

研究生教学用书
教育部研究生工作办公室推荐

弹塑性力学中的广义变分原理

*Generalized Variational
Principles In
Elasticity And Plasticity*

(第二版)

卓家寿 编著

44.3
(2)

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

00344.3

Z91(2)

研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

弹塑性力学中的广义变分原理

Generalized Variational Principles In Elasticity And Plasticity

(第二版)

卓家寿 编著



A1030796



中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书系统地介绍固体力学问题的变分原理的推证及其在数值计算中的应用。本着循序渐进的原则阐述了有关变分学和弹塑性力学的基本知识,并从经典的自然变分原理入手推出了广义变分原理和各种形式的修正变分原理。书中在论述小位移弹塑性静力问题中的变分原理和有限元模型的基础上也扼要地介绍了有限位移、稳定、动力以及热应力等有关变分原理的问题。书稿选材反映了当前国内外的研究水平和作者的研究成果。本书可作为工科固体力学专业研究生和工程力学专业高年级本科生的教材,也可供从事固体力学研究和应用的科技工作人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

弹塑性力学中的广义变分原理/卓家寿编著. —2版. —北京: 中国水利水电出版社, 2002

教育部推荐的研究生教学用书

ISBN 7-5084-1048-3

I. 弹… II. 卓… III. 弹塑性-固体力学-力学变分原理-研究生-教材 IV. 0344.3

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第025551号

书 名	弹塑性力学中的广义变分原理(第二版)
作 者	卓家寿 编著
出版、发行	中国水利水电出版社(北京市三里河路6号 100044) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sale@waterpub.com.cn 电话: (010) 63202266(总机)、68331835(发行部)
经 售	全国各地新华书店
排 版	中国水利水电出版社微机排版中心
印 刷	北京密云红光印刷厂
规 格	787×960毫米 16开本 9.75印张 160千字
版 次	1989年11月第一版 2002年7月第二版 2002年7月第二次印刷
印 数	1391—2490册
定 价	16.00元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社发行部负责调换

版权所有·侵权必究

前 言

本书是为适应工科研究生和工程力学专业高年级学生的教学需要，以及有关科研人员自学的要求而编写的。书稿是在原先自编讲义的基础上并经过十几年教学实践中的多次修改和补充后而写成的，重点放在固体力学问题的变分描述，主要的变分原理的推证及其在数值计算方面的应用等三个方面。本书共分五章。第一章是概述；第二、三章是系统介绍弹性力学的变分原理及有限元模型，这是本书的基本内容；第四章阐述全量理论和增量理论的塑性力学变分原理及其应用，还讨论了极限分析，这是本书的重要内容；第五章扼要介绍有限位移、稳定、动力以及热应力问题等方面的变分原理，以求拓宽视野，便于读者自行深入学习和研究。

本书的第一版承主审人南京工学院余颖禾教授提出十分宝贵的意见，特此表示衷心的感谢。我校张溪常同志参加了本书的校对等方面的工作，在此也一并致以谢意。本书的第二版根据第一版教学实践的反馈意见作了局部修改和补充，但由于作者水平有限，书中错误缺点在所难免，敬请读者批评指正。

卓家寿

2002年

目 录

前 言

第一章 绪论	1
第一节 弹性力学边值问题的变分描述.....	1
第二节 固体力学中变分原理的定义和分类.....	2
第三节 变分原理的优点.....	3
第四节 本课程的目的.....	3
第二章 变分法的若干基本概念	5
第一节 变分法问题的简例.....	5
第二节 函数与泛函.....	5
第三节 变分的若干运算性质.....	9
第四节 变分学中的若干基本定理.....	9
第五节 几种类型泛函的驻值问题 Euler 方程	12
第六节 条件驻值问题	16
第三章 弹性力学中的变分原理与有限元模型	25
第一节 弹性力学基本方程的张量表示	25
第二节 弹性力学边值问题转化为能量泛函极值问题	29
第三节 极小势能原理与协调模型	36
第四节 极小余能原理与平衡模型 I	42
第五节 广义位能原理与广义余能原理	47
第六节 复杂边界条件下的广义位能原理	54
第七节 不完全的广义位能与广义余能泛函	56
第八节 分区的广义变分原理	57
第九节 修正的余能原理与平衡模型 II	61
第十节 杂交应力模型	66
第十一节 修正的势能原理和杂交位移模型简介	82
第十二节 混合变分原理和混合模型 杂交混合模型	85
第十三节 小位移弹性力学各种变分原理的关系	91
第四章 塑性力学中的变分原理及其应用	93
第一节 弹塑性问题的虚功原理与余虚功原理	93
第二节 弹塑性全量理论的最小余能原理	95

