數學第十册目錄

立體幾何學

立 體 幾 何 學

在本書的前幾册，已經多次提到有關立體的問題（參閱第一 868
册〔74〕節…；第四册〔354〕節，〔367〕節，〔391〕節…；第五册〔511〕及〔521〕節；第六册〔615〕節；第七册〔739〕節），但僅限於平面幾何。本册却要講述一些最重要的立體幾何，尤其着重立體在實用上的計算和圖形，這不但對工程人員，即對每一個人來說，都是很有意義的。

在動的與靜的自然界和人造物中都有很多的立體(或稱物體)，各有不同的形狀，大小，顏色，和質料。數學家不是要研究物體的成因及其所有的特性，也不注重物體的顏色，原料的成份及其物理性質，而祇注意物體的形狀和大小。但物體的實際形狀種類繁多，仔細看來都是不規則的，因此，假如數學家只想從周遭近處探討物體的形狀，而囿於一隅的話，那一定無法寫成一本正規的立體幾何學。好比一個完全的圓球，一個十分完整的正六面體等，在自然界中是很難找到的。（在平面幾何學中我們也提出過類似的問題：那裏有眞正完全無缺的圓？那裡有恰好等於 90°的直角？…)

數學家可以詳細說明(或下定義)，什末叫做圓，什末叫做球等等；他對於這些圖形的特徵可以要求絕對的準確，即所下定義可以有十二萬分之恰切，但實際上完全符合他說明和要求的東西，世間是找不到的。因此數學家只能從事於理想形狀的研究——尤其在他的定義和定理中——而不問眞實的形狀，這至少在“純粹的”幾何學是如此。

各位或許要問，一種只討論理想圖形的學問，在日常生活中對人們究竟有什麼幫助？在現實世界裡是沒有這些圖形的，例如工匠用手和工具做出來的成品，就不會是絕對理想的圖形。——

各位只須觀察一下工匠的工作，對此疑問便可獲得解答。好比模型工或建築工，他們是依照工程師或建築師所畫的圖樣做他們的工作。這些圖樣指示如何製造一個木模，一個機器零件，一座房屋等等，總之是作成一件眞實的東西。假如沒有圖樣，工匠便完全不知或不能準確知道他應做的東西是什末樣子。至於工匠並不能完全準確地達成工程師的要求，例如做不出一個完全的球體，他和工程師雙方都是知道的；因此，他們相互間遂獲得協調，眞正工作的實施與純理論的規定究竟允許多大偏差。參閱第六册〔627〕節。

總之，如要製造實用的物體，須先研究一種討論純屬理想物體之作圖及計算方法的理論，以便確定和連結其數學的定義與定理而後可。這種理論就是我們正要詳加闡釋的立體幾何學。

我們首先要講的是最簡單的數學上的立體，亦卽

立　方　體 (Würfel),

869 因爲每一種立體的計算都從立方體出發，亦卽以它爲基準（參閱第四册中之〔367〕節）。立方體另有兩個外國名稱，一爲 Hexaeder, 一爲 Kubus, 早經提及，都不是德文。前者爲希臘文，含有“六”的意義；後者爲拉丁文。故又稱立方體爲“正六面體”。

立方體在數學上之定義，僅須毫不含混地指出決定此形狀之特徵，不多亦不少，恰到好處：

立方體是一個以正方形爲界的立體。

好比下列分界面（卽側面）的特徵，卽不列於立方體的定義之內：

a) 它有六個分界面。各位試作一個多於或少於六個正方形的立體！

b) 正方形的大小相等。各位試作一個分界面爲不相等的正方形之立體！

c) 各正方形相交成直角。是否有其他可能？

d) 每兩個正方形是平行的。這一特徵實際上已包含在上面所舉之定義中。

此外更不說明：

e) 立方體各邊之特徵。其數目（12），其長度（相等），其與側面有關之位置（兩個不平行的側面相交於一邊；每一邊垂直於二側面）。

f) 稜角的特徵也可從定義裏看出：其數目（8），其與側面及各邊有關之位置（在每一稜角均有三邊及三側面互成垂直）。

g) 對角線的特徵：其數目（立體對角線共有 4 條；平面對角線共有 $6\times2=12$ 條），其長度（參閱第七册中之〔739〕節，4 號及 12 號），其相互間的位置等。

h) 立方體的對稱（參閱第五册〔527〕節）。

關於立方體的畫法，等到下面〔878〕節再爲討論及之。

立方體在空間的位置

上述立方體的性質與其在空間所佔有的位置無關。例如：它 870
所有六個面是完全相等的，既同形又同價，彼此間毫無差池。因此數學家不給任何一面以特別名稱，至多對平放於水平面上者稱爲底面。

