研究生应用数学丛书

许兰喜 编

高等应用数学

——非线性分析

化学工业出版社

研究生应用数学丛书

高等应用数学
——非线性分析

许兰喜　编

化学工业出版社
·北　京·

(京) 新登字 039 号

图书在版编目 (CIP) 数据

高等应用数学——非线性分析 / 许兰喜编. —北京：化学工业出版社，2003.6

(研究生应用数学丛书)

ISBN 7-5025-4414-3

Ⅰ. 高… Ⅱ. 许… Ⅲ. 应用数学 – 研究生 – 教材 Ⅳ. 029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 030861 号

研究生应用数学丛书

高等应用数学——非线性分析

许兰喜 编

责任编辑：任文斗

责任校对：洪雅妹 吴桂萍

封面设计：蒋艳君

*

化学工业出版社出版发行

(北京市朝阳区惠新里 3 号 邮政编码 100029)

发行电话：(010) 64982530

http :// www.cip.com.cn

*

新华书店北京发行所经销

北京市彩桥印刷厂印刷

北京市彩桥印刷厂装订

开本 787 毫米×960 毫米 1/16 印张 8 字数 114 千字

2003 年 6 月第 1 版 2003 年 6 月北京第 1 次印刷

ISBN 7-5025-4414-3/O · 34

定 价：14.00 元

前　言

非线性现象是客观世界普遍存在的现象．例如，某人在生病时要服某种类型的药，在吃下第一粒时发现效果不错，在吃下第二粒时发现感觉要好一些，在吃下第三粒时发现效果更好，但是在吃下第四粒时突然发现感觉不好，这就是一种非线性现象．当然难受的程度以及吃下第几粒时开始难受是以病人的不同而不同，换句话讲，以系统的不同而不同．所谓非线性是指系统的结果（或解）不再满足简单的叠加原理．

又如，在化学反应中，由两种组分 A 和 B 化合生成另外两种组分 C 和 D 的反应表示为

$$a\mathrm{A}+b\mathrm{B}\underset{k'}{\overset{k}{\rightleftharpoons}}c\mathrm{C}+d\mathrm{D}$$

其中，a 、b 、c 和 d 分别表示对应组分的化学计量系数；k 和 k' 是反应的速率系数．若仍用大写字母表示组分浓度，则根据质量作用定律可写出该反应的速率方程如下

$$\frac{1}{c}\times\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{d}\times\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}=kA^aB^b-k'C^cD^d$$

由方程可以看出：如果化学计量系数 a 、b 、c 和 d 中只要有一个不等于 1，方程就是非线性的．再如，日常生活中的各类突变现象均属于非线性现象．

另外，自然科学技术的发展也正在改变着传统学科的划分．以前，学科的划分以数学、物理、化学、生物等以纵向发展为主的基础科学与新技术特别是计算机技术的结合，相继出现了许多跨多学科的新兴领域．例如：计算流体力学，斑图动力学，分形与混沌．这些新兴领域的出现是由研究各领域许多复杂现象所迫，其中非线性科学占有很重要的位置．

每个学科都有自己的非线性篇章，非线性科学不是这些篇章简单的总和．非线性科学是定量研究各种各样非线性现象的共性和最基本的数学原理，且通过分析研究找出处理和解决问题的通用方法．例如，在

反应扩散系统中，我们知道图林斑图，它基于阿兰·图林(Alan Turing)的论文《形态形成的化学基础》. 在此论文中作者从数学角度表明在反应扩散系统中稳定态会在某些条件下失稳，并自发产生空间定态图形，此过程被后人命名为图林失稳. 同时，在这篇文章中图林推测某些生物图形，例如，斑马身上的斑图可能产生于类似的反应扩散动力学效应. 几十年来在反应扩散系统中寻找图林斑图的工作一直是非线性实验科学领域的热点之一. 又如，在流体力学中对 Bénard 系统对流的研究. 从 20 世纪以来，人们一直努力通过理论、实验和计算来研究在 Rayleigh 数处于不同范围时的对流图案，以及这些图案的演变.