第三节	弹塑性全量理论的最小势能原理	98
第四节	若干材料模型的变分原理	102
第五节	塑性全量理论的广义变分原理	105
第六节	弹塑性增量理论的变分原理	106
第七节	速率型本构关系及能量公式	109
第八节	基于最小势能原理的弹塑性有限元法	112
第九节	弹塑性问题解的惟一性问题	120
第十节	理想塑性体的极限分析的变分原理	121
第五章	其他问题的变分原理	127
第一节	有限位移弹性理论的最小势能原理	127
第二节	有限位移弹性理论的余能驻值原理	129
第三节	有限位移问题的广义变分原理	131
第四节	有限位移问题的有限单元法 稳定问题的特征值	132
第五节	弹性动力学问题的变分原理	136
第六节	弹性体自由振动的变分原理	140
第七节	稳定温度场的热弹性变分原理	141
第八节	不稳定温度场热弹性问题的变分原理	144
参考文献	148

第一章 绪 论

第一节 弹性力学边值问题的变分描述

众所周知,弹性力学边值问题有两种平行的数学描述方法,即微分描述与变分描述。为了比较,先扼要介绍微分描述三类基本方程:

第一类是反映物体的平衡规律,简称为平衡律,其微分式为

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + f_i = 0 & (\tau) \\ \sigma_{ij}n_j = \bar{p}_i & (s_\sigma) \end{cases} \quad (1-1)$$

第二类是反映物体的连续性条件,简称为协调律,其微分式为

$$\begin{cases} e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) & (\tau) \\ u_i = \bar{u}_i & (s_u) \end{cases} \quad (1-2)$$

第三类是反映弹性体的本构关系(如应力应变关系),简称为本构律,常用广义虎克定律的表达式,如

$$\begin{aligned} e_{ij} &= b_{ijkl}\sigma_{kl} \\ \text{或} \quad \sigma_{ij} &= d_{ijkl}e_{kl} \quad (\tau + s) \end{aligned} \quad (1-3)$$

以上方程中的 u_i 、 e_{ij} 、 σ_{ij} 、 f_i 、 \bar{p}_i 和 \bar{u}_i 分别表示位移、应变、应力、体力、给定面力和给定位移的张量, b_{ijkl} 和 d_{ijkl} 是弹性常数,而 τ 、 s 、 s_u 和 s_σ 是物体体积、边界面、给定位移的边界面和给定面力的边界面, n_j 是边界面外法线的方向余弦。

弹性力学边值问题的变分描述早见于能量原理,例如,最小势能原理中的极值条件就是用能量形式表示物体的平衡律,其变分式为

$$\delta\Pi_p = 0, \quad \delta^2\Pi_p > 0 \quad (1-4)$$

其中 Π_p 是物体的总势能,它是容许位移函数 u_i 的函数,又称为势能泛函,其算式为

$$\Pi_p = \Pi_p(u_i) = \iiint_\tau \frac{1}{2}d_{ijkl}e_{kl}e_{ij}d\tau - \iiint_\tau f_i u_i d\tau - \iint_s \bar{p}_i u_i ds$$

u_i 是自变函数,但不是完全自由变化的,而是“容许”的位移,即受

协调律的约束的位移:

$$\begin{cases} e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) & (\tau) \\ u_i = \bar{u}_i & (s_u) \end{cases}$$