但在實際應用方面，就不是這樣了。例如工程師就會注重立方體在其周遭以內的特殊位置，因此要用底面，右側面，（或在一個住宅的）南面等名稱。數學家却不用這些名稱，但在畫圖的時候，爲了容易了解起見，又當別論。

立方體的所有的邊不但同形也是同價，因此只須用一個字母，例如 a，表示 12 邊中的任何一邊卽可。

在此各位要切實注意下列各項：

a 可以當作一邊或許多邊的名稱。（我可任指一邊說：這是 a 邊。）

a 也可當作邊長的一般表示應用，亦卽說明由單位數及度量單位所組成之數量，參閱第二册中之〔123〕節；譬如在計算公式

中，有如 $V=a^3$, 這是各位所熟悉的。

通常 a 只代表邊長的單位數，例如在等式 $V=(a\text{cm})^3=a^3 \text{cm}^3$ 中，便是如此。

字母 a 究竟含有這些完全不相同的意義中那一種意義，如無特別聲明，各位必須從上下文的連帶關係辨認之。

計 算 法

871 各位可在一個立方體模型上弄明白下列的公式！假定字母 a 表示任何一個立方體的邊長，卽包含單位數和度量單位。

邊長總和＝ $12a$。

平面對角線 $d_F=a\cdot\sqrt{2}$；參閱第七册〔739〕節。

立體對角線 $d_K=a\cdot\sqrt{3}$；參閱第七册〔739〕節。

側面 $F=a^2$。

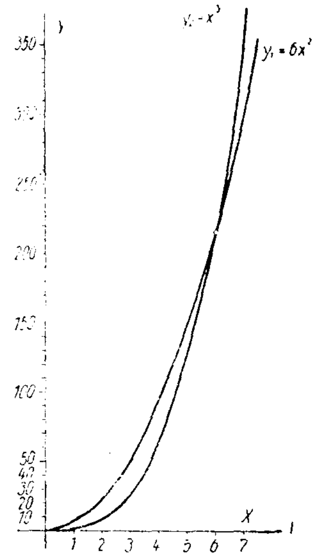
側面總和＝表面 $O=6a^2$。

體積 $V=a^3$；參閱第四册〔354〕節。

因為在這些公式裏 a 應代表長度（單位數及長度單位），所以在乘冪 a^2 及 a^3 中應將長度單位同樣使之自乘。例如：令 $a=5cm$，則 $O=6a^2=6\times5^2cm^2=150cm^2$，或 $V=a^3=(5cm)^3=5^3cm^3=125cm^3$。

立方體的函數

872 我們設想一個立方體的體積之逐漸增加，不是躍進性而是連續性，由 $a=0$ 開始，亦卽由極限開始時 a^3 還不能成為立體。在〔872a〕圖中，是以圖解說明邊長的增加，就是由直角座標系的原點（亦卽座標軸的交點）沿 X 軸連續不斷的向右前進。因 a 繼續增加，立方體的表面 O 及體積 V 遂亦逐漸增加。欲將 O 及 V 的增加在圖中顯示出來，須沿 Y 軸由原點出發逐漸向上移動。漸增的邊長 a 因為是一因次的，所以可直接記在一因次的 X 軸上，但二因次的 O 及三因次的 V，則不能直接記在一因次的 Y 軸上。為了避免這種困難，可不將面積和體積本身表示於