这些问题的理论研究主要以满足的非线性微分方程（组）解的性质和怎样去求解为基础，而这些问题研究的基础又在常微分方程里，在这里常微分方程的稳定性理论与几何理论显得尤为重要. 除此以外，在分叉和混沌的研究中对这部分内容的了解也是必不可少的.

编者几年来一直从事 Bènard 系统非线性稳定性研究. 在此期间经常听一些不同专业方向有关非线性研究方面的学术报告. 通过这些报告和自己科研体验，在阅读了大量文献的基础上，编者总结出一些在非线性科学研究中经常用到的一些数学基础知识和基本方法，并以稳定性研究为主轴，从有限维系统到无穷维系统逐渐把这些基础知识和基本方法讲述出来. 因为编者认为稳定性问题是现代科学研究中一个非常重要的、无处不在的问题.

考虑到本书的相对独立性，在第 1 章列出了若干基本概念和基本定理，该章也是以后各章的理论基础；第 2 章主要介绍常微分方程定性分析和稳定性理论，特别对 n 维线性微分方程组解的结构及 n 维常系数线性微分方程组零解的稳定性进行了比较仔细的讨论，其目的是为了帮助读者更好理解第 6 章中对无穷维系统稳定性的分析研究；第 3 章引入了动力系统、流和吸引子等概念，并介绍了极限环存在的几种判别法；第 4 章介绍了分叉的类型与混沌的产生，以及几种研究混沌的方法，并简单介绍了中心流形理论；第 5 章主要介绍了分形几何中的一些基本概念和几种分维的计算方法；最后，在第 6 章中列举几个例子来解释前几章内容的应用，这里把重点放到介绍有关 Bènard 系统和有关平面平行剪切流研究的一些主要结果.

非线性科学是一个很重要的领域，近年来受到非常大的重视. 国

内大多数重点高校都成立了自己的非线性科学中心，这些中心的特点是集中了来自于从事不同学科研究的教授和科研人员．他们的相互合作对解决各自领域的一些非线性问题无疑是有好处的．

非线性科学所包含的内容非常丰富和繁杂．我们开设非线性分析这门课程，主要是介绍非线性科学研究中常用到的一些基本的数学知识和数学方法．希望通过本课程的学习，能对工程研究生在各自的研究工作中有所帮助．该课程立足于剖析已拥有的最基本的知识和一些前沿性的研究的联系，以便更好理解一些非线性现象．由于编者水平所限，错误在所难免，真诚欢迎读者批评指正．本书得到北京化工大学“新世纪教学改革项目”及“研究生教育创新基金”资助，为此编者深表感谢．

许兰喜

2003 年 2 月 30 日

内 容 提 要

本书以稳定性理论为主线，系统地介绍了“非线性分析”方面的常用数学概念和数学方法. 本书从讲解常微分方程定性理论出发，由浅入深，系统地讲解 Lyapunov 稳定性、结构稳定、动力系统、分叉与混沌、中心流形、分形与分维等方面的基本概念和基本方法，并在最后一章举例说明其在工程和流动稳定性研究中的应用.

本书适用于高等院校高年级学生和工科研究生使用，也可作为有关专业教师和科研人员、工程技术人员的参考书.

目　录

第 1 章

预备知识（基本概念和基本定理）

本章将给出有关常微分方程适定性理论的一些基本定理，这些定理是以后各章的理论基础. 我们只需要弄清各定理的条件和结论，其严格的数学证明可以先不管它.

1.1 常微分方程组解的存在惟一性定理

1.1.1 基本概念

1.1.1.1 可列集

我们在高等数学里学过集合的概念. 集合 A 中元素的个数称为集合 A 的基数（或势），记为 $\overline{\overline{A}}$. 例如 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 则 $\overline{\overline{A}}=n$，此时称 A 为有限集. 若 A 为无限集，即 A 有无穷多个元素，则 A 的基数就不显而易见. 例如，区间[0,1]中全体有理点所成的集合和全体无理点所成的集合相比，哪个集合的基数要大？

如果两个集合 A 和 B 之间存在一一对应的映射，则称 A 和 B 有“同样多”的元素（或者称 A 和 B 有同样的基数），也称 A 和 B 对等. 记为 $A\sim B$（或 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$）.

