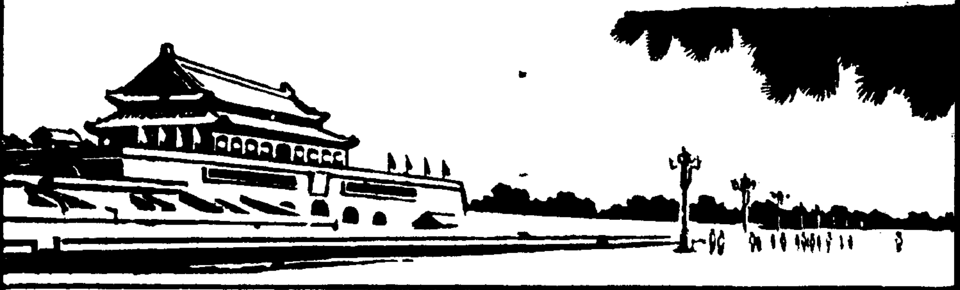

北京市中学课本

数学

第九册

北京市中学课本
数　学
第九册
北京市教育局教材编写组编
*
北京人民出版社出版
北京市新华书店发行
北京印刷一厂印刷
*
1973年1月第1版　1974年1月第2次印刷
书号：K7071·85　定价：0.25元

毛 主 席 语 录

我们的教育方针，应该使受教育者在德育、智育、体育几方面都得到发展，成为有社会主义觉悟的有文化的劳动者。

学生也是这样，以学为主，兼学别样，即不但学文，也要学工、学农、学军，也要批判资产阶级。学制要缩短，教育要革命，资产阶级知识分子统治我们学校的现象，再也不能继续下去了。

说　明

彻底改革旧教材，编写无产阶级新教材，是无产阶级教育革命的重要组成部分。在毛主席教育革命思想的指引下，在本市广大工农兵、革命师生和有关单位的大力支持和帮助下，我们编写了这册教材，供本市中学五年级第一学期使用。由于我们对伟大领袖毛主席的教育革命思想理解不深，教材中一定会有不少缺点和错误，敬请广大工农兵和革命师生批评指正。

北京市教育局教材编写组

一九七二年十二月

目　录

第十七章　数列、数列的极限

第十八章　用坐标法研究直线

第十九章　圆锥曲线

第十七章　数列、数列的极限

一　数列

我们经常遇到按照某种规律排列起来的一列数，例如：

① 工人师傅常把某些产品按下面的方法堆垛起来，例如，一堆钢管最下面一层放10根，往上每层都比下面一层少一根，如果最上面一层是4根，那么，从下到上各层钢管数是下面的一列数：

$$10,\ 9,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4; \tag{1}$$

② 细胞分裂，第一次由一个分裂成2个，第二次分裂成4个，第三次分裂成8个，……，第 n 次分裂成 2^n 个，……；写出逐次分裂后所成细胞数，得到下面的一列数：

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots\cdots,\ 2^n,\ \cdots\cdots; \tag{2}$$

③ 在生产和科研中，为了通过最少次数的试验，迅速得到最好的试验效果，常用一种“分数法”来合理安排试验点，需要用到下面的一列数：

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \cdots\cdots; \tag{3}$$

④ 算出$\sqrt{2}$精确到1，0.1，0.01，0.001，……的不足近似值，得到下面的一列数：

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ \cdots\cdots; \tag{4}$$

⑤ 在 $f(n)=\dfrac{(-1)^n}{n}$中，自变量n依次取1，2，3，4，……，所得函数值是下面的一列数：

$$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots\cdots. \tag{5}$$

按照某种规律排成一列的数，叫做数列. 上面的(1)、(2)、(3)、(4)、(5)各列数都是数列.