872 a

Y 軸上，只以其單位數作代表。參閱第七册〔682〕節。在 X 軸上也不用邊長單位，只以單位數表示之。

因此，我們只以座標系兩軸的分劃表示邊長及面積與體積的單位數：邊長 a 的單位數叫做 x 值，面積的單位數叫做 y_1 值，體積的單位數叫做 y_2 值。各位諒必明白，什麼叫做彼此相屬之值：例如屬於 $x=3$，卽相當於邊長之單位數 $a=3$ 者，乃是 y_1 及 y_2 二值，前者爲$6x^2=6\times3^2=54$，相當於面積的單位數，後者爲$y_2=x^3=3^3=27$，相當於所屬體積的單位數。

兹將若干互有關連的數值列成右下表，以作對照。

根據該表，可見當 X 軸到達 7 時，Y 軸的單位數必須超過 300 以上。因此我們第一次可在 Y 軸上不用與 X 軸同樣的度量單位：在 X 軸上是以 $5mm$ 爲分劃單位，在 Y 軸上則用 $0.25mm$ 爲分劃單位；因此在 Y 軸上 0 至 100 的距離，只有 $25mm$。

x	$y_1=6x^2$	$y_2=x^3$
0	0	0
1	6	1
2	24	8
3	54	27
4	96	64
5	150	125
6	216	216
7	294	343

怎樣排列彼此互有關連的 x 及 y 值，我們已在第八册中之〔748〕節講過了；參閱第九册中之〔846〕節！

各位至此諒可完全了解〔872a〕圖的內容了。曲線 $y_1=6x^2$ 表示正方形的面積增加，曲線 $y_2=x^3$ 表示立方形的體積增加。在 $x=6$ 以前，卽 x 值小於 6 時，其所屬的 y_1 值大於所屬的 y_2 值；x 值大於 6 時，則相反，卽立方體的體積單位數之增加比面積單位數之增加爲快。

873 **習　題**：

1）請各位溫習並練習第四册〔367〕節所講有關體積單位的換算，至能澈底了解爲止。

2）試根據〔872a〕圖來決定，如將立方體的邊長加倍，其面積及體積是否亦加倍增大。例如：立方體邊長由 2 增爲 4 時，問其面積增大幾倍，又其體積增大幾倍？（用相當單位表示之）

3）試按思考程序 $a_1 : a_2 = 1 : 2$；$O_1 : O_2 = 6(a_1)^2 : 6(a_2)^2 \cdots$ 等，用計算法證明各位估計之正確性！

4）設立方體之邊長爲 $1m$；問有二倍體積之立方體，其邊長爲若干米？

5）如 a 爲已知，各位可利用〔872a〕圖讀出 O 及 V 的近似值；反之如已知 O 或 V，也可讀出 a 的大小。例如：假定 $O = 150cm^2$ 時，a 等於多少？又假定 $V = 150cm^3$ 時，a 等於多少？

6）試簡單說明在〔872a〕圖中，由已知 V 找到所屬 a 的方法！

7）當 $x = 6$ 時，兩曲線相交於一點，各位可作什麼結論？

8）設已知立方體之邊長爲 $a)$ $2.5cm$，$b)$ $0.5a$。求此二立方體的 d_F, d_K, O 及 V。

9）下列 $a)$ 至 $d)$ 各題中，設已知立方體的 d_F, d_K, O, 或 V 各值之一；試計算其餘數值。

$a)$ $d_F = 14.1cm$；$b)$ $d_K = 13.9m$；　$c)$ $O = 0.54m^2$；
$a)$ $V = 166m^3$。

10）用一根可以讀到半毫米的米突尺去量一個立方體的邊，得 $5.35cm$，再用更精確的尺去量，所得邊長爲 $5.352cm$（或 $5.347cm$）。問由此計算出來的體積，比較初時算出的，大（或小）多少？

11）$1m$ 長的玻璃棒，當溫度升高 $1°C$ 時，伸長 $0.008mm$。邊長 $1m$ 的玻璃立方體，當溫度亦升高 $1°C$，而三個主要方向的膨脹量相等時，其體積究增加多少？

12）有一棒當溫度升高 $1°C$ 時，線膨脹係數爲 α（α 是一個

負分數）；其體積膨脹究有多大？

對下列各題作一簡單說明：一質素的比重 γ，就是該質素單位體積（例如：cm^3）的重量（例如：g）。例：鋁的比重是 $\gamma=2.67g/cm^3$ 意即 $1cm^3$ 重 $2.67g$。若已知由鋁製成的一個物體之體積爲 V，則其重量 G 可以求得，$G=\gamma\cdot V$。例如：令 $V=100cm^3$；$G=\frac{2.67g}{cm^3}\times100cm^3=267g$。

