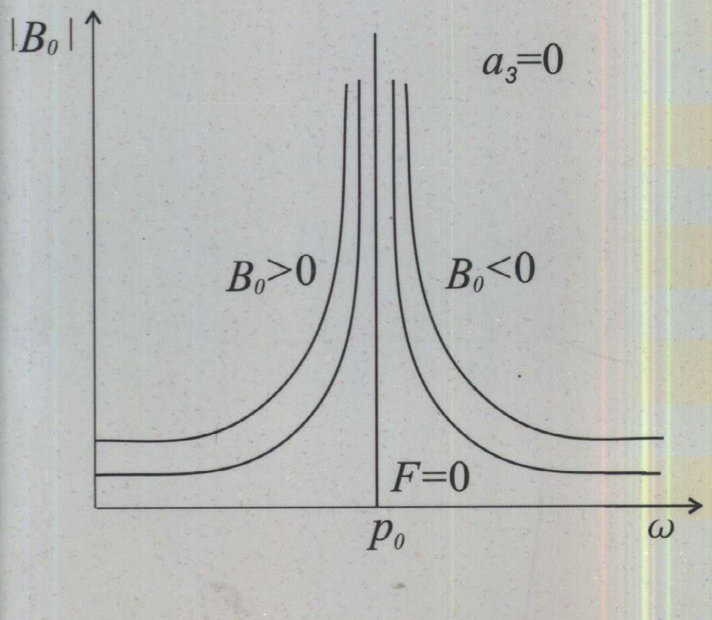
高等院校“九五”部委级重点教材

高等结构动力学

ADVANCED STRUCTURAL DYNAMICS

唐友刚　编著



天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

高等院校"九五"部委级重点教材

高等结构动力学

ADVANCED STRUCTURAL DYNAMICS

唐友刚 编著

天津大学出版社

内 容 提 要

本书内容包括线性振动、非线性振动以及工程中的若干振动问题三部分。第一部分介绍线性系统的单自由度、多自由度、分布参数系统的振动理论以及大型复杂结构系统的数值方法；第二部分介绍求非线性系统近似解的解析方法，包括小参数法、KBM法、多尺度法等，同时介绍了参数激励系统和多自由度系统振动响应的分析方法，还介绍了非线性系统的数值解法；第三部分，介绍大开口船弯扭耦合振动、大型储液容器液固耦合振动及张力腿平台的涡激振动响应分析方法。本书在深入阐明动力学原理和方法的基础上，介绍了本学科近几年来的研究进展。

本书可作为船舶与海洋、港口海岸及近海工程、以及水利、土木工程等专业研究生和高年级本科生的教学用书，还可作为科技人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等结构动力学/唐友刚编著.—天津：天津大学出版社，2000.9

高等院校"九五"部委级重点教材

ISBN 7-5618-1649-9

Ⅰ.高… Ⅱ.唐… Ⅲ.结构动力学－高等学校－教材 Ⅳ.O342

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第061831号

出版发行	天津大学出版社
出 版 人	杨风和
地　　址	天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
网　　址	www.tdcbs.com
电　　话	营销部:022-27403647　邮购部:022-27402742
印　　刷	天津大学印刷厂
经　　销	全国各地新华书店
开　　本	185mm×260mm
印　　张	15
字　　数	403千
版　　次	2002年9月第1版
印　　次	2002年9月第1次
印　　数	1—2 000
定　　价	20.00元

前　言

高等结构动力学是研究结构体系的动力特性及其在动力作用下动力响应分析方法的一门技术学科。该学科的根本目的在于为改善工程结构系统在动力环境中的安全和可靠性提供坚实的理论基础。本书介绍了结构线性和非线性振动的理论和方法以及工程中的若干应用专题。本书理论和方法对于涉及动力环境的所有技术学科是普遍适用的。

多年以来,董艳秋教授和作者为高年级本科生和研究生讲授结构动力学课程,并为研究生开设非线性振动分析基础选修课,由董艳秋教授主编了《结构动力分析基础》校内教材。承担多项国家自然科学基金和部委项目,在多年教学工作和科学研究的基础上,编写了本书。

本书内容除绪论外共分三篇。

绪论中介绍了结构动力学的发展概况、动力计算的特点、动力学问题的分类以及建立动力学问题方程的基本方法。

第一篇共4章,介绍结构线性振动分析的基本理论和分析方法,包括单自由度系统、多自由度系统、分布参数系统振动以及结构动力分析的实用方法包括有限单元方法、子空间迭代法和动态子结构方法等。

第二篇共3章,介绍结构非线性振动分析的理论和方法。第6章介绍非线性系统的解析分析方法,包括小参数法、KMB方法、平均法以及多尺度方法,考虑到结构非线性分析中广泛使用分段线性系统模型,此处介绍了分段线性系统的分析方法;第7章介绍多自由度和参数激励振动系统,重点介绍多自由度系统的内共振和组合共振,参数激励振动系统的稳定分析和稳定域的确定,参数激励和强迫激励下结构物的动力响应特征及分析方法,通过大量算例,阐明了非线性系统中的超谐共振、能量饱和、渗透及响应跳跃现象;第8章介绍多自由度非线性振动系统的数值解法,包括差分法、龙格-库塔方法、纽马克β(Newmark β)方法和威尔逊θ(Wilson θ)方法等。