应用最小势能原理可以直接求出物体的位移,若选取的 u_i 事先满足协调律,分析过程中又遵循本构律,则由式(1-4)求得的 u_i 必是真解,这就说明式(1-4)反映的恰是物体的平衡律,它与式(1-1)完全等价,其严格证明将见于后面有关章节。

类似地,最小余能原理的极值条件则是反映物体的协调律,其变分式为

$$\delta \Pi_c = 0, \quad \delta^2 \Pi_c > 0 \quad (1-5)$$

$$\Pi_c = \Pi_c(\sigma_{ij}) = \iiint_{\tau} \frac{1}{2} b_{ijkl} \sigma_{kl} \sigma_{ij} d\tau - \iint_{s_u} \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i ds$$

约束条件为:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + f_i = 0 & (\tau) \\ \sigma_{ij} n_j = \bar{p}_i & (s_\sigma) \end{cases}$$

Π_c 为物体的总余能泛函, $\delta \Pi_c = 0$ 条件等价于协调律式(1-2)。

由此看来,利用变分描述和求解弹性力学边值问题是可能的和有效的,这个结论还可推广到塑性力学和连续介质力学问题,近年来,随着数值解法的迅速发展,连续体问题的变分提法愈来愈普遍和深入了。

第二节 固体力学中变分原理的定义和分类

1. 定义

设考察的物体存在下列形式的泛函

$$\Pi(u_i) = \iiint_{\tau} F(u_i, u_{i,j}, \dots) d\tau + \iint_{s} E(u_i, u_{i,j}, \dots) ds$$

若由 $\Pi(u_i)$ 的驻值条件 $\delta \Pi = 0$ 能求得该连续体问题的解,则定义描述和求解该问题的定理统称为变分原理。

2. 自然变分原理与广义变分原理

对于可以直接表达连续体的物理本质的变分原理,如最小势能原理、最小余能原理等,称之为“自然”变分原理。这类变分原理往往带有约束条件的,且对自变函数的连续性和可导性有一定的要求,为此也限制

了这类变分原理的应用范围。

为了消除或放松约束条件,引进某种方法(如待定的 Lagrange 乘子法等)“人造”出一类变分原理,使得自变函数的变化不受或少受限制,称这类变分原理为广义变分原理,如最小势能原理中的势能泛函的自变函数 u_i 是受到式(1-2)约束的,如“人造”一个新的泛函,并采用 Lagrange 乘子法,将反映约束的条件吸收到新的泛函中,如下式所示

$$\Pi_p^* = \Pi_p + \iiint_{\tau} \alpha_{ij} \left[\frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) - e_{ij} \right] d\tau + \iint_{s_u} \beta_i (u_i - \bar{u}_i) ds$$

则此时的 u_i 就不再受式(1-2)的约束了。业已证明,由 $\delta\Pi_p^* = 0$ 驻值条件得到的解答将与 $\delta\Pi_p = 0$ 的解答相同,这就使广义变分原理立足于可靠的基础上扩大了变分原理应用的范围。广义泛函中的自变函数的可选空间的扩充(不仅限制少了,而且还可以是广义函数、具有某些不连续性),大大丰富了离散模型(如有限单元)的形态和解法,这也是人们近年来重视广义变分原理研究的主要原因。

第三节 变分原理的优点

(1) 经受变分的泛函通常具有明确的物理意义,且不随坐标变换而变化(如能量泛函)。此外,在某些问题中,它比微分形式更能反映客观实际(如集中荷载作用的描述等),因此变分原理的应用范围很广。

(2) 往往存在一整族彼此等价的变分原理,例如一些有约束条件的变分原理可以采用待定的 Lagrange 乘子法转换为比原来更易求解的各种等价的变分原理,这就为数值计算带来了灵活性和多样化;