13）用 a）鋁，b）鉛（比重$11.34g/cm^3$），c）銅（比重 $8.93g/cm^3$）製成立方體，若邊長爲 α）$3cm$，β）$0.045m$，問其重量各若干？

14）有一立方體重 $1kg$。若此立方體是 a）鋁做的，b）鉛做的，c）銅做的，其邊長各爲多少？比重見上題。

15）各位能舉起 $1m^3$ 的軟木嗎？（軟木的比重爲 $0.2g/cm^3$）。

16）一個立方體的容器，其內寬爲 $85cm$，欲以盛水。水管每秒供給 0.15 公升的水。問容器盛滿需多少時間？

17）一個立方體形之容器，其內部邊長爲 $3cm$。可盛水銀幾克？（水銀比重爲 $13.6g/cm^3$）。

18）此一容器盛滿 $^3/_4$ 的容積時，可裝水銀 100 克。槽內的邊長應爲多少？

19）兩個鉛製的立方體，一個邊長 $10cm$，另一個邊長 $5cm$；今將二物熔化，鑄成一個立方體。問鑄型之尺寸爲何？（熔鑄的損失略去不計。）

20）立方體的容積爲 100 升，求其邊長。

長 方 體

長方體是以成對而全等的長方形爲界的立體

試觀察一個長方體形的盒子，就說火柴盒罷！蓋和底是第一 874
對全等的長方形。兩個擦火柴的面是第二對全等的長方形，第三對雖不加描述，各位自然知曉。

其次還可由這個例子看出，長方體的邊共有 12 條。每 4 條

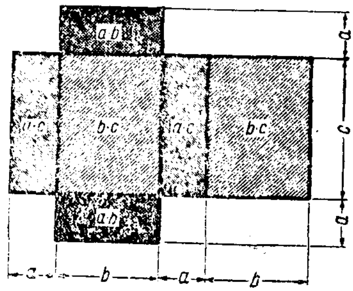
是等長而互相平行。在長方體的每一個角都有三條長度不同的邊相交，這三邊普通以 a, b 及 c 示其區別。

習　題：

長方體各邊之總長究有多大？

展開在平面上的長方體之表面

875　各位一看〔875a〕圖，立卽可以很正確的指出：長方體所有 3×2 側面是展開在繪圖平面上；只要能夠展開，便不難求得各面間的連帶關係。我們稱此展開之圖爲長方體之網。——各位可直接由圖讀出：



875 a

$$O=2ab+2ac+2bc$$
$$=2\times(ab+ac+bc)$$

習　題：

1）何以立方體拿其邊來說，是長方體的一個特殊情形？

2）試由長方體的面積公式導引立方體的面積公式！

3）長方體的每幾個側面是互成平行的？

4）每一側面有幾個側面與其互成垂直？

5）請提出幾個例子，說明長方體是最重要的日常應用形狀之一！

6）長方體的體對角線 d_K（參閱第七册中之〔739〕節 13 號）究有多長？令邊長 $a=1.8dm$，$b=26cm$，$c=0.47m$。（長度單位不要弄錯！）

長方體的體積

876　適用於長方體的公式

$$\boxed{V=a\cdot b\cdot c}$$

是由第二册〔118〕節所講的觀念引伸而來。尙有應注意之點：

1）若量測 a, b, c 所用的單位不同，例如一塊木板的長用 m，寬用 cm，厚用 mm，則計算體積之前，應化為彼此一致的單位。

2）若一個長度單位不能在三個邊長中恰好量得整數，則應選一較小的單位，或一單位的幾分之一為單位，務使量到沒有剩餘，或使剩餘的大小，在所需要的或可能達到的準確度內，小到可以略去不計。（惟理論上是否有些長度不能適用一個共同的單位，雖然我們選擇小至無可再小的單位去量；這要等到以後再行探討。）