第三篇共3章。本部分综合应用结构振动和流固耦合理论,以及非线性振动理论,介绍若干振动问题的分析方法。第9章介绍应用迁移矩阵法计算大开口船弯扭耦合振动,包括固有频率和动力响应的计算;第10章介绍基于薄壁结构理论和流体力学理论计算大型储液容器动力特性的液固耦合振动理论;第11章介绍应用非线性振动理论,计算张力腿平台涡激非线性振动响应问题。

本书是在全国船舶与海洋工程教材委员会指导下编写的。天津大学董艳秋教授对本书的编写提出了具体的指导意见,各院校有关专家认真审查了本书的编写大纲,后经船舶与海洋工程教材委员会审定与批准,被确定为高等院校“九五”部委级重点规划教材。

本书编写过程中,参阅了同行专家许多宝贵的资料和研究成果,在此谨向他们致以衷心的感谢。

本书主审董艳秋教授仔细地审阅了全部手稿,并提出了十分有益的修改意见。本书出版过程中,得到了天津大学研究生院和天津大学出版社的热忱支持,也得到了作者所在单位的帮助和鼓励。在本书付梓出版之际,作者对支持本书出版的所有专家和单位表示诚挚的敬意和衷心的感谢。此外,还要感谢我的研究生鲁晓光和马网扣,他们打印了本书稿,并核算了书中的例题。

由于作者水平所限,本书的错误和不当之处在所难免,衷心欢迎读者提出宝贵的意见。

作者

2002年3月于天津大学

目 录

第二篇　非线性振动

第三篇　工程中的若干振动问题

第1章 绪 论

1.1 结构动力学发展简介

结构动力学是研究结构体系的动力特性,及其在动力荷载作用下动力响应分析原理和方法的一门技术学科。该学科的根本目的在于为改善工程结构系统在动力环境中的安全和可靠性提供坚实的理论基础。根据结构的功能不同和所处环境的不同,工程结构的振动存在三种情况:线性振动、非线性振动和随机振动。相应地可以将结构动力学划分为线性振动理论、非线性振动理论和随机振动理论。本书仅介绍确定性系统的线性振动和非线性振动理论。

拉格朗日(Lagrange)在18世纪出版了名著《分析力学》,此书奠定了线性系统动力分析的基础。由于18世纪科学技术的不断创新,各种动力机械开始应用于不同的工程结构,促进了结构动力学理论和方法的不断进步。自从蒸汽机应用于船舶推进系统以后,使得船舶向大型和高速化发展,引起船舶振动问题日益突出。早在1840年,希拉克(Schliock)就发表了第一篇关于船舶振动的比较系统的论文。1892年,A. F. Yerrow 提出了减小蒸汽机转动不平衡力引起的船体振动的方法。20世纪60年代以来,随着以有限元为核心的计算理论和技术的发展以及电子计算机的问世,产生了计算结构动力学,这使得对于大型复杂结构的动力分析成为可能。如今,人们可以成功地进行具有成千上万个自由度的大型复杂结构体系的动力分析。在船舶与海洋工程领域,流体激起的振动响应是研究的重要内容,目前已发展了流固耦合问题有限元法,用于计算波浪激起的海洋结构物的动力响应。随着船舶大型化的发展,波浪激起的船体振动日益引起人们的关注,1979年,英国学者R.E.毕肖普(R. E. D. Bishop)提出了船舶水弹性理论,这是基于模态分析技术解决流固耦合问题的解析方法,该方法已经成为计算船舶波激振动和海上超大浮式结构系统振动响应的有效手段。

在结构动力响应计算中,人们已经注意到结构系统自身的非线性特性和非线性干扰作用下结构的非线性振动响应。例如,在航天航空工程中机翼的振颤,船舶在海浪中的大幅运动和系泊系统中系泊力的问题,地震作用下地基与地面建筑物之间的相互作用问题等都属于非线性振动问题。非线性振动系统的主要特点是:系统的恢复力是系统空间位置的非线性函数,而阻尼力是系统运动或振动速度的非线性函数。研究非线性系统的任务是确定系统振动的幅值、相位和频率,分析系统周期振动的条件及其稳定性。只有极少数非线性振动方程可以得到精确解析解,大多数方程仅能得到其近似解。因此,在非线性振动理论发展的进程中,非线性方程求解方法的研究占有重要地位。1892年,庞加莱(Poincare)研究天体运动时提出了摄动法,也称为小参数法。为了消除周期近似解中的永年项,出现了L-P法(Lindstedt-Poincaré)。求解近似解的第二个方法是1926年范德波(Van de pol)提出的渐进法。前苏联学者克雷洛夫和巴戈留包夫系统研究了范德波的渐进法,先后提出了平均法和改进的渐进法以及可以求出任意近似解的三级数法,即KBM方法。第三个方法是多尺度方法,出现于20世纪50年代,该方法适用于求解周期和非周期振动系统近似解。参数激励振动系统是非线性振动研究进程中的重要发现,第一个研究参数激励振动的是Faraday1938年的实验。参数激励研究表明,当弦或直梁受到二倍于横向固有频率的纵向激励时,可以引起直梁的横向振动,这些问题可以归