(3) 变分原理可以为连续体提供一个近似解。这种近似解通常是以某种积分加权平均形式去近似微分关系式的,其近似途径有时是对基本微分方程取逼近方程,有时是对边界方程采用某种范围内的放松;只要处理得当,可以得到与工程结构精度相适应的解,有些情况下还可以提供精确解的上界和下界。

第四节 本课程的目 的

固体力学的任务是:给出考察结构的变形和应力,分析该结构的强度、刚度和稳定性,确保结构的安全、经济和实用。

为了量化描述考察结构的变形和应力状态,必须建立分析结构的模型,采用严格的数学方法或物理试验手段去获得考察体在外来因素作用下结构内部的响应。对于结构的数模分析,其数学建模和求解方法是至为重要的。传统的弹塑性力学教科书往往偏重于微分描述和偏微分方程组求解方法的研究,这与现今常用的工程数值方法不相适应、甚至存在脱节。为此,有必要为现代工程数值方法提供坚实的弹塑性力学理论基础,弹塑性力学中的广义变分原理便是其中的最主要内容。

自从计算机问世以来,有限单元法成为现代数值方法的突出代表,它的应用不仅遍及到各类工程领域,而且在某些范围内业已取代昂贵的物模试验。有限单元法的诞生、发展和强大有赖于变分原理的深入发展,变分原理的可靠性和开拓性为有限单元法的建立和持续发展提供了坚实的理论基础和宽广的应用空间。因此,如何正确理解和熟练掌握有限单元法中丰富的单元类型及其计算方法,又如何对其作进一步创新发展,就必须以扎实的、系统的弹塑性力学中的广义变分原理和方法等理论知识来武装高级科技人才。这就是在工科研究生培养中开设该课程的目的。

本书为工科中土木、水利、岩土、结构、机械、交通、航天航空和船舶工程等专业研究生教学用书,主要为这些专业的有关结构的建模分析和数值计算提供系统的理论和方法,从这一角度看,该书隶属于专业基础课;而对工程力学或固体力学专业而言,也可视为专业课。此外,本书还可作为有关工程技术人员自学的科技参考书。

本书本着循序渐进的原则阐述弹塑性力学中系列问题的变分描述、变分原理及其方法应用,从经典的自然变分原理入手推出一族广义变分原理和各种形式的修正变分原理,建立各种类型的数模和计算方法。此外,在内容安排中本着突出重点和举一反三原则组织章节,在系统、全面地详述小位移弹塑性静力问题的变分原理和建模方法的基础上,也扼要地介绍了有限位移、稳定、动力和场问题的变分原理和数值方法。书稿选材反映了当前国内外的研究水平和作者多年科研的成果。

第二章 变分法的若干基本概念

第一节 变分法问题的简例

作为变分法最简单的例子是求解平面上两定点最短连线的问题。图 2-1 给出平面上任意两点 $P_0(x_0, y_0)$ 与 $P_1(x_1, y_1)$ ，若连接这两点的任意曲线为 $y=y(x)$ ，则其弧长由下式决定

$$L[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2} dx$$

连接 P_0, P_1 两点的曲线有无数条，并有与它一一对应的弧长 L ，本问题是要在这样的曲线中求出使弧长 L 是最短的一条。若用数学的语言来描述这个问题，要建立两个概念：

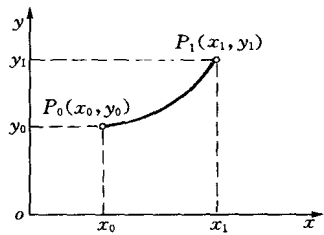


图 2-1

(1) 弧长 L 是随 $y(x)$ 的改变而改变的，即 $L=L[y(x)]$ ，则弧长是函数 $y(x)$ 的函数，称 L 是 $y(x)$ 的泛函，它的自变量是函数 $y(x)$ ；

(2) 曲线 $y(x)$ 是在某一个函数类（满足给定的连续性与边界条件）中变化的，如把这个函数类称为容许函数，则上述两定点最短连线问题就是在容许函数中求出使给定的泛函 $L[y(x)]$ 为极值的特定函数 $y^*(x)$ ，这种研究泛函极值（或更广义地用驻值 Stationary Value）的方法就是所谓变分法，而研究泛函极值（或驻值）的近似方法就是所谓变分方法。