在一个数列里，每一个确定的位置上都有一个确定的数，例如，在上面的数列(1)中，第一个位置上的数是10，第二个位置上的数是9，……，第七个位置上的数是4；在数列(2)中，第一个位置上的数是2，第二个位置上的数是4，……. 因此，我们可以把一个数列里的数看成它所在位置的号码的函数，自变量就是位置的号码. 当自变量依次取从小到大的自然数时，按着次序列出的函数值所组成的一列数，就是数列.

数列里的一个数叫做数列的一项，在第一个位置上的数叫做第一项，在第二个位置上的数叫做第二项，……，一般地，在第n个位置上的数叫做第n项，数列的第n项通常用符号a_n来表示.

我们常用下面的一般形式来表示数列:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots.$$

其中每一个字母右下角的号码表示各项所对应的自然数.

一个数列的第 n 项与项数 n 之间的函数关系，如果可以用一个公式表示，这个公式就叫做这个数列的通项公式. 例如，数列(1)的通项公式是 $a_n=10-(n-1)$; 数列(2)的通项公式是 $a_n=2^n$; 数列(5)的通项公式是 $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$.

知道了一个数列的通项公式，就可以依次用自然数 1, 2, 3, ……, 去代替公式里的 n, 求出这个数列的各项.

应当注意, 有些数列虽然能写出它的各项, 但却写不出它的通项公式, 如数列(4).

一个数列里，如果在某一项的后面不再有任何的项，这个数列就叫做有穷数列, 如数列(1); 如果在任何一项后面都还有跟随着的项，这个数列就叫做无穷

注: 数列(3)的通项公式较复杂，一般常根据以下规律依次写出这个数列的各项: 第一项 $\frac{1}{2}$, 以后每一项的分子等于前一项的分母, 而分母等于前一项的分子与分母的和.

数列，如数列(2)、(3)、(4)、(5).

一个数列里，如果从第 2 项起，每一项都大于它前面的一项，这个数列就叫做递增数列，如数列(2)、(4)；如果从第 2 项起，每一项都小于它前面的一项，这个数列就叫做递减数列，如数列(1)；如果从第 2 项起，有些项比前面一项大，有些项比前面一项小，这种数列叫做摆动数列，如数列(3)、(5)；如果各项都相等，这个数列就叫做常数列.

例 1 根据下面各数列的通项公式，把各数列的前五项写出来：

(1) $a_n = n^2$;

(2) $a_n = \dfrac{1}{2n+1}$;

(3) $a_n = n + (-1)^{n+1}$.

解：(1) 依次取 $n=1, 2, 3, 4, 5$，代入通项公式，得

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25;$$

(2) 依次取 $n=1, 2, 3, 4, 5$，代入通项公式，得

$$\frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{11};$$

(3) 依次取 $n=1, 2, 3, 4, 5$，代入通项公式

式，得

$$2,\ 1,\ 4,\ 3,\ 6.$$

例 2 细胞分裂时，第一次由一个分裂成 2 个，第二次分裂成 4 个，第三次分裂成 8 个，……. 求第十次分裂后的细胞数.

解：$\because$ 数列的通项公式为 $a_n=2^n$，

$\therefore$ $a_{10}=2^{10}$

$=1024.$

答：第十次分裂成 1024 个.

例 3 写出下面各数列的通项公式：

(1) $2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots\cdots$；

(2) $\dfrac{2^2-1}{2},\ \dfrac{3^2-1}{3},\ \dfrac{4^2-1}{4},\ \dfrac{5^2-1}{5},\cdots\cdots$；

(3) $1\times2,\ -2\times3,\ 3\times4,\ -4\times5,\cdots\cdots$.

解：(1) 由数列的前几项 2, 4, 6, 8 可以看出，数列的每一项都是项数的 2 倍，所以通项公式是 $a_n=2n$.

