

加 Robert M. Corless 著 ■ 何青 袁荣 王丽芬 译 ■ 邵勇 校

MAPLE 经典

——科学程序员入门

高等教育出版社



788879
34659867953767776754
5786787890289
35642557898706795437
363487687746734
43786778986354
85687876592865784
4465346526787578243
7866874798687952468
5486974883475653456
34769346875786698976
67777978967894537
54377586745674578
4757867478754867897654
68907890367990368936989
558958347657439786354
56759479876954367035798
8867534787987890647878576
651785093675439076575643
769778677865347987987849536
88904-6587908609548790895
0894456908784059869785678567587564
5987346785698790879654078006
4174568769540706547845876609870698780949
704778074576458746897569476457465
787659876445353473358765487659876587647543334647658
45676587658765987698706856875678589857609857
86543765836879683654368734875684567348967354968769587693706
098765897683547657346754397834786
987696543678534976578458475848763456765876457645367
46534765764587

C245
K57

MAPLE 经典

— 科学程序员入门

[加] Robert M. Corless 著

何青 袁荣 王丽芬 译 邵勇 校

高 等 教 育 出 版 社

Translation from the English language edition:
Essential Maple by Robert M. Corless
Copyright © 1995 Springer – Verlag New York, Inc.
All Rights Reserved
图字:01-98-2724 号

图书在版编目(CIP)数据

MAPLE 经典/何青等译.—北京:高等教育出版社,
2002.7

ISBN 7-04-010648-5

I.M... II.何... III.数值计算—应用软件,MAPLE
IV.0245

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 001001 号

MAPLE 经典
Robert M. Corless 著

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号
邮政编码 100009
传 真 010-64014048

购书热线 010-64054588
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所
印 刷 北京外文印刷厂

开 本 787×1092 1/16
印 张 10.5
字 数 260 000

版 次 2002 年 7 月第 1 版
印 次 2002 年 7 月第 1 次印刷
定 价 14.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

前 言

这本书讲了什么

这本书是对一种计算机代数语言 Maple 的快速介绍. 它是为那些使用过其他计算机语言, 例如 C, FORTRAN 或 Pascal 的科学编程人员编写的. 如果你需要一个更长的或更详细的对 Maple 的介绍, 参见 [8,27,39].

对于那些不经常使用 Maple 以致于忘记了某些关键命令的人, 本书也是合适的参考书. 第四章是关键词的汇总. 如果你忘记了你想使用的准确的 Maple 命令, 这一章将是非常有用的. 这一章最好是通过目录来查询, 因为它是按照主题来分类的.

本书需要的数学预备知识是微积分、线性代数和某些微分方程. 学习过一些数值分析的课程也是有帮助的. 其他额外的数学知识在本书中有说明.

本书是用 Maple V Release 3 准备的, 在 Maple V Release 2 的基础上, 大多数例子只要做一些微小的修改就可以运行. 本书不需要任何特殊的硬件. 在编写本书时我所使用的系统是运行 IBM DOS 和 WIN/OS2 的计算机, 具有字符终端和 X-windows 的 Unix 系统计算机. 对于装备了 Macintoshes 和其他硬件系统的读者也没有调整的必要.

Maple 是一个发展中的系统. 新的功能将在升级文档中描述 (Maple 中的 ?updates).

如何读这本书

建议一口气读完本书的 1.1~1.5 节, 然后在运行 Maple 时, 可以试验所讲的东西. 当你空闲的时候再阅读后面的内容, 并可以按照你喜欢的任何次序阅读. 我建议你查询第四章关键词汇总并把它做为进一步研究的向导. 目录提供了关键词汇集的最好索引. 如果你使用的版本高于 Release 3, 请查看 ?updates.

本书的练习为读者提供了实践的机会, 并意图进一步展开书中的观点. 这些练习在难度上是不同的, 从一般的到十分难的. 我在 Western Ontario 大学为研究生开设计算机代数应用课程时, 它们曾经作为课外作业. 并不是说只有完成了这些作业才能从本书受益, 不过做一下总比仅仅读一下更有兴趣.

本书还有许多小的程序, 当你编写自己的程序时, 我希望能发现它们的用处, 并把它们做为向导.

致谢

最重要的帮助来自于我的妻子, Sumaya. 正是由于她承担了大量烦琐的工作, 我才有可能以愉快的心情完成这本书的写作. 她应该获得更多的谢意.

