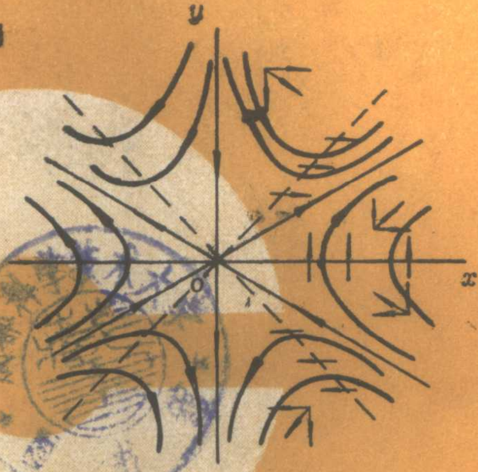
常微分方程解题方法



CHANGWEIFENFANGCHENG
JIETIFANGFA

钱祥征 编

高等学校理工科参考书

常微分方程解题方法

钱祥征编

湖南科学技术出版社

高等学校理工科参考书

常微分方程解题方法

钱祥征 编

责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版

（长沙市展览馆路14号）

湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷

*

1984年1月第1版第1次印刷

开本：787×1092毫米 1/32　印张：15.125　字数：350,000

印数：1—18,200

统一书号：13204·90　　定价：1.95元

目　录

浅谈怎样学好常微分方程

（代序言）

常微分方程是一个什么样的数学分支？它是怎样产生和发展起来的？有些什么主要内容和特点？应当如何来学习它？……这一系列问题，初学者以及初步掌握了其基本知识的读者都是关心的．编者为此综合了一些资料，借这个机会和大家来谈点粗浅体会。

一　什么是常微分方程

大家知道，数学中有两类性质截然不同的方程，一类如中学学过的代数方程、三角方程等，它的解（根）只是个别数值；而另一类如大学分析教程中接触过的隐函数方程，它的解则是函数．这后一类方程统称函数方程．其中除变量外若还含有未知函数的导数（或微分）的称为微分方程，如果自变量是一个的叫做常微分方程，多于一个的叫做偏微分方程．

微分方程是数学科学联系实际的主要桥梁之一．可以说，凡采用无穷小分析方法研究物质世界运动状态的问题大抵都离不开它．作为课程，常微分方程是数学系（科）的一门重要基础课，也是理、工科高等数学的重要组成部分，随着我国四化建设的飞速发展，医、农以至经济等社会科学各专业的学生和工作人员，也越来越需要掌握它的基本理论与方法了。

二　常微分方程的历史发展概况

常微分方程是由人类生产实践的需要而产生的。历史上，它的雏型的出现甚至比微积分的发明还早。纳泊尔（John Napier）发明对数、伽利略(G. Galileo）研究自由落体运动、笛卡儿（Descartes）在光学问题中由切线性质定出镜面的形状等，实际上都需要建立和求解微分方程。

三百多年前，当牛顿（Newton)和莱布尼兹(Leibnitz）奠定微积分的基本思想的同时，他们也就正式提出了微分方程的概念。从十七世纪末到十八世纪，与当时微积分和代数的发展水平相适应，常微分方程研究的中心问题是如何求出通解的表达式。伯努利（Bernoulli）一家对分离变量法和换元法，欧拉(Euler）对于积分因子法和求常系数齐次线性方程的通解，达朗伯尔（D'Alembert）关于非齐次线性方程通解的迭加原理，拉格朗日（Lagrange）由齐次线性方程通解经常数变易法得出非齐次线性方程特解，克莱洛(Clairant）关于全微分方程的充要条件和奇解的概念……等，都是这方面的重大成就。这个时期，欧拉还第一个考虑了一般常微分方程解的存在问题，提出了现时称为“欧拉折线法”的近似方法，尽管还未达到近代分析所要求的严格性，但为以后解的存在性的严格证明和数值计算提供了重要的途径。这样，到十八世纪末，常微分方程已发展成为一个重要的数学分支，成为当时工程技术、物理、力学等学科的基本工具之一。