结为马蒂厄(Mathieu)方程。目前的研究工作表明,工程结构系统中的很多振动问题属于参数激励问题。例如,大型容器地震作用下液体与容器之间的相互作用问题、船舶在纵浪上的横摇运动以及受轴向激励作用梁的弯曲振动等均属于参数激励问题。结构非线性的研究表明,结构体系的非线性振动,将出现更为复杂的动力学现象,包括振动响应跳跃、振动能量的饱和与渗透、组合共振及异频振动等。自20世纪60年代发现非线性振动系统中存在混沌以来,以分叉理论为核心的现代非线性动力学理论得到了蓬勃发展。研究表明,在船舶运动、地面运载工具、输液管道及板—梁组合结构等振动过程中,存在复杂的分叉和混沌行为。非线性振动系统所表现出的复杂动力学特性表明,非线性振动系统的失稳和破坏更具有突然性和难以预测性,其导致的工程破坏后果更为严重。

只有少数低维非线性系统可以得到近似解析解。对于高维非线性系统,多采用数值计算方法,例如,采用龙格-库塔方法、威尔逊 θ(Wilson θ)法和纽马克 β(Newmark β)法等。

1.2 结构动力问题的特点

结构动力学的内容之一是研究结构的动力响应。所谓动力响应是指结构在广义动力荷载作用下的结构位移和内力响应,而广义动力荷载包括动力激励和动位移激励。动力荷载指荷载的大小和方向(有时包括作用位置)随时间而变化的荷载。在动力荷载的作用下,结构的位移和内力随时间而不断变化,并且结构产生振动速度和加速度。

结构动力问题与结构静力问题比较有三个不同点。第一,由于结构动力问题中的荷载随时间变化,显然动力问题不像静力问题那样具有单一的解,而必须建立相应于响应历程中的全部时间的一系列解答。第二,如果梁仅承受静力荷载,则它的内力和位移仅仅依赖于给定的外荷载,其平衡关系是外力和恢复力之间的平衡。但是,如果结构作用动力荷载,则梁所产生的位移和加速度有关,这些加速度产生与其反向的惯性力,于是梁的恢复力不仅要平衡外加动力荷载,还要平衡加速度引起的惯性力。第三,动力问题中结构响应的大小,与荷载的大小和荷载随时间的变化过程有关,如果荷载的干扰频率接近结构的固有频率,尽管荷载的幅值不大,也会引起结构很大的振动响应即共振。

工程结构是否作为振动系统分析,要看荷载是否激起结构较大的振动加速度。如果结构振动的加速度很小,则其惯性力仅仅是结构弹性力所要平衡的全部荷载中的较小部分,此时该动力荷载的作用与静力荷载的作用并没有显著差别,可以作为静力处理。一般而言,如果结构系统的固有频率和荷载干扰频率相差很大,则激起的结构的振动将会十分缓慢,其引起的惯性力可以忽略不计。一种随时间变化的荷载是否要作为动力荷载处理,需要根据结构系统自身的特征和荷载随时间的变化规律综合考虑。

1.3 结构动力问题的分类

根据结构自身的材料特性、构造特点及荷载类型,可以对结构动力问题进行分类。

工程结构材料的物理特性一般为线性的,即应力—应变关系服从胡克定律,但是有些结构的材料如橡胶构件,其物理特性为非线性的,即其应力—应变关系不满足胡克定律。此外由线性材料制作的构件也可以出现构造非线性,如用于减振的塔式弹簧,其变形与外力的关系为非线性关系的。在工程结构中,某些系统的恢复力和阻尼分别与结构振动位移和振动速度有关,则此种系统也属于非线性系统,如舰船在波浪中的运动、结构大挠度振动问题等。如果结构系

统自身是非线性的，则不管荷载的形式如何，其振动响应均表现为非线性振动。但是，在工程结构中，大量的结构系统可能为线性系统，其振动的响应特性，将取决于荷载随时间的变化规律。

一般可以将动力荷载分为确定性荷载和非确定性荷载。

确定性荷载的变化规律是完全确定的，无论是周期的还是非周期的，它们均可以用确定性的函数来表达。常见的确定性荷载有：简谐荷载、周期荷载、冲击荷载和持续长时间的非周期荷载。

非确定性荷载又称为随机荷载，它随时间的变化规律是预先不可以确定的，而是一种随机过程，例如，地震荷载、风荷载和作用在船舶与海洋结构物上的波浪力等。随机过程虽然不可以表示为时间的确定性函数，但是它们受统计规律的制约，需要用概率统计的方法来研究随机荷载作用下结构振动。