另一方面, 我的女儿, Shamila, 总是希望帮助我, 但她没能给我提供任何帮助, 因为她只有 5 岁.

我的父母提供的帮助是无价的, 本书是献给他们的.

在技术上的帮助, 我首先要感谢 Keith Geddes, 他在 Waterloo 大学开设的第一次 Maple 课程引起了我对计算代数的兴趣. 这个课程以 ALTRAN 开始, 以 Maple 结束 (那是非常老的版

本). 从那时起, 我就在几乎所有工作中使用计算机代数系统, 包括科研和教学. 对我的计算代数事业产生重要影响的另一个人是 David Jeffrey, 他教导我在应用数学领域如何做研究, 现在他还是我最好的朋友和同事. `watmaple` 邮件组的成员, 不论是过去的 Gaston Gonnet 和 Michael Monagan, 还是现在的学生研究助手们, 都参与了许多有趣的讨论, 我从中也学到了许多 Maple 的知识. George Corliss, Dave Hare, Henning Rasmussen 和 Kelly Roach 对本书的初稿提供了详细的意见和建议. Bill Bauldry 和匿名的评论员也对本书提供了有益的意见. Niklaus Mannhart 帮助完成了最终的 L^AT_EX 排版, 并阅读了原稿.

本书的一部分是我在纽约约克镇的 T.J.Watson 研究中心休假时完成的. Stephen Watt, Dick Jenks 和 Tim Daly 花费了大量的时间和精力, 即使日程安排非常紧张.

我还要特别感谢 Darren Redfern 的出色编辑工作, 感谢 Stan Devitt, 他开发的工具可以把 Maple 的输入和输出包含在 L^AT_EX 文档中. 我的学生 Mohammed O.Ahmed, Anne-Marie E.Allison, Tianhong Chen 和 David W. Linder 对本书的程序进行了测试; 我所有的应用计算代数的学生, 过去和现在的, 帮助我改进了我的想法和表达, 在此我对他们表示感谢.

目 录

插图目录	ix
第一章 基础	1
1.1 运行 Maple	1
1.1.1 基本命令句法	1
1.1.2 Maple 会话区的例子	2
1.1.3 算术	12
1.1.4 常见的句法错误	14
1.1.5 中断 Maple 的运算	15
1.2 保存你的工作	15
1.3 文件的使用	16
1.3.1 会话区	16
1.3.2 写到文件中	17
1.4 需要密切注意的问题	17
1.4.1 为变量赋值	17
1.4.2 删除变量的值	18
1.4.3 左引号、右引号、双引号	19
1.4.4 算子运算的先后次序	20
1.4.5 受保护和保留的名字	21
1.5 记载你的工作	21
1.6 Maple“黑盒子”的三个等级	23
1.7 没有非平凡的软件包是无缺陷的	24
1.8 求值规则	25
1.8.1 惰性函数	29
1.9 假设机制	32
第二章 常用命令	34
2.1 化简	34
2.1.1 normal	34
2.1.2 collect	35
2.1.3 factor	38
2.1.4 expand	39
2.1.5 combine	40
2.1.6 simplify	40
2.2 解方程	42
2.3 微积分	45

2.3.1	反导数的连续性	50
2.4	多项求和与有限差分计算	54
2.5	浮点计算	57
2.6	最有用的 Maple 功能	59
2.7	在 Maple 中画图	64
2.7.1	二维图形	64
2.7.2	高度不连续函数	68
2.7.3	极坐标画图	71
2.7.4	三维图形	74
2.7.5	等高线图和其他图形	77
2.7.6	常见错误	81
2.7.7	得到图形的硬拷贝	82
第三章	Maple 编程	85
3.1	算子	85
3.1.1	有限差分算子例子	88
3.1.2	关于数学算子的说明	89
3.2	更一般的过程	89
3.2.1	结构类型	91
3.3	数据结构	92
3.4	局部、全局、环境变量	96
3.4.1	输出局部变量	97
3.4.2	全局变量	98
3.4.3	环境变量	98
3.5	递归和“remember 选项”	100
3.6	变化的参数个数或类型	102
3.7	建立自己的“帮助文件”	103
3.8	返回多于一个的结果	106
3.9	调试 Maple 程序	108
3.10	简单的 Maple 程序	110
3.10.1	代数方程的参数解	111
3.10.2	在 Maple 中读入一个过程	113
3.10.3	带状矩阵的索引函数	113
3.10.4	$y'(t) = ay(t-1)$ 的解	117
第四章	关键词汇总	121
4.1	线性代数	121
4.1.1	基本命令	121
4.1.2	解线性方程组	121
4.1.3	特征值问题	122
4.1.4	正交化	122