进入十九世纪，人们已越来越感到用初等函数或其积分式来表示通解的路子是很窄的，大量的微分方程无法用初等积分法求解。这时候，整个数学科学正进入一个理论上严格化的发

展阶段，数学分析的严密概念建立起来了，其主要奠基人柯西(Cauchy)同时也对常微分方程初值问题解的存在、唯一性首先给出了严格的证明（由此深入，开创了常微分方程解析理论这一新的分支)。另一方面，刘维尔(Liouville)在四十年代证明了黎卡提方程一般不能用初等积分法解出。而斯图姆(Sturm)的工作提出了对解进行定性研究的最初思想。

十九世纪后半叶和二十世纪初，S.李(Sophus Lie)运用连续群的思想，对用初等函数积分式能否表出常微分方程通解的问题作出了总结性的工作，这个工作进一步促使常微分方程的研究重点转向了解析理论和定性理论。庞卡莱(Poincarè)的著名论文“微分方程所定义的积分曲线”(共四篇)和李雅普诺夫(Ляпунов)的巨著“运动稳定性的一般问题”共同奠定了定性理论的研究基础，庞卡莱的方法侧重于几何、拓扑的观点，而李雅普诺夫则侧重在运用严格的分析手法研究解的稳定性问题。自此，常微分方程理论的进一步发展就分为解析方法，几何方法和数值方法这三个主要方向。所谓解析方法，就是把微分方程的解看作由该方程所定义的一种函数（包括现时所谓的“特殊函数”)，它一般有级数展开式。人们能根据每一方程的特点推导出解的许多性质；所谓几何方法或“定性方法”，就是把微分方程的解看成充满平面或空间（或其局部）的曲线族，人们由所给方程或设法画出曲线族的大致图形，或借助于某个分析工具(如李雅普诺夫函数)，研究其几何性质，进而引出有用的结论；所谓数值方法，则是求由满足一定初始条件（或边界条件）的解之近似值的各种方法。

本世纪三十年代，定性理论中的重要研究对象——极限环(孤立周期解)，在当时蓬勃发展起来的无线电技术理论中找到了它的对应物——孤立稳定的等幅振荡，使常微分方程定性理

论在当时最新的技术科学中建立了自己的落脚点，得到了实际的应用，从而刺激它飞跃地发展，在完善理论的同时继续深入其他新兴技术学科的领域．近几十年，世界科学技术进入了核能、火箭、人造卫星时代，常微分方程定性理论及方法不论在应用上、在理论上均不断地扩展着自身的领域，显示出前所未有的强大生命力．

三　“常微分方程”课程的体系

1　它与其它课程及学科的外部联系

“常微分方程”作为数学系（科）的基础课，通常安排在二年级下学期进行，它把学生在前阶段已获得的微积分学、线性代数、解析几何及普通物理等方面知识，首次较普遍、较深入地结合起来，用以初步解决数学理论和实际问题中出现的一批重要而基本的微分方程问题，同时在这个过程中自然地提出和建立起常微分方程本身的基础理论和基本方法，也为若干后继课程（如数理方程、微分几何、泛函分析等）作好准备，当然它本身的发展又离不开实变函数论、复变函数论、拓扑学与代数几何等分支的支援．人们公认，它在训练学生分析问题和初步解决某些实际问题的能力方面起着显著的作用．它的理论和方法，过去和现在都对力学、天文、物理、化学、生物、各种技术科学（如自动控制、无线电电子学等）及若干社会科学（如人口理论、经济预测等）提供了有力的工具，后者反过来也不断地向它提出新的问题，刺激着它不断向前发展．