3）長方體的容積（其他立體的容積也是如此）不能直接用容積單位去量，而只能用一個單位量其幾個長度，然後計算其容積。但流體的容積却能用容積單位直接量出來，不可一概而論。

4）在計算容積的時候，假如不但應用長度的單位數，好比長方體各邊，而把單位也一齊加入計算的話，則可得相當的容積單位如〔871〕節所述。

例：$a=5cm$，$b=2cm$，$c=10cm$；$V=5cm\times 2cm\times 10cm=100cm\cdot cm\cdot cm=100cm^3$。由已知的體積計算邊長也是如此。例：已知 $V=100cm^3$，$a=5cm$，$b=2cm$；求 c：

$$c=\frac{V}{a\cdot b}=\frac{100cm^3}{5cm\cdot 2cm}=10\frac{cm^3}{cm^2}=10cm$$

5）通用的公式：長方體的容積等於長乘濶乘高。此公式因為包含有"高"，必須長方體置於水平面上，令人留心觀察這種位置之時，才有其意義。

有些長方體形的物體沒有高而有深度，例如一個垂直的坑；還有其他物體的深度都是由水平方向去量的，例如一個壁櫥或書櫃之深淺度。

數學家對於長方體的位置，是不注意其周遭關係的；因此，對於相交於一角的三個邊不稱之為長濶高，或給以其他名稱，而只用三個不同的字母區分之（例如：a, b, c）。

習　題：

1) 試由長方體的體積公式，導引正方體的體積公式！

2) 已知長方體的

$a)$ $a=4.5cm$，$b=3.2cm$，$c=5.8cm$；

$b)$ $a=3.7m$，$b=8.2m$，$c=12.3m$；

$c)$ $a=14.5mm$，$b=8.4mm$，$c=2.3mm$。

求 d_K，O 及 V 之值。

3) 已知：$a=3.5m$，$b=2.08m$，$V=20m^3$；求 c, d_K, O。

4) 已知$a:b:c=2:3:4$，$d_K=10cm$；求 a, b, c, O, V。

5) 有一長方體形的房間 ($a=5.8m$，$b=4.5m$，$c=2.8m$)，其中包含之純空氣究有多少重？（1 升空氣約重 1.29克）

6) 一課室的地面爲 $7.3m\times5.4m$，課室之高 $3.9m$ 。今爲學生 45 人而改建，使每人佔有空間 $4m^3$，問天花板究應加高多少？

7) 有一長方形的石灰坑，其底面應爲 $2\times3m^2$ 。如欲放置熟石灰 $3.5m^3$，問其深度該多少？

8) 生石灰變成熟石灰之後，體積約增加三倍。在底面爲 $1.6m\times2.5m$ 的長方坑內，欲使 3000 升的生石灰變成熟石灰，並令膨脹後之體積與坑的頂邊應有 $25cm$ 之距離，問坑的深度該多少？

9) 一垃圾坑每年清理一次。其長方形的底面爲 $1.5m\times1m$，若平均每星期有 50 升垃圾倒入，求坑的深度！

10) 有許多石塊堆成層（比重 $2.5kg/dm^3$）須裝上汽車運往他處；每層之長爲 $1.75m$，濶 $0.3m$，厚 $15cm$ 。汽車的最大載重量爲 1000 公斤，能載石幾層？

11) 有 $6mm$ 厚的鐵板 1 平方米，其比重爲 $7.8kg/dm^3$，問究有多重？

12) 浮體沉入液體中，至其本身重量與被其所排開的液體重量相等時爲止。玆有長 $4cm$，濶 $3cm$，高 $1cm$的軟木（比重 $0.2 g/cm^3$）沉入純水中，究能沒入多少？

13) 長方橡木塊之長爲 $30cm$，濶爲 $20cm$，高爲 $10cm$；將

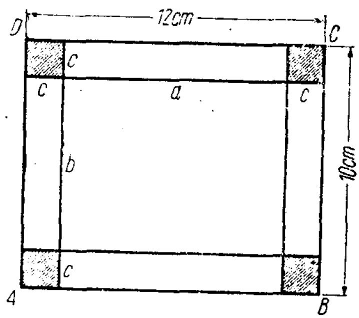
其放入水中，其最大水平面伸出水面 $3cm$，求橡木的比重！

14）做一個開口的長方形木箱，外面長 $60cm$，濶 $30cm$，高 $20cm$；壁厚一律爲 $2cm$。若木板加工時的損耗爲 25%，問做成此箱需要木材多少立方米？