如果集合 A 的所有元素可以按次序排成一列，即 $A=\{a_1, a_2, \cdots\}$，则称 A 为可列集（或可数集），或称 A 是可列的（或可数的）. 例如：

（1）自然数集是可列集；

（2）整数集是可列集，$\{0, 1, -1, 2, -2, \cdots\}$.

另外，易证若 A_i, $i=1, 2, \cdots$，为可列个集合，且每个集合均是可列集，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 也是可列集.

可以证明：[0,1] 中的有理点集是可列的，但 [0,1] 中的无理点集是不可列的.

1.1.1.2 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$

设 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$， $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$，在 $\mathbf{R}^n$ 中引入加法和数乘法 $\boldsymbol{x}\pm\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}x_1\pm y_1\\x_2\pm y_2\\\vdots\\x_n\pm y_n\end{pmatrix}$，$\alpha\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\alpha x_1\\\alpha x_2\\\vdots\\\alpha x_n\end{pmatrix}$（$\alpha$ 为实数）后 $\mathbf{R}^n$ 成为线性空间. 若在 $\mathbf{R}^n$ 中两个元素之间再定义一种称为内积的运算

$$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\cdot\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

后 $\mathbf{R}^n$ 又成为内积空间.

若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$，则 $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}$. 此时把 $\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}\right\}^{1/2}=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle^{\frac{1}{2}}\triangleq\|\boldsymbol{x}\|$ 称为 $\boldsymbol{x}$ 的模或范数（norm）. 显然 $\|\cdot\|$ 具有以下性质

（1）$\|\boldsymbol{x}\|\geqslant 0,\|\boldsymbol{x}\|=0\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=0$

（2）$\|\alpha\boldsymbol{x}\|=|\alpha|\cdot\|\boldsymbol{x}\|$

（3）$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$ （三角不等式）

内积 $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$ 满足

（1）$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle$

（2）$\langle\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle+\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle$，$\langle\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\alpha\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$

（3）$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\geqslant 0$，$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=0\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=0$

（4）Schwartz 不等式

$$|\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|$$

范数实际上是绝对值的推广，绝对值可以看成 $\mathbf{R}$ 中的范数. 但是

若空间的维数是高维，甚至是无穷维时，为了描述不同元素之间的差异和靠近程度，就必须引入一种度量的方法，这就是范数．这些空间中的元素在实际问题中可能代表某种状态．常见的范数还有 $\|f\|=\left\{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/2}$，其中 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的平方可积函数.

利用范数就可以在 $\mathbf{R}^n$ 中定义距离

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$$

这样 $(\mathbf{R}^n,d)$,就构成一距离空间．有了距离的定义就可以引入 $\mathbf{R}^n$ 中点列的收敛：$\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛于 $\boldsymbol{x}_0$ 是指 $\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_0\|\to 0\ (k\to\infty)$．除此之外，我们引入以下一系列概念.

（1）邻域：设 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n,\delta>0$，点集 $\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|<\delta\}$ 称为 $\boldsymbol{x}_0$ 的 δ 邻域，记为 $\boldsymbol{U}_\delta(\boldsymbol{x}_0)$，简称 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域.

（2）n 维开球：$B^n(\boldsymbol{x}_0,r)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\,|\,\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|<r\}\ (\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n)$.

（3）n 维闭球：$\overline{B}^n(\boldsymbol{x}_0,r)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\,|\,\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|\leqslant r\}(\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n)$.

（4）E 为 $\mathbf{R}^n$ 中的开集：若对任意 $\boldsymbol{x}_0\in E$，存在 $\delta>0$ 使 $U_\delta(\boldsymbol{x}_0)\subset E$.

（5）E 为 $\mathbf{R}^n$ 中的闭集：若 $\mathbf{R}^n-E$ 为开集.

（6）闭包：设 $A\subset\mathbf{R}^n,\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n$，若对任意 $\delta>0$ 有 $U_\delta(\boldsymbol{x}_0)\cap A\neq\varnothing$ 则称 $\boldsymbol{x}_0$ 为 A 的接触点．集 A 的接触点的全体所成的集合称为 A 的闭包，记为 $\overline{A}$.

