點的開始位置。如果運動規律的方程式爲 $x = 3t - 7$, 在圖上畫出開始時間及前五秒鐘每秒末的點的位置; 試證這點在相等時間內經過相等的路程。

4. 試求與點 $A(+3)$ 對 a 原點; b 點 $B(-2)$; c 點 $C(+5)$ 對稱的點的坐標。

5. 給定點

$$A(+9), B(+5), C(-3), D(-8) \text{ 及 } M(x).$$

求這些點在長度單位爲 a 比原來的大二倍; b) 比原來的小一半; c) $e':e=5:2$ 條件下的坐標。

6. 已知一公里等於 468.7 俄丈, 寫出在沿鐵路線位置的俄制里程碑改用公制量時, 可用來做新的里程數的公式^①。

7. 如果用列氏溫度計度量, 寫出求以攝氏度數計的溫度的公式。

附註 在列氏表上 0° 記冰的融點, 80° 記水的沸點。

8. 在原點移到 a) 點 $O_1(+3)$; b) 點 $O_2(-5)$ 後, 點 $A(+6)$, $B(+2)$, $C(0)$, $D(-2)$, $E(-7)$ 及 $M(x)$ 的坐標如何?

9. 要點 $A(+7)$ 得到新的坐標 $x' = -1$, 原點應移至何點?

10. 當檢驗溫度計時發現在量水的沸點時, 水銀上升到 $+96^\circ$ 又在量冰的融點時, 僅降至 $+1^\circ$, 如何用這溫度計的度數, 計算以攝氏度數計的真實溫度?

11. 要使坐標 $x < -7$ 的所有點得到正的坐標, 而所有 $x > -7$ 的點得到負的坐標, 如何變換坐標系?

12. 變換坐標系使點 $A(+5)$ 保持自己的坐標, 而與它對稱的點改變自己的坐標。

13. 如果直線的任何點的原來坐標 x 與同點的新坐標 x' 由下列等式:

① 1 俄里等於 500 俄丈。

a) $x = 5x'$;

e) $x = -\frac{x'}{2} + 5$;

b) $x = -3x'$;

f) $x = nx'$;

c) $x = 2x' - 1$;

g) $x = x' + a$;

d) $x = -x' + 3$;

h) $x = nx' + a$

之一聯繫，如何變換坐標？

14. 變換坐標系使有坐標 $+3$ 和 $+7$ 的點得到新的坐標 $+2$ 和 -6 。

15. 在量桿子長時，設在主尺上相當於 57 厘米處的刻度與游標尺的第四分度重合，求桿長（圖8）。

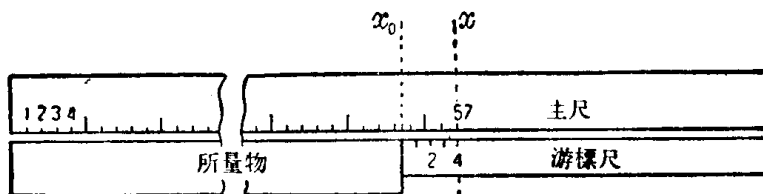


圖 8

附註 在量長時，長度不能用主尺整數單位準確表示時，用補助尺——游標尺。游標尺緊接被量物以便組成它的延長部分。游標尺長等於主尺的九單位，而把它分成十等分。

16. 試求點： $A(-2)$ 和 $B(+5)$ ； $C(+3)$ 和 $D(-8)$ ； $E(-1)$ 和 $F(-4)$ ； $O(0)$ 和 $G(+6)$ ； $G(+6)$ 和 $O(0)$ ； $K(-3)$ 和 $O(0)$ ； $M(-5)$ 和 $N(-2)$ 的距離。

17. 已知點 P 與給定點 Q 的距離，例如設：

a) $Q(+2)$ 又 $PQ = -5$;

c) $Q(-3)$ 又 $QP = -1$;

b) $Q(-7)$ 又 $PQ = +2$;

d) $Q(+1)$ 又 $QP = +8$.

求它的坐標。

17* 如果已知直線上任何三點 A ， B 和 C ，不管它們的相互位置，在它們的距離間存在下列關係： $AB + BC = AC$ 。試驗證這等式對點：

a) $A(-3)$ ， $B(+5)$ 及 $C(+12)$;

b) $A(+4)$ ， $B(+1)$ 及 $C(+6)$;

c) $A(+3)$, $B(-7)$ 及 $C(-2)$;

d) $A(x_1)$, $B(x_2)$ 及 $C(x_3)$ 正確。

18. 給定三點: $A(-1)$, $B(+5)$, $C(+3)$ 。求這些點中每一點分其餘二點間的線段的比。

19. 求把點 $A(-1.5)$ 和 $B(+7.5)$ 間的線段分爲比 λ 的點 M , λ 的值爲 $1; 4; -2.5; 0; -1$

20. 已知點 $C(-2)$ 分 $A(+3.5)$ 和 $B(x)$ 間的線段爲比 $\lambda = \frac{5}{2}$, 求點 B 的坐標。

21. 給定三點: $A(-3)$, $B(+1)$ 及 $C(+2)$ 。求它們中每一點對其餘二點調和的第四點。

22. 在刻着厘米和毫米的秤桿上, 相應於 23.7 和 74.3 毫米的點處懸掛重物 350 和 475 克。爲要使秤平衡, 求在桿下必需放支持物的點。

23. 水平木樑長 3 公尺, 重 80 公斤自由的放自己的二端在二個不動的支柱 A 和 B 上(圖9)。

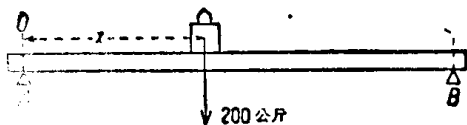


圖 9

要在支柱 B 上壓力等於 110 公斤, 應該離 A 端多少距離處放置重物 200 公斤?

24. 長 60 厘米的桿子懸在二條繩索上, 其中一條繩索張力不能超過 20 公斤, 可在桿子該端多少距離處放置重物 96 公斤?

25. 在直線上給定二點 A 和 B , 把直線分成三部分: 線段 AB , 從 B 向右的射線, 及從 A 向左的射線。在這直線上已知動點 M , 分線段 AB 爲比 λ 。試研究當 M 在 A 和 B 間移動時, 當 M 與這二點之一相合時, 當 M 由 B 向右或由 A 向左無限遠去時, λ 如何變化。