此外，有些荷载具有明显的非线性性质，例如，作用在海洋结构物上的波浪力是非线性的，非线性的荷载将激起机构系统的非线性振动。

综上所述，可以将结构的动力问题划分为：

①线性确定性振动，即结构自身是线性的并且承受线性荷载的作用；

②线性随机振动，即结构自身为线性的，荷载为随机的；

③非线性确定振动，即结构系统自身性质或者荷载为非线性的；

④非线性随机振动，即结构系统自身性质为非线性的而荷载为随机的，或者为非线性随机荷载。

1.4 结构系统的动力自由度及其离散

动力问题的特点之一是要考虑结构体系的惯性力，所以在确定计算简图时，必须明确系统的质量分布及其可能发生的位移，以便全面合理地确定系统的惯性力。系统振动时，确定任一时刻全部质量位移所需要的独立的几何参变量的数目，称为结构系统的动力自由度。要准确地描述系统的惯性力，合理地选择动力自由度是十分重要的。

一切结构系统都具有分布质量，因而都是无限自由度系统。但是除了某些简单的结构可以作为无限自由度处理以外，大多数的工程结构作为无限自由度计算将是极其困难的。在结构动力计算时，为了避免过于繁杂和数学上的困难，一般将结构处理为有限自由度系统，这一过程称为结构系统的离散。以下介绍几种常用的离散方法。

1.4.1 集中质量法

图 1-1 简支梁上有三个较重的质量，其质量远大于梁结构自身的质量。若将梁的质量也集中到这些质量块上，则转化为有若干个质量块的有限自由度系统。对于在平面内振动的质量块，存在三个自由度即两个线位移和一个转角，相应地，每个质量块便有两个惯性力和一个惯性转矩。如果质量块的尺寸相对于梁的长度是较小的，则可以忽略质量块的尺寸效应，即不计惯性转矩，因而转角也就可以不作为动力自由度。如果忽略质量的水平位移，则图 1-1 中的简支梁系统共有三个竖向位移自由度。

某些情况下梁上没有较重的质量块，只存在分布质量$\overline{m}(x)$，也可以将其近似处理为有限自由度系统。例如，图 1-2 所示的非均匀断面梁，分为三段，每段的质量分布分别为：l_1 段为 $\overline{m}_1$，l_2 段为 $\overline{m}_2$，l_3 段为 $\overline{m}_3$，不计质量沿梁轴向的位移，可以将其处理为仅有竖向位移的两个

自由度系统。离散方法是将每段总质量的一半分别集中于各该段的两端。离散结果是：$m_1=\frac{1}{2}(\bar{m}_1 l_1+\bar{m}_2 l_2)$，$m_2=\frac{1}{2}(\bar{m}_2 l_2+\bar{m}_3 l_3)$，见图 1-2。如果想提高计算精度，可以增加分段的个数，简化后系统的自由度亦相应增加。

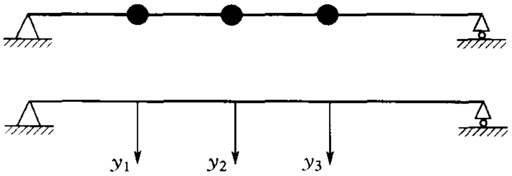


图 1-1

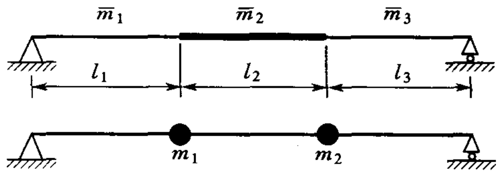


图 1-2

1.4.2 广义位移法

对于梁上仅有分布质量的系统，为了提高计算精度，可以采用广义位移法。以图 1-2 中的简支梁为例，设在初始时刻梁的挠曲线为 $y(x,t_0)$，将其展开为三角级数

$$y(x,t_0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t_0)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{1-1}$$

此处 l 为梁的长度。若给出系数 $a_n(t_0)$，则初始的全部质点的位置随之确定。一般来说，用有限个低频正弦波叠加来表达挠曲线的形状，可以具有足够的精度。如果取前三项，即

$$y(x,t_0)=a_1(t_0)\sin\frac{\pi x}{l}+a_2(t_0)\sin\frac{2\pi x}{l}+a_3(t_0)\sin\frac{3\pi x}{l} \tag{1-2}$$

通过式(1-2)，将无限自由度系统转化为三个自由度系统。此处，$a_1(t_0)$，$a_2(t_0)$，$a_3(t_0)$是确定梁的形状即全部质点位置的三个相互独立的坐标。

1.4.3 有限单元法

与静力问题中的有限单元法一样，结构动力问题也可以采用有限单元法进行离散。有限单元法综合了集中质量法和广义坐标法的特点。用有限单元法分析动力问题，是以结构结点的位移表达结构上各个点的位移状态。首先将整体结构划分为一系列的单元，单元间以结点相连接，结点的位移便是决定结构系统中全部质点位置的独立坐标。

在采用有限单元法离散时，不在整个梁的范围内取有限个函数项的和作为全梁某时刻的挠曲线，而是在各个单元范围内假设两结点之间的挠曲线，该挠曲线称为位移函数或者插值函数，其确定了单元位移的形状，它的表达式包含若干个参数。位移函数在单元内部保持光滑连续，并且在单元两端满足支承和变形连续条件。根据这些条件，可以将位移函数中的参数通过结点位移来表达。因此，整个结构系统便转化为以结点位移为未知数的有限自由度系统了。