4.1.5	特殊矩阵	122
4.1.6	理论	123
4.1.7	常用工具	123
4.1.8	向量运算	124
4.1.9	线性程序	124
4.1.10	适当的转换	124
4.1.11	相应的结构数据类型	125
4.2	多项式与有理函数	125
4.2.1	多项式的处理	125
4.2.2	数学运算	126
4.2.3	求根	126
4.2.4	根的符号处理	127
4.2.5	正交多项式	127
4.2.6	有理函数	127
4.2.7	插值与逼近	127
4.2.8	常用工具	128
4.2.9	适当的变换	128
4.2.10	相应的结构数据类型	128
4.3	微积分	129
4.3.1	一元微积分	129
4.3.2	多元微积分	129
4.3.3	复变量	130
4.3.4	初等函数、特殊函数与常数	130
4.3.5	跳跃的不连续函数	133
4.3.6	适当的变换	133
4.3.7	适当的简化	133
4.3.8	相应的结构数据类型	134
4.4	抽象代数	134
4.4.1	群	135
4.4.2	环	135
4.4.3	域	135
4.4.4	一般整环	135
4.5	组合、数论和图论	135
4.5.1	适当的转换	136
4.5.2	相应的结构数据类型	136
4.6	几何	137
4.7	图形	137
4.7.1	相应的结构数据类型	137
4.8	统计	137
4.9	共享库	138

4.10	编程	138
4.10.1	控制结构	138
4.10.2	对象操作	138
4.10.3	过程	139
4.10.4	调试工具	139
4.10.5	程序生成工具	139
4.10.6	黑客的角落	140
4.10.7	适当的转换	140
4.10.8	相关的结构数据类型	140
4.11	文件输入、输出	140
4.12	与其他程序语言的连接	141
4.12.1	转换成 FORTRAN 和 C	141
4.12.2	排版语言的输出	141
4.12.3	在 Maple 中调用其他程序	141
4.12.4	在其他程序中调用 Maple	142
参考文献		143
索引		145

插图目录

1.1	热传导方程的五项解的误差图形	7
1.2	热传导方程的十项解的误差图形	8
1.3	在 $x-t$ 平面的等温线	9
1.4	具有非光滑初始条件的五项解的误差图	11
2.1	$1/(2 + \sin x)$ 的 Maple 反导数	51
2.2	Riemann ζ - 函数	65
2.3	直接画出的 Lambert W- 函数	65
2.4	以参数方式画出的 Lambert W- 函数	66
2.5	前 20 个 Chebyshev 多项式	66
2.6	交点轨迹	67
2.7	更多的交点轨迹	67
2.8	$1/(1+t)$ 的 Riemann 和	68
2.9	f 表示为 Fourier 级数的前五项的误差函数	68
2.10	画出 Gauss 映射的第一次尝试	69
2.11	改进的 $G(t)$ 图形	70
2.12	最好的 $G(t)$ 图形	71
2.13	心形到钟形的图形	72
2.14	$r = (4 \cos 3\theta + \cos 13\theta)/\cos \theta$	72
2.15	$r = (4 \cos \theta + \cos 9\theta)/\cos \theta$	73
2.16	Fay 蝴蝶 $r = \exp(\cos \theta) - 2 \cos 4\theta + \sin^5(\theta/12)$	73
2.17	圆环面上的 Gauss 映射图形	75
2.18	Jacobi 椭圆函数 $\text{sn}(x, y)$	75
2.19	Jacobi 椭圆函数 $\text{sn}(x, 1 - 10^{-y})$	76
2.20	$\sin(y - x^2 - 1) + \cos(2y^2 - x)$ 的等高线图	77
2.21	$y + \sin(x^2y - 1/x)$ 的等高线图	78
2.22	Van der Pol 方程当 $\epsilon = 1$ 时的相位图	79
2.23	Van der Pol 方程当 $\epsilon = 5$ 时的相位图	79
2.24	$y' = \cos(ty)$ 对各种初值条件的解	80
2.25	捕食者方程的相平面解	80
2.26	$B(v)$ 的图形	84
3.1	$1 + (x+z)^3 + \tan((x+z)^3) \sin(y)$ 的有向圈图	94
3.2	具有五项解的相对误差	119

第一章 基础

本章将介绍如何运行 Maple, 给出几个会话区的例子, 讨论一些常见的困难和错误, 从而为更进一步使用 Maple 打下坚实的基础. 1.1 到 1.5 节是最重要的, 余下的几节内容可以在浏览本书的其他内容后回过头来再读.