第二节 函数与泛函

鉴于泛函的定义、性质和求驻值与极值的方法与函数有很多相似之处，下面从几个方面作平行介绍。

1. 函数的定义

1. 泛函的定义

当 $y=f(x)$

其中 $x \in X$ (数集)
 $y \in Y$ (数集) 时

称 y 是 x 的函数, X 是它的定义域, Y 是它的值域。

2. 自变量 x 的微分

x 在 x_1 附近的增量为

$$\Delta x = x - x_1$$

当这种增量很小很小时, Δx 即为自变量的微分 dx 。

3. 函数的连续性

对于 $y=f(x)$, 任给一个数 ϵ , 可以找到一个 δ , 当 $|x-x_1| < \delta$ 时能使 $|y(x) - y(x_1)| < \epsilon$, 就说 $y(x)$ 在 $x=x_1$ 处连续。

当 $I=I[y(x)]$

其中 $y(x) \in R_1$ (函数集合)
 $I \in R_2$ (实数集合) 时

称 I 是 $y(x)$ 的泛函, R_1 是泛函的定义域, R_2 是它的值域。

泛函是因变量 I 与自变函数 $y(x)$ 的关系。

2. 泛函自变量 $y(x)$ 的变分

$y(x)$ 又可称为 $I[y(x)]$ 的宗量, 它在 $y_1(x)$ 附近的增量很小时, 其增量称为变分, 用 $\delta y(x) = y(x) - y_1(x)$ 表示。 $y(x)$ 接近 $y_1(x)$ 的情况可有不同的接近度, 如只保证 $\delta y(x)$ 很小, 而 $\delta y'(x) = y'(x) - y_1'(x)$ 并不小, 则称为零阶接近度; 如使两条曲线之间处处保证 $\delta y(x)$ 和 $\delta y'(x)$ 都很小, 则称一阶接近度; 如能使 $\delta y = \epsilon \eta(x)$, $\delta y' = \epsilon \eta'(x)$, $\delta y'' = \epsilon \eta''(x)$, \dots , $\delta y^{(k)} = \epsilon \eta^{(k)}(x)$, 则当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $y(x)$ 具有 k 阶接近度。接近度阶数愈高, 其曲线接近情况愈好。

3. 泛函的连续性

对于 $I=I[y(x)]$, 任给一个正数 ϵ , 可以找到一个 δ , 当 $|y(x) - y_1(x)| < \delta$, $|y'(x) - y_1'(x)| < \delta$, \dots , $|y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x)| < \delta$ 时能使 $|I[y(x)] - I[y_1(x)]| < \epsilon$, 就说 $I[y(x)]$ 在 $y(x) = y_1(x)$ 处 k 阶接近地连续。

4. 线性函数

当 $y=f(x)$ 满足

$$(1) f(ax) = af(x)$$

a 为任意常数

(2) $f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ 时称 $f(x)$ 为线性函数。

5. 函数的微分

第一种定义。设函数为 $y=f(x)$, 其增量

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) \\ &= A(x)\Delta x + \beta(x, \Delta x)\Delta x \end{aligned}$$

其中 $A(x)$ 与 Δx 无关, $\beta(x, \Delta x)$ 与 Δx 有关, 故 $A(x)\Delta x$ 为线性项, $\beta(x, \Delta x)\Delta x$ 为非线性项。当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\beta(x, \Delta x) \rightarrow 0$, 这时可称 $y(x)$ 是可微的。其线性部分就称为函数的微分 $dy = A(x)\Delta x = f'(x)dx$ 。可见 dy 是 Δy 的线性主部。

第二种定义

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\partial}{\partial x} f(x + \varepsilon \Delta x) |_{\varepsilon \rightarrow 0} \\ &= f'(x + \varepsilon \Delta x) \Delta x |_{\varepsilon \rightarrow 0} \\ &= f'(x) dx \end{aligned}$$