(2) 由数列的前几项 $\dfrac{2^2-1}{2},\ \dfrac{3^2-1}{3},\ \dfrac{4^2-1}{4},\ \dfrac{5^2-1}{5}$ 可以看出，数列的每一项的分母都等于项数加1，分子都等于分母的平方减去 1 的差，所以通项公式是

$$a_n=\frac{(n+1)^2-1}{n+1}=\frac{n(n+2)}{n+1}.$$

(3) 由数列的前几项 1×2, -2×3, 3×4, -4×5 可以看出，数列的每一项的绝对值都等于项数与项数加 1 的和的积，而奇数项为正，偶数项为负，所以通项公式是

$$a_n=(-1)^{n+1}n(n+1).$$

例 4 已知数列的通项公式是 $a_n=n(n+1)$,

(1) 156是不是这个数列中的项？如果是的话，是第几项？

(2) 100 是不是这个数列中的项？

解：(1) 设 156 是这个数列中的第 n 项，那么

$$n(n+1)=156.$$

就是 $$n^2+n-156=0.$$

$$\therefore\quad n=12;\quad n=-13.$$

因为 $n=-13$ 不合题意，所以只取 $n=12$.

答：156 是这个数列的第 12 项.

(2) 设 100 是这个数列的第 n 项，那么

$$n(n+1)=100.$$

就是 $$n^2+n-100=0.$$

$$\therefore\quad n=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\times100}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{401}}{2}.$$

由于两个解都不合题意，所以 100 不是这个数列中的项.

练　习

1. 写出下列各数列的前五项，并且用数轴上的点表示出来:

(1) 从小到大排列着的所有正的偶数;

(2) 从小到大排列着的所有正的奇数;

(3) 从小到大排列着的 100 以内的质数;

(4) 自然数 1, 2, 3, 4, ……的倒数组成的数列;

(5) 函数 $f(n)=\dfrac{1+(-1)^n}{n}$，自变量 n 依次取 1, 2, 3, ……所得的一系列函数值.

2. 根据下列各无穷数列的通项公式，把各数列的前五项写出来:

(1) $a_n=\dfrac{n}{n+1}$;　　(2) $a_n=(-1)^n n^2$;

(3) $a_n=3-\dfrac{1}{n}$;　　(4) $a_n=-2^n$;

(5) $f(n)=\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$;　　(6) $a_n=(-1)^n\dfrac{1}{n(n+1)}$.

3. 写出下面各数列的通项公式:

(1) 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, ……;

(2) $1-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}$, ……;

(3) $\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{4}{3}$, $\dfrac{5}{4}$, $\dfrac{6}{5}$, ……;

(4) -1, 2, -3, 4, ……;

(5) 1, $-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$, $-\dfrac{1}{4}$, …….

4. 已知无穷数列1×3，2×4，3×5，……，$n(n+2)$，……，

(1) 写出这个数列的第10项，第53项，第$n+1$项；

(2) 下列每一个数是不是这个数列的一项？如果是的话，是第几项？

80，100，120.

5. 第1题中哪些是递增数列？哪些是递减数列？哪些是有穷数列？哪些是无穷数列？

6. 对下面的数列各举一个例子：

(1) 无穷递增数列；

(2) 无穷递减数列；

(3) 无穷摆动数列.

二 等差数列

毛主席教导我们：“**任何运动形式，其内部都包含着本身特殊的矛盾。这种特殊的矛盾，就构成一事物区别于他事物的特殊的本质。**”现在我们进一步研究一种特殊的数列——等差数列.

1. 等差数列

北京铅笔厂堆放铅笔的V型架最下一层是1枝铅笔，从下到上，每层都比它下面的一层多1枝，最上层是

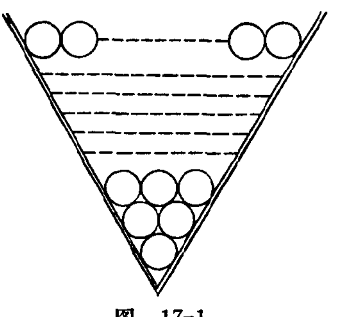

图 17-1

120 枝(图 17-1). 这样, 各层铅笔数就组成数列:

1, 2, 3, 4, ……, 118, 119, 120.