以上三种方法中，有的基本未知量是质点(结点)的位移，有明显的几何意义，如图 1-1 中的 y_1、y_2 和 y_3，称其为几何坐标。有的基本未知量没有明显的几何意义，如 $a_1(t_0)$，$a_2(t_0)$，$a_3(t_0)$，但是，只要求出这些参数，则系统全部质点的空间位置即可确定。因此，对能确定振动系统中全部质点(结点)几何位置的相互独立的参数，无论其量纲为何，常称其为广义坐标。

1.5 振动能量耗散与阻尼力

受到突然激励产生运动的船舶会逐渐静止下来，强烈的地震过后剧烈摇晃的建筑物会趋于静止，这些都是因为阻尼的作用消耗了系统振动的能量，或者说振动过程中具有能量的耗

散。这种消耗振动的能量并使振动衰减的因素,称为阻尼力。如果系统的振动被激起后进入自由振动状态,则由于阻尼的作用振动将会衰减直至系统恢复到静止状态。引起振动能量耗散的因素很多,一般可以划分为内阻尼和外阻尼。内阻尼主要指和材料应变有关的阻尼,其由于材料的非弹性性质或者非弹性变形所引起。而外阻尼可能包含更多的复杂因素,如周围介质对振动的阻力和摩擦阻尼等。例如,船舶或海洋结构物在水中振动时,受到流体的摩擦作用消耗振动的能量,埋入土中的结构振动时与土壤摩擦耗散振动能量,此外结构的连接结点和支座与结构之间的摩擦也消耗振动的能量,这些都是外阻尼的成因。

对于内阻尼,一般假设与应变的速率成正比,而对于外阻尼,常常同时存在着几种阻尼因素,要想找出一种可以完善反映各种结构中阻尼作用的理论是不现实的,所以目前一般采用相当简化的阻尼模型。为了反映振动过程中能量的耗散,在建立振动方程时,引入造成能量消耗的阻尼力,目前多采用粘滞阻尼理论表达阻尼力。在线性振动理论中,总是把阻尼简化为粘滞阻尼,用 $R=-c\dot{x}$ 表示阻尼力。式中:R 为阻尼力,$\dot{x}$ 为振动速度,c 为粘阻系数。c 与介质的粘性、振动物体的形状大小及表面情况有关,通常用实验方法测定。实际存在的阻尼是复杂的,外阻尼中一般都存在非线性。如流体介质阻尼,当速度相当大时,阻尼不再与速度成正比。此外,阻尼还与系统运动幅值的大小有关,如船舶微幅运动时,用横摇角速度的一次幂表达阻尼就够了,但是当大幅横摇运动时,需要用包括横摇角速度的五次幂在内的多项式表达横摇阻尼力矩。

对非线性阻尼系统,常按系统在一个周期内能量耗散与理想的粘性阻尼系统在一个周期内能量消耗相等的条件,推出"等效粘性阻尼系统",仍按线性理论求解。

若考虑系统的阻尼,则系统称为"非保守系统"。反之,忽略阻尼影响不计振动能量的耗散,则系统称为"理想保守系统"。

1.6 建立运动方程的方法综述

结构动力分析的目的是求出动荷载作用下结构的动位移和动内力,并研究它们随时间的响应历程。在大多数情况下,应用包含有限个自由度的近似分析方法,就足够精确了。这样,问题就变为求出这些选定位移分量的时间历程。描述结构系统动力位移的数学表达式称为结构的运动方程,而这些运动方程的解就提供了所求的位移历程。

动力体系的运动方程的建立,也许是整个分析过程中最重要(有时是最困难的)的方面。建立振动系统的运动方程有多种方法,但不管采用何种方法建立运动方程,其结果都是一致的。本节综述建立运动方程的原理和方法,使读者对建立运动方程的原理和方法有一个初步的了解。

1.6.1 利用达朗贝尔(d'Alembert)原理的直接平衡法

任何动力体系的运动方程都可代表牛顿的第二运动定律,即任何质量 m 的动量变化率等于作用在这个质量上的力。这个关系在数学上可用微分方程来表达,即

$$P(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\,\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right) \tag{1-3}$$

式中:$P(t)$为作用力;$y(t)$为质量 m 的位置。对于大多数的结构动力学问题,可以认为质量是不随时间变化的,这时方程(1-3)可改写为

$$P(t)=m\,\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}=m\ddot{y}(t) \tag{1-4}$$

其中圆点表示对时间求导数。式(1-4)也可改写为

$$P(t) - m\ddot{y}(t) = 0 \tag{1-5}$$

此时第二项 $m\ddot{y}$ 被称为抵抗质量加速度的惯性力。

质量所产生的惯性力,与它的加速度成正比,但方向相反,这个概念称做达朗贝尔原理。由于它可以把运动方程表示为动力平衡方程,可以认为,力 $P(t)$包括许多种作用于质量上的力,包括抵抗位移的弹性约束力、抵抗速度的粘滞力以及外部干扰力。因此,如果引入抵抗加速度的惯性力,则运动方程表示作用于质量上所有力的平衡关系。在许多简单问题中,最直接而且方便地建立运动方程的方法就是采用这种直接平衡的方法。