15）一個 $2m$ 深，$3m$ 濶，$4m$ 長的水坑，要增加六立方米的容量，但因地方所限只有加深不能加寬，問必須加深幾米？

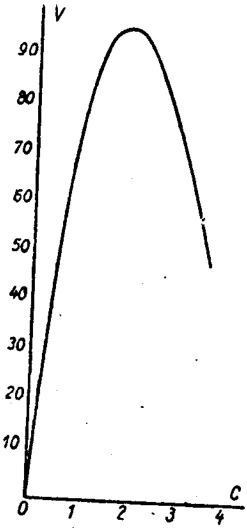
16）下列各種情形究能增加幾倍？a）長方形的面積 F，如其一邊增加一倍時，b）正方形的面積，如其一邊增加一倍時，c）長方體的體積 V_Q，如其一邊增加一倍時，d）立方體的體積 V_W，如其一邊增加一倍時。

17）設〔877a〕圖中的 $ABCD$ 是一塊長方形的厚紙板，$AB=12cm$，$BC=10cm$。切去四角畫有陰影線的正方形，把四邊的小長方形向上彎成垂直，而變爲一個小盒子；盒底的面積爲 $a \cdot b$，盒高爲 c，小盒容積爲 $V=a \cdot b \cdot c$（紙的厚度略去不計）。$ABCD$ 作爲出發長方形，無論如何不予變更，但對 c 邊的大小予以伸縮，看 V 是否有變，並且如何變化。在下面的表中，令 c 取得任何數值，由極限 $c=0$ 開始，此時尚未能形成一個小盒子；然後每次增加十分之一厘米至 $c=5.0$ 厘米。表的空格由各位自行填入。



877 a

由盡量塡寫完備的表，可以看到當 c 變動時，V 也跟着變，但變的非常特別；先增大，後縮小。對 c 取何值時，V 達其最大值？——在〔877b〕圖中，是以圖解說明 c 和 V 的共同變化：直角座標系的 X 軸作 c 軸，Y 軸作 V 軸。X 軸分劃的比例尺選得比 Y 軸大，因爲兩軸如果選用相同的比例尺，圖將失之太高。每一對互有關聯的 c 及 V 值，可在座標面上定一點，順次連結這些點便得一條曲線。此曲線先是漸升，後來漸降；其最



877 b

高點，亦卽 V 的極大值，約在 $x=c=1.8$，$y=V\approx 96.7$ 相交之處。這數字如附上體積單位 cm^3，就是本題所求的最大值。

c	a $=12cm-2c$	b $=10cm-2c$	V $=a\cdot b\cdot c$
0.0cm	12cm	10cm	0.0cm^3
0.1cm	11.8cm	9.8cm	11.6cm^3
0.2cm	11.6cm	9.6cm	22.3cm^3
:	:	:	:
0.9cm	10.2cm	8.2cm	75.3cm^3
1.0cm	10.0cm	8.0cm	80.0cm^3
:	:	:	:
2.0cm	8.0cm	6.0cm	96.0cm^3
:	:	:	:
5.0cm	2.0cm	0.0cm	0.0cm^3

附註：曲線在 $c>3$ 之後變成如何形狀，當然也可繼續探討，但對本題沒有意義。

這種尋找最大值的方法頗爲費時，稍後將有另一迅速而準確的方法可供參考（參閱第十七册中之〔189〕節）。

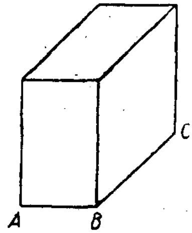
長方體的描繪

前 言：

878 一個眞實的立體，例如一個用木頭切成的長方體，是一個三因次的東西（參閱第一册〔76〕節）。我們可以仿造其立體的形狀，例如用黏土做成一個"模型"；或用厚紙板代替各面，然後製成六面體的模型；或用小棒或細鐵線代替各邊，構成一個邊的模型，象徵長方體。