2　本课程的主要内容及其内在联系

作为讲授一个学期（72学时左右）的一门基础课，只能包

含一些最基本的、相对比较经典而又不太专门的材料，大体上应包含下列主要内容：

1)求通解的各种方法——初等积分法；

2)线性方程、线性方程组的基本理论和初等解法；

3)初值问题解的一般基础理论；

4)一般非线性方程（组）的定性方法初步介绍（包括稳定性理论初步）。

此外，还应选入下列全部或部分相对次要的内容：一阶偏微分方程的解法，边值问题初步，常微分方程级数解法，初值问题数值解法简介等。

四部分主要内容的关系是：1)、2)二部分主要研究求出各种类型微分方程（组）解（积分）的表达式的方法。由于线性系统（特别是常系数线性系统）是在理论上解决得最完美的部分，因此在教材中往往处于突出的地位。但是，能求出解的确定表达式的方程（组）相对于全部来说是很少的，因此自然提出了一般常微分方程的解是否存在？在什么条件下保证其解一定存在？这就是3）所要回答的理论问题。当然，还要回答，满足一定条件（初始条件）的解是否唯一？初始条件略有变动时引起解的变化如何？等等。这些理论是本课程的基础，更是4)的基础，同时它们的思想和方法也开辟了常微分方程数值解法、级数解法等新的途径。1)、2)所给出的求解方法对一般非线性方程（组）来说，几乎是无能为力的，于是迫使人们探索从方程本身的特点出发，几何地或借助于某种分析工具去研究它必然存在的解之性质——即定性方法的研究途径，这就是4)所介绍的内容范畴。但由于课时所限，加之非线性系统的定性方法目前正处在发展之中，许多问题尚未解决，所以在基础教材中这部分内容的介绍只能是极其初步的。

3　本课程的重点与难点

众所周知，重点和难点的内容常常不是同一的，就是说重点的内容不都是困难的，困难的内容也不一定都是重点。重点内容和主要内容也不尽能相同，一般是后者包含前者，但再次罗列本课程各章节的重点，却难避免琐碎与重复，我们将陆续在内容提要和解题训练中予以强调。这里仅把历届学生学习本课程中常常感到困难的地方，作为相对的难点提出来供参考。

1）解题方法的选择

本课程方程类型多、解法也多，学习时针对一种方程，介绍一、二种方法按部就班做些同类型题，大多数人尚觉顺利。但一章学完，做综合题时，或考试时遇到一个非标准形式的方程，需要我们临场决定把方程化为哪种类型，采用哪种方法最为适宜时，就感到困难了。这不仅对一阶方程是如此，对二阶线性方程(组)也要考虑这问题。

2）应用题的列方程

这是学初等数学时也遇到的老问题，现时所涉及的应用问题更广泛、更深入，是比初等数学的应用更高一级的问题（主要是引入了“动”与“变”的观点）。要针对具体问题引出合适的微分方程，将用到许多其他学科的知识，还要纯熟地掌握与运用数学各分支的工具才能办到。这的确是个不易完满解决的难点，本课程也只能为此打下一个初步的基础。

3）方向场和向量场上解的图形的关系及其作法

这里涉及到下列基本概念（及其区别）：一般平面与相平面，积分曲线与相轨线，奇点与平衡点，…等。以及纯熟地掌握等倾线作图法，一般基础理论、比较定理的应用。

4）对初值问题基础理论的深入理解与应用

对这一部分的学习，往往会流于表面上走一遍、不求甚解。

对主要定理的实质、条件与结论的讨论、证明方法的思想等理解不透，更不会应用这部分所提供的方法、结论去证明常微分方程其他类似的、或更深入一层的理论问题。

5） 对非线性方程定性方法的有关概念的理解与方法的掌握

对这部分内容感到困难常常是自然的，因它在教材中处于简单介绍的地位，往往是粗线条地描述，内容本身相对较深和较为近代，又处在学期的末尾容易草草收场，这都是造成困难的原因。

四 本课程的一般学习方法

1 打好基础

这包含两个方面的意思．如前所述，本课程不是无源之水、无本之木，它需要相当程度的分析、代数、几何、物理知识作为基础，这个基础的好坏直接影响到本课程的学习．例如微分、积分运算较熟练者，学习初等积分法就比较顺当；线性代数概念、矩阵运算掌握得较好者，对学习线性系统的理论和各种解法时就如鱼得水；物理、力学概念比较清楚者，在列方程时将驾轻就熟等．另一方面，作为常微分方程本身的系统，又可分出根基、主干和旁枝等，其中基本概念和基本方法是基础和主体，必须牢牢地掌握好．基本概念如：通解（通积分）、特解（积分）、奇解、首次积分、积分因子、积分曲线与相轨线、奇点与平衡位置、方向场与向量场、特征方程与特征值、基本解组与朗斯基行列式、定解条件、唯一性的提法、欧拉折线、ε 近似解、长函数与长方程、解的拓扑性质与拓扑结构、拓扑变换、解的稳定性……等等．基本方法如：求解的分离变量法、常数

变易法、代换法、积分因子法、待定系数法、算子法、拉氏变换法、消去法、级数解法、数值解法等；理论讨论中的逐次逼近法、ε近似解法、长函数法、比较法、基本不等式法等；定性方法中的相平面分析法、V函数法、线性化法等.