6. 函数的驻值与极值

(1) 函数 $y=f(x)$ 可微, 且在 $x=x_0$ 处有极值时, 则在 $x=x_0$ 处必有 $dy = f'(x_0) dx = 0$

4. 线性泛函

当 $I=I[y(x)]$ 满足

$$(1) I[ay(x)] = aI \times [y(x)]$$

a 为任意常数

(2) $I[y_1(x) + y_2(x)] = I[y_1(x)] + I[y_2(x)]$ 时, 称 $I[y(x)]$ 为线性泛函。

5. 泛函的变分

第一种定义。设泛函为 $I=I[y(x)]$, 其增量

$$\begin{aligned} \Delta I &= I[y(x) + \delta y(x)] - I[y(x)] \\ &= L[y(x), \delta y(x)] + \beta[y(x), \delta y(x)] \cdot \max |\delta y(x)| \end{aligned}$$

其中 $L[y(x), \delta y(x)]$ 是线性泛函项, $\beta[y(x), \delta y(x)] \cdot \max |\delta y(x)|$ 是非线性泛函项, 当 $\delta y(x) \rightarrow 0$ 时, 有 $\max |\delta y(x)| \rightarrow 0$ 和 $\beta[y(x), \delta y(x)] \rightarrow 0$, 故 $\delta I = L[y(x), \delta y(x)]$ 是 ΔI 的线性主部, 称 δI 为泛函的一阶变分。

第二种定义

$$\delta I = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} I[y(x) + \varepsilon \delta y(x)] |_{\varepsilon \rightarrow 0}$$

6. 泛函的驻值与极值

(1) 泛函 $I=I[y(x)]$ 可变分, 且在 $y=y_0(x)$ 处达到极值, 则在 $y=y_0(x)$ 处必有 $\delta I = L \times [y_0(x), \delta y(x)] = 0$, 称 $y=y_0(x)$ 为极值函数 (曲线)

(2) 当 $dy|_{x=x_0}=0$ 时, 称该处的函数值 $y=f(x_0)$ 为驻值。若在 $x=x_0$ 处附近的函数值都不大(小)于 $y=f(x_0)$ 时, 称 $y=f(x_0)$ 为极大(小)值。

极值必是驻值, 驻值不一定是极值, 驻值包括极值和非极值的驻值。

(3) 函数 $y=f(x)$ 取得极值的必要条件是 $dy=0$ 或 $f'(x)=0$, 而其充分条件还要由 $f''(x)$ 值来判定。

对于一元函数, 若它在点 x 有若干阶连续导数, 则由 Taylor 公式

$$f(x+\Delta x) = f(x) + df + \frac{1}{2!}d^2f + \dots$$

那么 $f(x)$ 在 x 处达到极值的充分条件是

$$\begin{cases} df = 0 & \text{即 } f'(x) = 0 \\ d^2f \neq 0 & \text{即 } f''(x) \neq 0 \end{cases}$$

当 $f''(x) < 0$ 时, $f(x)$ 为极大, 当 $f''(x) > 0$ 时, $f(x)$ 为极小, 而当 $f''(x) = 0$ 时, $f(x)$ 不定, 可能为极大, 也可能为极小, 也可能无极值。

(2) 当 $\delta I = L[y_0(x), \delta y(x)] = 0$ 时称 $y=y_0(x)$ 处的泛函值 $I[y_0(x)]$ 为驻值。若在 $y=y_0(x)$ 附近(可能为零阶接近度, 可能为一阶接近度)的泛函值都不大(小)于 $I[y_0(x)]$ 时, 则称 $I=I[y_0(x)]$ 为极大(小)值(对于零阶接近度称强变分极值, 对于一阶接近度称弱变分极值)