1.6.2 虚位移原理建立振动方程

如果结构体系相当复杂,而且包含许多彼此联系的质量点或有限尺寸的质量块,则直接写出作用于体系上所有力的平衡方程可能是困难的。但是在某些情况下,结构系统上的力可以方便地用位移自由度来表示,而它们的平衡规律则可能是不清楚的。此时,虚位移原理就可用来代替平衡规律建立方程。

虚位移原理可表述如下:如果一个平衡体系在一组力的作用下发生虚位移,即体系约束所允许的任何微小位移,则这些力所作的总功将等于零。按这个原理,在虚位移上所作的总功为零,是和作用于系统上的力的平衡是等价的。因此,在建立振动系统的运动方程时,首先对于质量施加包括惯性力在内的所有的力,然后引入相应于每个自由度的虚位移,并使所作的虚功等于零,这样即可以得到运动方程。此种方法的优点是:虚功为标量,可以按照代数规则计算,从而避免复杂的矢量计算。

1.6.3 哈密顿(Hamilton)原理建立振动方程

采用哈密顿原理建立振动方程,也可以避免矢量的运算。哈密顿原理可以表达为

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V)\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{\mathrm{nc}}\mathrm{d}t = 0 \tag{1-6}$$

式中:T 为体系的动能;V 为体系的位能,包括应变能及任何保守外力的势能;W_{nc}为作用于体系上的非保守力(包括阻尼力及任何外荷载)所作的功;δ 为在指定时间内所取的变分。

哈密顿原理说明:在任何时间区间 t_1 到 t_2 内,动能和位能的变分加上所考虑的非保守力所做的功的变分必须等于零。这个原理的应用直接导出任何给定系统的运动方程。这个方法和虚功原理方法的区别在于:在这个方法中,不明显使用惯性力和弹性力,而分别被动能和位能的变分项所代替。因此,这种建立运动方程的方法的优点是,它只和纯粹的标量即能量有关,而在虚功分析中,被用来计算功的力和位移却都是矢量。需要指出的是,根据哈密顿原理,可以导出拉格朗日第二类方程。

上述建立振动方程的各种方法,将在后面章节中更为详细地介绍,并通过实例,说明利用本节方法建立振动方程的完整过程。

第一篇 线性振动

第2章 单自由度系统振动

如果振动系统任意时刻的空间位置只需要一个独立参数来表达，则称为单自由度系统。本章介绍单自由度系统运动方程的建立，以及自由振动的特点和动力响应的计算问题。

2.1 运动方程的建立

此处分别应用基于达朗贝尔原理的直接平衡法、虚位移原理和哈密顿原理建立振动微分方程。

2.1.1 直接平衡法

承受动力荷载作用的任何单自由度系统均可以由图2-1所示的模型来代表。图2-1(a)中，m 为质量块的质量(kg)，k 为弹簧的刚度(N/m)，c 为粘滞阻尼系数(N·s/m)，$P(t)$为干扰力(N)。将坐标原点设在质量块的静平衡位置处，坐标 y 即为相对于静平衡位置产生的质量块的动位移。在任意瞬时取质量块的隔离体，如图2-1(b)所示，作用于质量块上的力有下列四种：

①弹性恢复力，$f_S = ky$，与位移的方向相反；

②阻尼力，$f_D = c\dot{y}$，与速度的方向相反；

③惯性力，$f_I = m\ddot{y}$，与加速度的方向相反；

④干扰力，$P(t)$。

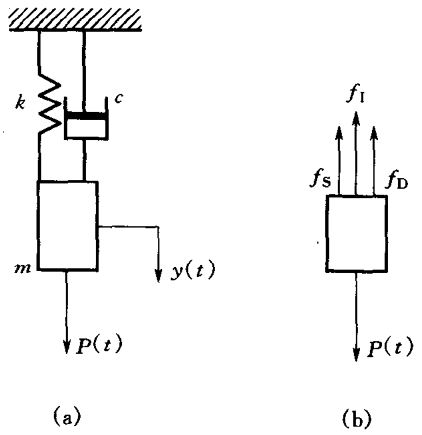


图2-1

根据竖向力的动平衡条件即直接平衡法，得

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = P(t) \tag{2-1}$$

在振动的任意时刻，这四种力都保持着平衡，只是各个力所占的比例不同而已。由方程(2-1)可知，相对于动力系统的静力平衡位置所建立的运动方程是不受重力影响的。换言之，此类情况可以不考虑重力影响建立方程。由于这个原因，建立方程时，位移都以静力平衡位置作为坐标原点，由此方程仅能得到系统的动位移，而总的位移应该是动力位移响应和静力位移值的叠加。