（7）稠密：设 A，B 均为 $\mathbf{R}^n$ 的子集，若 $\overline{A}\supset B$，则称 A 在 B 中稠密.

（8）Borel 集：以 $\mathbf{R}^n$ 中的开集和闭集为对象做出至多可列次并或交的运算所得的集称为 Borel 集.

有了距离的概念就可以引入函数连续的概念.

对于向量函数

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\begin{pmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\\ \vdots\\ \varphi_n(t)\end{pmatrix}:\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$$

由一元函数的连续、可微和可积性，不难理解以下的结果和表达式

（a）$\boldsymbol{\varphi}(t)$ 连续 $\Leftrightarrow \varphi_i(t)$ 连续　$(i=1,2,\cdots,n)$

（b）$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)=\begin{pmatrix}\dot{\varphi}_1(t)\\ \dot{\varphi}_2(t)\\ \vdots\\ \dot{\varphi}_n(t)\end{pmatrix}$

（c）$\boldsymbol{\varphi}(t)$ 在 $[t_0,t]$ 上的积分仍为向量

$$\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\varphi}(\tau)\mathrm{d}\tau=\begin{pmatrix}\int_{t_0}^{t}\varphi_1(\tau)\mathrm{d}\tau\\ \int_{t_0}^{t}\varphi_2(\tau)\mathrm{d}\tau\\ \vdots\\ \int_{t_0}^{t}\varphi_n(\tau)\mathrm{d}\tau\end{pmatrix}$$

（d）易证　$\left\|\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\varphi}(\tau)\mathrm{d}\tau\right\|\leqslant\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{\varphi}(\tau)\|\mathrm{d}\tau$

同理，对在 $\mathbf{R}^n$ 上定义的向量函数

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}g_1(\boldsymbol{x})\\ g_2(\boldsymbol{x})\\ \vdots\\ g_n(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)\\ g_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)\\ \vdots\\ g_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)\end{pmatrix}$$ 的连续性.

设区域 $D\subset\mathbf{R}^n$，向量函数 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 在 D 上有定义，若对任 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in D$ 有常数 L 使 $\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})\|\leqslant L\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ 成立，则称 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 在区域 D 上是李氏的(Lipschitz 的)，其中 L 称为李氏常数.

例如，若 $D\subset\mathbf{R}^n$ 为凸集，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$在 D 上满足 $\left|\dfrac{\partial g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_j}\right|\leqslant K$，$K$ 是常数，则 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 在 D 上是李氏的. 事实上，对任意 i，$i=1,2,\cdots,n$,

$$|g_i(\boldsymbol{x})-g_i(\boldsymbol{y})|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial g_i(\boldsymbol{y}+\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))}{\partial x_j}\right||x_j-y_j|\quad(0<\theta<1)$$

该不等式的证明用到了多元函数的泰勒展开和余项表达式，其中 D 的凸性保证了 $\boldsymbol{y}+\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\in D$，从而 $|g_i(\boldsymbol{x})-g_i(\boldsymbol{y})|\leqslant nK\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$, 于是 $\|g(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{y})\|\leqslant n^{3/2}K\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$.

如果对每一 D 中的点存在该点一个邻域 $D_0\subset D$ 使 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 在 D_0 上是李氏的，则称 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 在 D 上是局部李氏的. 例如，若 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 在 D 上有一阶

连续的偏导，即 $\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 均连续，则 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 在 D 上是局部李氏的.

命题　若 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 在 D 上是局部李氏的，则 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 在 D 的任何有界闭区域上都是李氏的.

1.1.2　存在与惟一性定理

考虑微分方程组

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t) \tag{1.1.1}$$

其中，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$，$f(\boldsymbol{x},t):D\times I\to\mathbf{R}^n$，$I\subset\mathbf{R}$ 为开区间，$D\subset\mathbf{R}^n$ 为区域.（I 可以为 $\mathbf{R}$，D 可以等于 $\mathbf{R}^n$）.