(3) 泛函 $I=I[y(x)]$ 取得极值的必要条件是:

$$\delta I = L[y(x), \delta y(x)] = 0$$

而其充分条件常用间接判断其极值的存在性, 对弱极值问题, 则要讨论二阶泛函值。

设泛函 $I = \int_a^b F(x, y, y') dx$
($a \leq x \leq b$) $y|_{x=a} = \alpha$, $y|_{x=b} = \beta$ 则

$$\delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dy$$

$$\delta^2 I = \int_a^b \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' + \frac{\partial^2 F}{(\partial y')^2} (\delta y')^2 \right] dx$$

这个泛函取极值的充分条件是

$$\begin{cases} \delta I = 0 \\ \delta^2 I \neq 0 \end{cases}$$

其中 $\delta^2 I < 0$, I 有弱极大值, $\delta^2 I > 0$, I 有弱极小值, 而 $\delta^2 I = 0$, I 可能有极值, 也可能没有极值。

若 $\delta^2 I$ 可正, 可负, 则 I 不会有极值, 只能有驻值。

第三节 变分的若干运算性质

设有泛函 $F\left(x, y(x), y'(x)\right)$, 考虑 x 是固定的, 则 F 在 $y(x)$ 处的增量为

$$\begin{aligned}\Delta F &= F(x, y(x) + \delta y, y'(x) + \delta y') - F(x, y(x), y'(x)) \\ &= F(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta') - F(x, y, y') \\ &= \frac{\partial F}{\partial y}\varepsilon\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\varepsilon\eta' + \dots\end{aligned}$$

根据变分的第二种定义, 取 ΔF 的线性主部构成 F 的一阶变分 δF , 则有

$$\begin{aligned}\delta F &= \frac{\partial F}{\partial y}\varepsilon\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\varepsilon\eta' \\ &= \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\end{aligned}$$

对二阶、三阶直至 k 阶变分可如下式计算

$$\delta^2 F = \delta(\delta F), \quad \delta^3 F = \delta(\delta^2 F), \quad \dots, \delta^{(k)} = \delta(\delta^{(k-1)} F)$$

变分的运算法则可由其定义直接验证, 其结果完全类似于微分运算的法则, 如

- (1) $\delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(\delta y)$ 或 $\delta y' = (\delta y)'$;
- (2) $\delta y^{(n)} = (\delta y)^{(n)}$ $\left(y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}\right)$;
- (3) $\delta(F_1 + F_2) = \delta F_1 + \delta F_2$;
- (4) $\delta(F_1 F_2) = F_1 \delta F_2 + F_2 \delta F_1$;
- (5) $\delta(F_1/F_2) = (F_2 \delta F_1 - F_1 \delta F_2)/F_2^2$;
- (6) $\delta(F^n) = nF^{n-1}\delta F$ (F^n 表示 F 的 n 次幂);
- (7) $\delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta F(x, y, y') dx$.

第四节 变分学中的若干基本定理

1. 基本定理

设 A 是对称的正算子, 即满足

$$(Au, v) = (Av, u) \quad (\text{对称条件})$$

$$(Au, u) \begin{cases} > 0 & (u \neq 0) \\ = 0 & (u = 0) \end{cases} \quad (\text{正算子条件})$$

那么方程 $Au=f$ 如果有解, 必有惟一解, 且这个解使泛函

$$J = (Au, u) - 2(u, f)$$

取极小值, 反之, 使泛函 J 取极小值的函数也必是 $Au=f$ 的解。

证明

$$(1) \text{ 已知: } (Au, u) \begin{cases} > 0 & (u \neq 0) \\ = 0 & (u = 0) \end{cases}$$

若方程有非惟一解, 如有两个解 u_1 和 u_2 , 则有

$$Au_1 = Au_2 = f$$

即

$$A(u_1 - u_2) = 0$$

$$\text{因此} \quad \left[A(u_1 - u_2), (u_1 - u_2) \right] = 0 \quad \text{成立}$$

由已知条件可得 $(u_1 - u_2) = 0$, 即 $u_1 = u_2$

解的惟一性成立。

(2) 设 u_0 是 $Au=f$ 的解, 即 $Au_0=f$, 则

$$\begin{aligned} J(u) &= (Au, u) - 2(u, f) \\ &= (Au, u) - 2(u, Au_0) \\ &= \left[A(u - u_0), (u - u_0) \right] - (Au_0, u_0) \end{aligned}$$