观察这个数列,我们发现它的特点是:数列从第二项起,每一项减去它前面一项所得的差都是 1. 一般地,如果一个数列从第二项起,每一项减去它前面一项所得的差,都等于一个常数,这样的数列叫做等差数列. 这个常数叫做等差数列的公差. 公差通常用字母 d 来表示.

例如,数列:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots\cdots,\ 2n-1,\ \cdots\cdots; \tag{1}$$

$$-2,\ -5,\ -8,\ -11,\cdots\cdots,\ 1-3n,\cdots\cdots; \tag{2}$$

$$4,\ 4,\ 4,\ 4,\ \cdots\cdots,\ 4 \tag{3}$$

等都是等差数列. 数列(1)、(2)、(3)的公差分别是 2, -3, 0.

例 下面数列是不是等差数列? 如果是的话,公差是多少?

(1) $0.15,\ 0.30,\ 0.45,\ \cdots\cdots,\ 0.15n,\ \cdots\cdots;$

(2) $2\frac{1}{2},\ 2,\ 1\frac{1}{2},\ \cdots\cdots,\ 3-\frac{n}{2},\ \cdots\cdots;$

(3) $1,\ 4,\ 9,\ \cdots\cdots,\ n^2,\cdots\cdots.$

解: (1) $a_n=0.15n,\ \ a_{n+1}=0.15(n+1),$

$\because\ \ a_{n+1}-a_n=0.15(n+1)-0.15n=0.15,$

$\therefore$ 它是等差数列，$d=0.15$.

(2) $a_n=3-\frac{n}{2}$, $a_{n+1}=3-\frac{n+1}{2}$,

$$\because \quad a_{n+1}-a_n=3-\frac{n+1}{2}-\left(3-\frac{n}{2}\right),$$

$$=-\frac{1}{2},$$

$\therefore$ 它是等差数列，$d=-\frac{1}{2}$.

(3) 由它的前三项可以看出，$9-4\neq4-1$，所以它不是等差数列.

必须注意，判断一个数列是不是等差数列，不能只凭观察到它的前几项组成等差数列，就认为它是等差数列. 例如，数列:

-1, 0, 1, ……, $(-1)^{n+1}(n-2)$, ……

前三项是等差的，但

$$a_{n+1}-a_n=(-1)^{n+2}(n-1)-(-1)^{n+1}(n-2)$$
$$=(-1)^n(2n-3),$$

即 $a_{n+1}-a_n$ 不是常数，所以它不是等差数列. 因此，一般地，我们需要根据通项公式来判断.

2. 等差数列的通项公式

因为在一个等差数列里，从第2项起，每一项减去它的前面一项都等于公差，所以每一项都等于它的前面一项加上公差. 因此，如果等差数列 a_1, a_2, a_3, ……

的公差是 d, 那么

$$a_2=a_1+d,$$

$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$

$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$$

$$\cdots\cdots$$

由此可知, 等差数列的通项公式是:

$$\boxed{a_n=a_1+(n-1)d.}$$

例 1 有一堆钢管, 堆成图 17-2 所示的样子, 最上面一层有 4 根, 从上到下, 每层都比它上面一层多一根, 一共有 18 层, 求最下面一层钢管的根数.

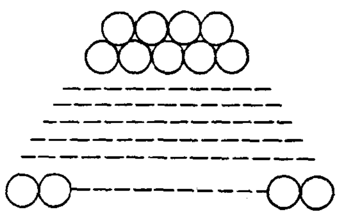

图 17-2

解: $\because \quad a_1=4,\ d=1,\ n=18,$

$$\therefore \quad a_{18}=a_1+(n-1)d$$
$$=4+(18-1)\times 1$$
$$=21.$$

答: 最下面一层有 21 根.

例 2 在一般情况下, 从地面到一万米高空, 高度每增加一千米, 气温就下降某一固定数值. 已知一千米高度气温是 8.5°C 时, 五千米高度气温是 -17.5°C, 求