如此仿造可使各角，各邊，以及各面間的空間關係，如眞實的物體一樣保留不變，亦卽其數目，相互位置與大小，都和實際相同；縱加放大或縮小，其大小比例依然是個常數。

要想在一個繪圖平面上仿造立體的形狀，那是不可能的，因爲平面祇有二因次。在平面上祇能描繪立體的形狀，但不能保留角邊等所有立體的關係。〔878a〕圖是一個長方體的圖形，在此



878 a

不能看見它的 8 個角，只見 7 個，因爲有一個角是被遮住了。尤其重要的是 ABC角，實際是 $90°$，但在圖上看來則比 $90°$ 大得多。

眞實的物體和它的圖畫是有顯著的區別的。

一個小孩在他的圖畫書上看見一隻狗的圖畫，他不說"這是一隻狗的圖畫"，而說"這是一隻狗"。由此可見在他的語言裏，是不分描繪下來的物體（卽三因次的狗）和這物體的二因次圖畫的。

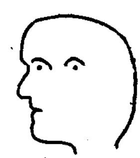
但數學家不僅要弄明白物體和物體的圖畫是兩回事，而且在語言上對此區別也要能够很清楚的說出來。譬如〔878a〕圖，在他看來不是一個長方體，而是長方體的圖；ABC 角不是此長方體的一個角，而是長方體圖內的一個角，餘類推。在語言上老要說明這個區別，實在非常麻煩，所以他一眼看見〔878a〕圖內的長方體，也許很快會說，那是長方體，而不說那是長方體的圖。

有好些場合——以後還要提到的——數學家甚至在名稱上將長方體的角點和這角點的圖加以區別：例如長方體一個角點叫做 A，而描繪下來的圖叫做 A_1。奉勸各位，對上面這一段序言式的說明，應該切實留心而反復地加以研讀。誰弄不明白物體與其圖畫的區別，誰就對於研究這種畫法的

投影幾何學（亦稱畫法幾何學）

不會十分了解。

有很多不同的方式，可將一物體用二因次的圖畫表示出來。一個約六歲大的小孩畫一個人頭的側面，加兩個眼睛，如〔878b〕圖所示，因爲他知道人是有兩個眼睛的。他不是畫他所看見的，而是畫他所知道的。各位看到這種幼稚的畫法也許要發笑；但不久各位也要一樣作成那種與人面貌不甚相符的兒戲圖畫。



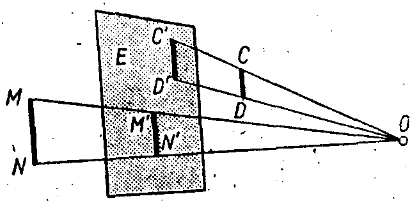
878 b

一個建築師把要建造的房屋圖拿給屋主看，若屋主不是內行，他就只能看看透視圖，因爲透視圖與他所想像的房屋比較相近

，和上面的長方體看法一樣；但對建造房屋的工匠來說，則以房屋的平面圖，正面圖，剖面圖，側面圖等更較重要。這些圖樣給人的印象雖不如透視圖之逼眞；但建築師已將房屋形狀和大小的主要觀念很清楚的表達在這些圖樣中了。

中心投影或稱透視投影（Zentralprojektion）

879 爲了明瞭這種畫法的主要內容，我們暫且由一個簡單的試驗出發：請各位設想站在房間裏的一個玻璃窗 E 前面，玻璃上雖沾有水汽，但仍有幾分透明。各位閉上一隻眼睛，先看窗外好比一棟房子。爲簡便計，只以垂直邊 MN 代表那棟房子，如〔879a〕圖所示。然後如用一個指頭，在窗的玻璃上沿着 MN 方向劃一下，那便是在 E 平面上畫了 MN 線段的一個圖；亦卽將 MN 投影於 E。此投影是以 $M'N'$ 表示之。



879 a

MN 是被描繪，亦卽**被投影的線段**；E 是畫面，或稱**投影面**；$M'N'$ 是所造之像，亦卽 MN 之**投影**；眼睛 O 是**投影中心**，投射線 MM' 及 NN' 卽在此相遇。各位對這些名詞都應該好好記牢！