因为 A 是正的, 则只有第一项为零 (即只有满足 $u=u_0$) 时, $J(u)$ 才具有极小值

$$J_{\min}(u) = - (Au_0, u_0) = - (f, u_0)$$

因此, 方程的解 $u=u_0$ 必使 $J(u)$ 取极小值。

(3) 若 u_0 使 $J(u_0) = J_{\min}(u)$, 下面证明 u_0 必是方程 $Au=f$ 的解。

取任意的函数 $\eta \in \Omega$ 及实数 λ , 总有关系式

$$J(u_0 + \lambda\eta) - J(u_0) \geq 0 \quad \text{成立, 展开后得}$$

$$\begin{aligned} &\left\{ \left[A(u_0 + \lambda\eta), (u_0 + \lambda\eta) \right] - 2 \left[(u_0 + \lambda\eta), f \right] \right\} \\ &- \left[(Au_0, u_0) - 2(u_0, f) \right] \geq 0 \end{aligned}$$

将上式化简后得

$$2\lambda \left[(Au_0 - f), \eta \right] + \lambda^2 (A\eta, \eta) \geq 0$$

因为 λ 是任取的, 符号可正可负, 绝对值可取任意小, 若要使上面不等式在 λ 为任意值时成立, 则只有在下列情况时才有可能

$$2\lambda \left[(Au_0 - f), \eta \right] = 0$$

又因为 η 是任取的, 故要求

$$(Au_0 - f) = 0, \quad \text{即 } Au_0 = f$$

证实 u_0 是 $Au = f$ 的解。

2. Lagrange 变分基本引理

设 $M(x)$ 在 $[x_0, x_1]$ 区间上连续, $\eta(x)$ 及其一阶导数在 $[x_0, x_1]$ 上连续, 且在端点处 $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$; 当取满足上述条件的任意函数 $\eta(x)$ 均使

$$\int_{x_0}^{x_1} M(x)\eta(x)dx = 0 \quad \text{时}$$

则在区间 $[x_0, x_1]$ 上函数 $M(x)$ 恒等于零。

证明可用反证法进行 (略)。

这一引理还可推广用于二重积分及多重积分的情况。

3. 局部变分原理

在介绍原理之前, 先说明固定边界与可动边界的不同点。

固定边界的条件是强加的, 如

泛函 $V = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ 的边界条件

$$y|_{x=x_0} = \alpha, \quad y|_{x=x_1} = \beta \quad (\alpha, \beta \text{ 是给定的})$$

可动边界的最简单情况是边界是给定的 (即积分上下限 x_0 和 x_1 固定), 但边界上自变函数 y 却是不确定的。如上述泛函 V 的边界条件 $y|_{x=x_0}$ 和 $y|_{x=x_1}$ 值均是任意时, 则称之为可动边界, 可动边界上的 y 值可由 $\delta V = 0$ 条件导出, 这种由驻值条件得到的边界条件定名为自然边界条件, 它是“自然”满足的而不是事先强加的。

下面介绍局部变分原理的内容。

设在可取函数类的集合 D_J 中使泛函 J 取极值的函数已经找到, 若在 D_J 中挑出一个子集 $D'_J (D'_J \subset D_J)$, D'_J 是由那些和 D_J 中的极值函数具有相同边界条件的函数类组成 (见图 2-2)。则在 D'_J 中的泛函极值函

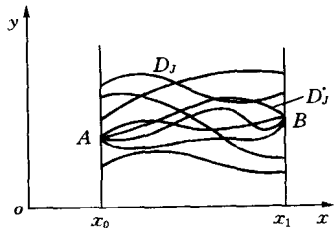


图 2-2