对基本概念必须做到理解清晰、准确，对基本方法必须掌握其实质、应用娴熟.

2　抓住典型、善于比较

方程有不同类型，解法有不同特点，应当善于区分不同情况和择优从事，即既认识矛盾的普遍性，更能抓住矛盾的特殊性，在学习过程中必须自己动手解剖麻雀. 例如，求解方程

$$y(x+y)dx-x^2dy=0,$$

初学者常习惯于化为形式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(x+y)}{x^2}.$$

解一　把它看作齐次方程，引入变换$y=ux$，化方程为

$$x\frac{du}{dx}=u^2,$$

分离变量积分得

$$\frac{1}{u}=-\ln x+C,\text{ 即}y=\frac{x}{C-\ln x}.$$

解二　把方程看作贝努里型

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}y+\frac{1}{x^2}y^2,$$

引入变量代换$z=\frac{1}{y}$，得到关于 z 的线性方程

$$\frac{dz}{dx}+\frac{1}{x}z=-\frac{1}{x^2},$$

再用常数变易公式亦可得到上述结果.

但对微分公式熟悉的同志，可直接从微分形式的原方程出

发，写为

解三 $y^2dx+yxdx-x^2dy=0$，

乘以因子$(xy^2)^{-1}$，得

$$\frac{dx}{x}+\frac{ydx-xdy}{y^2}=0,$$

立即得 $\ln x+\frac{x}{y}=C$，

同时从原方程看出$x=0$，$y=0$也是解。

这个例子告诉我们一个题有多种解法，以解法三最快捷，它属于积分因子法范畴，但这里的积分因子几乎是一眼看出的，这种情况类似于不定积分中的"凑微分法"，能用得上时总是最简单的。下面的微分形式的方程，由于不容易凑成全微分，走积分因子的途径是十分困难的。这方程是

$$3x^5dx-y(y^2-x^3)dy=0.$$

对这种题当试着找积分因子碰到很大困难时，又看不出它属于我们讨论过的那些标准类型方程，这时就要想到代换法。事实上，若令$u=x^3$，$v=y^2$，则$du=3x^2dx$，$dv=2ydy$，化方程为

$$\frac{du}{dv}=-\frac{u-v}{2u},$$

这是齐次型，就可以解了。

对高阶方程，特别是高阶线性常系数方程和方程组，在平时做题中也要选几道典型题来锻炼一题多种解法，并比较它们的优缺点和适应性，从中总结经验（参看第三章有关例题和习题选解）。

3 善于从多方面去总结提高

我们用一阶显式方程的积分法为例来说明这个问题。前节提到，遇到一个不太面熟的方程，究竟把它化为哪种熟识的类型，采用哪种解法最快捷呢，这是个难点。要克服它，除平时

应按上述1、2两点加强训练外，还要从以下两方面去下功夫。其一，是按一般教材论述的线索——按方程分类为出发点，采用“逻辑图”（见本书第一章第一节末）的方式，来总结这些表面上似乎互不相干的一堆材料，理清它们的来龙去脉、相互的关系；另一方面，我们反过来以这一段所采用的四个主要方法（分离变量法、常数变易法、换元法、积分因子法）为线索，总结一下它们各自的本质、能处理哪些对象（方程类型）及相互之间的内在联系（见本书第一章§1之提要）。前一个总结使我们系统地搞清了对象的情况，后一个总结进一步熟练地掌握了“武器”的特点与功能，做到知己知彼，再通过一定数量习题的实践，难点也就不难了。