2.1.2 虚位移原理

以图2-1所示的结构系统说明如何应用虚位移原理建立方程。令质量 m 发生虚位移δy，则作用在质量 m 上的四个力所作的总虚功应该等于零，即

$$-f_I\delta y - f_D\delta y - f_S\delta y + P(t)\delta y = 0$$

式中的负号是因为力的方向和虚位移的方向相反。因为上式中的虚位移不等于零，很容易得到式(2-1)所示的振动方程。

在结构系统中某些结构具有这样的特点:弹性变形完全限定于局部的弹簧元件中发生,而结构本身没有弹性变形,称此为刚体集合系统。现在介绍采用虚位移原理建立这类振动系统的运动方程。

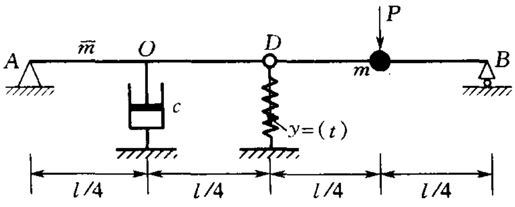


图 2-2

例 2.1 图 2-2 所示的系统由两根刚性杆组成,两根杆用铰连接在一起。在 O 点和 D 分别受到阻尼器和弹簧的约束,AD 杆的单位长度的质量 $\bar{m}$ 是均匀的,在无重刚杆 DB 中点有一个质量 m,并且 m 上作用一个集中力 $P(t)$,现用虚位移原理建立该系统的振动方程。

解 因为两个杆都是刚性的,所以整个系统仅一个自由度,故其动力响应可以用一个方程来表达。该体系可以用直接平衡法建立方程,但是用虚位移原理更简便。

选择铰的垂向位移 $y(t)$为基本自由度,而其他的一切位移均可以通过它来表达。例如阻尼器处的位移为 $y/2$,质量 m 处的位移为 $y/2$,作用于结构上的全部力为:

①弹性力,$f_S = ky(t)$;

②阻尼力,$f_D = c\dfrac{1}{2}\dot{y}(t)$;

③质量 m 惯性力,$f_{I_1} = m\dfrac{1}{2}\ddot{y}(t)$;

④刚性杆平动惯性力,$f_{I_2} = \bar{m}\dfrac{l}{2}\times\dfrac{1}{2}\ddot{y}(t)$;

⑤刚性杆绕质心转动惯性矩

$$M_{I_{20}} = I_2\frac{1}{(l/2)}\times\ddot{y}(t) = \frac{\bar{m}l^2}{48}\ddot{y}(t),$$

$$I_2 = \bar{m}\frac{l}{2}\frac{\left(\dfrac{l}{2}\right)^2}{12} = \frac{\bar{m}l^3}{96}$$

⑥干扰力 $P(t)$。

根据作用于系统上的所有力在发生虚位移 δy 时所做的总功等于零来建立运动方程。根据虚位移和 $y(t)$成比例这一特性,可以写出总的虚功

$$\delta W = -ky\delta y - c\frac{1}{2}\dot{y}\frac{1}{2}\delta y - m\frac{1}{2}\ddot{y}\frac{1}{2}\delta y - \frac{\bar{m}l}{4}\ddot{y}\frac{1}{2}\delta y - \frac{\bar{m}l^2}{48}\ddot{y}\frac{1}{(l/2)}\delta y + P(t)\frac{1}{2}\delta y$$

令总的虚功等于零并化简得

$$\left(\frac{m}{4}+\frac{\bar{m}l}{6}\right)\ddot{y}+\frac{c}{4}\dot{y}+ky=\frac{P(t)}{2}$$

或者写成

$$m^*\ddot{y}+c^*\dot{y}+k^*y=p^*(t)$$

其中

$$m^*=\frac{m}{4}+\frac{\bar{m}l}{6},c^*=\frac{c}{4},k^*=k,p^*(t)=\frac{P(t)}{2}$$

这些带 * 符号的项分别称为广义质量、广义阻尼、广义刚度和广义荷载,又可称为等效质量、等效阻尼、等效刚度和等效荷载。

2.1.3 哈密顿原理

针对图 2-1,采用哈密顿原理建立振动方程。由图 2-1 得系统的动能和势能分别为 $T=\frac{1}{2}m\dot{y}^2$, $V=\frac{1}{2}ky^2$,非保守力即阻尼力和干扰力所做的功的变分

$$\delta W_{nc}=P(t)\delta y-c\dot{y}\delta y \tag{2-2}$$

根据式(1-6),将动能对于速度求变分,将势能对于位移求变分,得

$$\delta T=\delta\left(\frac{1}{2}m\dot{y}^2\right)=m\dot{y}\delta\dot{y},\ \delta V=\delta\left(\frac{1}{2}ky^2\right)=ky\delta y \tag{2-3}$$

将式(2-2)和式(2-3)代入式(1-6)得

$$\int_{t_1}^{t_2}[m\dot{y}\delta\dot{y}-c\dot{y}\delta y-ky\delta y+P(t)\delta y]\mathrm{d}t=0 \tag{2-4}$$

以上各项积分中,仅第一项含有速度的变分,通过分部积分得

$$\int_{t_1}^{t_2}m\dot{y}\delta\dot{y}\mathrm{d}t=m\dot{y}\delta y\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}m\ddot{y}\delta y\mathrm{d}t$$