定理 1.1.1　（存在与惟一性定理）设 $f(\boldsymbol{x},t)$ 连续，$f(\boldsymbol{x},t)$ 对 $\boldsymbol{x}$ 在 D 上是局部李氏的，且对 $t\in I$ 有一致的李氏常数，则对 $t_0\in I,\boldsymbol{x}_0\in D$ 存在常数 $h>0$，使得在区间 $J=[t_0-h,\ t_0+h]$ 上微分方程(1.1.1)有惟一连续解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$，且满足初始条件

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{1.1.2}$$

证略.

1.2　解的延拓

存在惟一性定理确保了方程(1.1.1)在闭区间 $J=[t_0-h,t_0+h]$ 上存在惟一的解，现在把初始条件改为

$$\boldsymbol{x}(t_1)=\boldsymbol{x}(t_0+h) \tag{1.2.1}$$

则再由存在惟一性定理得：存在 $h_1>0$，使方程(1.1.1)在区间 $J_1=[t_0+h-h_1,t_0+h+h_1]$ 上有惟一确定的连续解，且方程(1.2.1)得到满足，设该解为 $\widetilde{\boldsymbol{x}}(t)$. 由惟一性得：当 $t\in J\bigcap J_1$ 时，$\boldsymbol{x}(t)=\widetilde{\boldsymbol{x}}(t)$. 这样方程(1.1.1)的解就向右开拓了，即找到了 $J\bigcup J_1$ 上的解. 同理可以向左开拓.

从上面可以看出，解的延拓实际上是积分曲线的延长. 那么这样左、右延拓可以到什么时候为止，即解存在的最大区间是否存在？为此

引入以下的定理.

定理 1.2.1 （解的延拓定理） 在定理 1.1.1 的条件下，令 $G = D \times I$，若 $\boldsymbol{x}(t)$ 是方程(1.1.1)满足方程(1.1.2)条件下在$[t_0 - h, t_0 + h]$上的解，则存在 $\boldsymbol{x}(t)$ 的延拓解 $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$，其最大存在区间为开区间，设为$(\alpha, \beta)$，并且当$t \to \alpha + 0$, $t \to \beta - 0$ 时积分曲线上的点$(t, \tilde{\boldsymbol{x}}(t))$趋于$G$的边界（若$G$无边界，则$|t| + \|\tilde{\boldsymbol{x}}(t)\| \to \infty$）.

在定理 1.2.1 中，若G无界，对解向右延拓来说有下面两种情况：

（1） $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ 可以延拓到$[t_0, +\infty)$ （即$\beta = +\infty$）.

（2）若 $\boldsymbol{x}(t)$ 只可以延拓到$[t_0, m)$，m 为有限，则当$t \to m$时，或者 $\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ 无界，或者$(t, \tilde{\boldsymbol{x}}(t))$趋于$G$的边界.

1.3 解对初值的连续性和可微性定理

从上节的讨论可知：对给定的 $\boldsymbol{x}_0 \in D$ 存在惟一的满足初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ 的解. 若初值 $\boldsymbol{x}_0$ 变化，解也在变化，我们想知道解的变化与初值的变化有什么关系. 设 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t)$ 是满足初值 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ 的解，从而解也是 $\boldsymbol{x}_0$ 的函数，对此函数有如下定理.

定理 1.3.1 （解对初值的连续性和可微性定理） 若方程(1.1.1)的右端项 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ 对空间变量 $\boldsymbol{x}$ 连续可微，即 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 连续，则方程对应初值 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ 的解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t)$ 对 $\boldsymbol{x}_0$ 是连续可微的.

怎样理解定理 1.3.1 连续呢？这里用到向量函数距离的定义，即当 $\boldsymbol{x}_0' \to \boldsymbol{x}_0$ 时，$\|\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0', t) - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t)\| \to 0$.

1.4 解对参数的连续性与可微性

现在来考虑带参数的微分方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t; \mu), \quad \mu \in I_1 \subset \mathbf{R} \tag{1.4.1}$$

其中，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t; \mu)$ 是从 $D \times I \times I_1$ 到 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数；I_1 是开区间，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t; \mu)$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 是局部李氏的，且对 t 和 μ 有一致的李氏常数(不依赖于 t 和 μ).

定理 1.4.1 （解对参数的连续性与可微性定理） 若 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t; \mu)$ 对