4 要重视理论，重视反例

如前所述，一般基础理论这一章既是本课程的难点之一，又容易被初学者忽视，错误地认为只要会解题，理论承认它就行，不必细究。这种看法必须改变，只有正确地认识它的重要性（见前文），才能学好这部分内容。我们认为应从三个方面着手：(1) 掌握好主要定理本身的内容，包括准确的叙述，从演绎归纳的逻辑结构去掌握定理证明的思想和主要步骤，正确地掌握条件与结论的实质内容。如果可能的话，进一步抽象归纳（例如压缩映象原理对逐次逼近法的作用），在更高的观点上看清定理的实质。(2) 关于定理条件的讨论。分析条件是充分的还是必要的，改变定理条件会给结论带来什么影响等。这里要掌握几个反例，以加深对问题的认识。(3) 定理本身及其证法的应用。这里有必要补充一点习题（见本书有关部分）。

5 加强解题的训练

解题是学习阶段的重要实践手段，只要通过反复练习才能熟练地掌握各种方法。要做一定数量经过选择的各类型习题，

教材中不够的地方要适当补充一些。做题要遵循一定的格式、步骤，养成好的习惯。较繁的计算题（如对常系数线性方程组的题，用到特征向量、矩阵运算时常遇到这种情况）也一定要坚持做到底，不能半途而废凑个答案就算。

6 注意联系实际

微分方程来源于生产实际和其它学科分支的研究实践，因此较之其它数学分支，似应更多地注意这一问题。但前面说过这是个难点，我们只能做到初步地培养联系实际的能力。这里我们指出两点，一是吃透典型实例、克服畏难思想。在典型实例的启示下，自已硬着头皮去攻克几个应用题、自然会有长进的。再则，解决应用问题时要注意抓两头：一头当然是如何建立符合实际的微分方程（这里有个抓主要矛盾的问题）；另一头是按该问题的实际要求正确地解释和检查所得的结果，发现结果与实际不符时，问题可能出在方程，也可能出在计算有误或最后的解释不正确，还有个量纲问题。

关于联系实际的问题，叶彦谦先生的书“常微分方程讲义”中有些新的想法和独到的处理，很值得我们深入领会和学习。

五 本书的宗旨和具体做法

本书的宗旨是为初略学过常微分方程的读者提供一个系统复习提高的纲要，也可作为学习该课程时的一种辅助材料。对初次执教的同志可能也会有所帮助。按照这个纲要，配合教材进行复习，将可进一步加深对教材内容的理解程度，解题能力也会有显著的提高，从而帮助读者克服学习中的难点。本书的重点落在一个“用”字上，即书名“解题方法”之本意。我们的目的，在于启发读者总结经验、提高观点、熟练方法、增强

能力．她不是教材的简单重复，而是在前述我们对本课程体系的观点（特别是对重点、难点的看法）的指导下，参考一些中、外教材、资料，按照本书的宗旨加以组织编写的，有些章节的处理跳出了一般教材的框框，是一种教学上新的尝试．我们以提要、例题、习题选解的形式补充了较多的材料，使得全部材料的份量足够有志报考常微方向研究生的读者的基本需要．同时，有兴趣于常微分方程的工科学生、工程技术人员，也将会从中得到裨益．

我们的具体做法是：

1．全书分为六章和四个附录，以分清本课程的“主”与“次”．但有一个例外，由于内容的关联与叙述上的方便计，把“级数解法”放在第三章§6．

在每节的开头都有个“内容提要”，把该节讨论的问题与习题中要用到的基本概念、理论、方法系统地开列出来，并给予一定的评论与说明．读者首先按这个提要为纲，回忆你所学过的知识为考虑下面的问题作好准备，对不熟悉的内容可参考有关教材提供的论述和证明．问题与题目分两类，一类是为说明某解题方法本身的例子，一般较为简单；另一类名曰“习题选解”，包含一部分较深入的问题（有些是前几届各校研究生的考题），并以注解的形式指出解题中的注意事项和诀窍．

2．对各章材料的组织，我们作了以下的处理．

第一章　§1．一阶显式微分方程积分法．不同于一般教材，我们以方法为主线进行分类，贯穿了我们在“一般学习方法”中提出的想法；§3．奇解．我们给出了较多的求法；还专门安排了一节（§4）“如何解应用题”，想集中解决一下列方程难的问题．

第二章　考虑的方程类型与解法较一般教材为广．