因为在 t_1 和 t_2 时刻的位移是给定的,故其变分 δy 等于零。于是可得

$$\int_{t_1}^{t_2}m\dot{y}\delta\dot{y}\mathrm{d}t=-\int_{t_1}^{t_2}m\ddot{y}\delta y\mathrm{d}t \tag{2-5}$$

将式(2-5)代入式(2-4),得

$$\int_{t_1}^{t_2}[-m\ddot{y}-c\dot{y}-ky+P(t)]\delta y\mathrm{d}t=0 \tag{2-6}$$

考虑到 $t_1\sim t_2$ 时间区间内变分的任意性,上式如果成立,被积分函数必须等于零。于是得到与式(2-1)相同的运动方程。

2.2 无阻尼系统自由振动分析

进行无阻尼自由振动分析的关键,在于得到系统的固有振动特性,包括得到系统的固有频率和固有振动形式。只有充分了解结构自身的振动特性,才能有效地进行结构振动的预报与控制。

2.2.1 固有频率和固有振动形式

令方程(2-1)的干扰力和阻尼力等于零,并且每项除以 m,可得

$$\ddot{y}+\lambda^2y=0 \tag{2-7}$$

其中

$$\lambda^2=k/m \tag{2-8}$$

λ 为系统的固有频率。由式(2-8)可知,λ 仅与系统的刚度和质量有关,而与初始条件无关,所以称为固有频率或者圆频率。λ 的量纲与角速度相同,即为 rad/s,它反映了振动系统自由振动的快慢。求解方程(2-7),可以得到自由振动的解,即

$$y(t)=A_1\cos\lambda t+A_2\sin\lambda t$$

设 $t=0$ 时刻系统初始位移和初始速度分别为 y_0 和 $\dot{y}_0$,则可以确定上式的常数 A_1 和 A_2,得

$$y(t)=y_0\cos\lambda t+\frac{\dot{y}_0}{\lambda}\sin\lambda t \tag{2-9a}$$

式(2-9a)又可以写成

$$y(t)=A\cos(\lambda t-\beta) \tag{2-9b}$$

式(2-9a)和式(2-9b)应该相等，利用三角公式展开式(2-9b)，并令其等于式(2-9a)的右端项，可得

$$\left.\begin{aligned} A&=\sqrt{y_0^2+\left(\frac{\dot{y}_0}{\lambda}\right)^2} \\ \beta&=\arctan\frac{\dot{y}_0}{\lambda y_0} \end{aligned}\right\} \tag{2-10}$$

A 和 β 分别称为系统振动的幅值和相位。式(2-9b) 完整描述了系统自由振动的形式，即系统自由振动的形式为简谐的，其振动频率为 λ，振动的幅值和相位分别由式(2-10)确定。系统振动时每秒循环的次数 f 称为运动的频率，其单位为赫兹(Hz)，循环一次所需要的时间 T 叫做周期。λ、f 和 T 三者之间的关系为

$$\left.\begin{aligned} f&=\frac{\lambda}{2\pi} \\ T&=\frac{1}{f}=\frac{2\pi}{\lambda} \end{aligned}\right\} \tag{2-11}$$

下面假定 $\beta=0$，分析位移、速度和加速度三者之间的关系。

位移 $$y(t)=A\cos\lambda t \tag{2-12a}$$

速度 $$\dot{y}(t)=-A\lambda\sin\lambda t=A\lambda\cos\left(\lambda t+\frac{\pi}{2}\right) \tag{2-12b}$$

加速度 $$\ddot{y}(t)=-A\lambda^2\cos\lambda t=A\lambda^2\cos(\lambda t+\pi) \tag{2-12c}$$

由上式可知振动过程中，位移、速度和加速度的相位之间存在以下关系。

①速度的相位比位移的相位超前$\frac{\pi}{2}$，加速度的相位比速度的相位超前$\frac{\pi}{2}$。

②位移为零时，加速度也为零，但速度值最大；位移最大时，速度为零，加速度最大，但位移和加速度相位相反。

③加速度大小和位移成正比，但其方向总是与位移相反，即始终指向平衡位置。

2.2.2 固有频率的计算

1. 直接采用公式计算

确定了系统的刚度和质量后，便可根据式(2-8)计算系统振动的固有频率。

例 2.2 图 2-3(a)所示简支梁长度为 l，梁长的中点有一集中质量 m，梁的刚度为 EI，不计梁的质量，计算其固有频率。

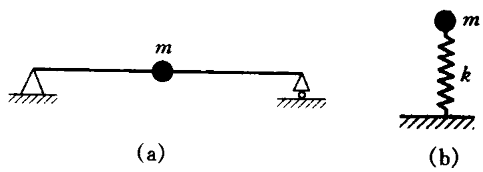


图 2-3

解 图 2-3(a)可以简化为图 2-3(b)所示的模型。梁中点发生单位位移时的恢复力即梁的刚度 $k=\frac{48EI}{l^3}$，所以系统的固有频率

$$\lambda=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{48EI}{ml^3}}$$

2. 静伸长法

静伸长法即根据系统重量引起的位移 δ，计算固有频率的方法。根据式(2-8)，可以导出