從眼睛 O 看去，M 與 M'，以及 N 與 N' 是彼此重叠的；那末線段 MN 與其投影 $M'N'$ 在人眼看來也好像叠合在一起。

我們對於 M，N 二點或線段 MN 所做之投影，各位亦可引用於房屋的其他所有點及線段上去。懇切的奉勸各位，依此簡單方法試用指頭在玻璃窗上劃幾劃，便可描繪整棟房屋的圖形。準確一點的描繪，則圖的形狀與眼睛所見之印象完全符合。因此，這種中心投影與用人眼對物體觀察所得的印象十分相似。

要投影的物體也可放在投影面之前，亦卽置於眼睛與投影面之間。在〔879a〕圖中設 CD 爲一根小棒，被各位用手握住置於 O 與 E 的當中。各位仍然可在窗上沿着所見 CD 的像用手指劃一下，則得 $C'D'$；後者便是 CD 的造像或 CD 的投影。

880 現在請利用放在各位面前的本書紙面，代替〔879a〕圖的玻璃窗 E 作爲投影面。各位如站遠一點來看，可將在其前或後的物體，投影於其上。

假設這些物體是一個長方體 Q_1， 一個正方體 K, 和一個長方體 Q_2， 在〔880a〕圖中是以 Q_1'，K'，Q_2' 表示其投影。各位在圖上所看見的，嚴格說來不是三個幾何立體，而是它們的造像。

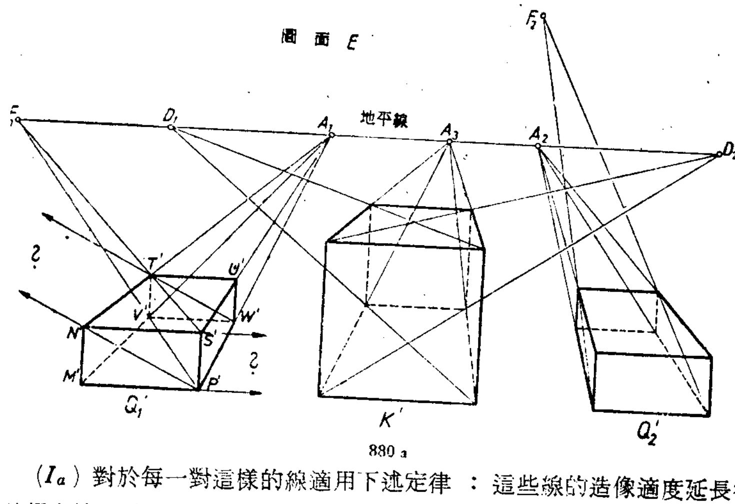
其次在此圖中當然看不見各位的眼睛，即投影中心；但根據圖形可以推測，當造 Q_1之像時，各位的眼睛O 不在 Q_1 的正前方，却稍爲偏右（否則看不到長方體的右側面），同時也稍爲向上（否則看不到長方體的頂面）。不用數學上的證明，我們告訴各位，當各位造

$$\left.\begin{matrix} Q_1 \\ K \\ Q_2 \end{matrix}\right\} \text{之像時，各位的眼睛是在} \left\{\begin{matrix} A_1 \\ A_3 \\ A_2 \end{matrix}\right. \text{之前，亦即射線}$$

$$\left\{\begin{matrix} OA_1 \\ OA_3 \\ OA_2 \end{matrix}\right. \text{垂直於 } E \text{ 平面。}$$

A_1, A_2, A_3 叫做**視點** (Augenpunkt＝Gesichtspunkt)。通過一個視點的水平線叫做觀察者的**地平線** (Horizont)。

對於中心透視造像可作爲準則的許多定律中，我們根據〔880a〕圖只列出下面最重要的幾條；這些定律都與**在此所描繪各物體的平行邊及對角線有關**。



880 a

（I_a）對於每一對這樣的線適用下述定律：這些線的造像適度延長後，必相交於一點。這點叫做**沒影點** (Fluchtpunkt)。

試看〔880a〕圖中的沒影點 F_1, D_1, A_1, A_3, A_2, F_2, 及 D_2；各位如