1.1 运行 Maple

在大多数计算机系统上运行 Maple 都是键 `maple`(或 `xmaple`, 如果运行 X-Windows 的 Maple 会话区), 或点击 Maple 图标. 如不能运行, 问一问熟知 Maple 的人. 一旦运行了 Maple, 为得到帮助, 在 Maple 提示符 (通常是三角括号 (`>`)) 后键入 `?`. 为就某特定的 Maple 主题寻求帮助, 键入 `?<keyword>`, 其中 `<keyword>` 是你所要了解的 Maple 关键词. 例如, 如在提示符后键入 `?index`, 将得到

```
> ?index

HELP FOR: Index of help descriptions

CALLING SEQUENCE:

?index[<category>] or help(index, <category>);

SYNOPSIS: ...
```

如果不知道确切的词, 可查看本书第四章的关键词概要, 或简单地再试几次, Maple 将会帮助找到你想找的. 如果系统有帮助浏览器, 可使用它.

练习

1. 通过运行 Maple 然后执行命令 `?linalg` 和 `?with`, 了解如何使用线性代数包, 至少钻研一个程序 (比如 `jordan`).
2. 通过执行命令 `?student`, 了解如何使用 `student` 包. 至少钻研一个程序 (比如 `changevar`).

1.1.1 基本命令句法

Maple 是大小写敏感的, `series` 不同于 `SERIES`, 亦不同于 `Series`. Maple 中的命令是 `series`.

```
> series(sin(exp(x)-1), x);
```

$$x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{24}x^4 - \frac{23}{120}x^5 + O(x^6)$$

这是 Maple 中计算级数的一个方法. 如使用某些大些字母, Maple 认为我们在讨论其他的函数, 这一点以后将讨论.

```
> Series(sin(x), x);

Series(sin(x), x)
```

正如所见, Maple 回显它不理解的正规输入. 作为一个符号计算系统, Maple 这种行为是正常的, 但此时它却没有按照你所想像的方式工作. 如果按 “caps lock” 键, 可得如下内容:

```
> SERIES(cos(x),x);
SERIES(cos(x), x)
```

Maple 的表达式以分号 (;) 或冒号 (:) 结束. 以冒号结束的表达式执行计算, 但不显示结果. 这种方法通常用于隐藏庞大中间结果的显示. 例如

```
> expand((x+y)^3);

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

```

像希望的那样显示结果. 另一方面, 假设我们想计算 $(x+3)^{100}$ 中 x^{48} 的系数, 则我们对下面的中间结果没有任何实际兴趣. 因它占用 262 行, 较好的想法是不显示它们.

```
> expand((x+3)^100):
> coeff("x",48);
602215209504724412112950467056274829612676243770345100
```

同上符 (") 表示上一次的计算结果.

一个常见错误: 如果忘记键入 Maple 语句的结束符 (冒号或分号), 你不必重新键入这一语句, 只要简单地键入冒号或分号即可. 如果重新键入, 就将可能引起句法错误, 因为 Maple 将试图把你两次键入的语句当作一个多行的 Maple 语句. 其他常见错误在 1.1.4 小节中列出.

```
> expand((x+3)^100)
> :
> coeff("x",48)
> ;
602215209504724412112950467056274829612676243770345100
```

1.1.2 Maple 会话区的例子

下面介绍三个 Maple 运行的例子. 在你的系统中运行 Maple, 然后键入下面的命令.

1.1.2.1 会话区的第一个例子 —— Maple 作为计算器

这个会话区教你如何用地 Maple 解决代数、线性代数和微积分中的一些问题. 我们从多项式的因式分解开始.

```
> factor(t^12-1);
```

此命令的输出如下, 注意在你的会话区中可能因式的顺序有所不同.

$$(t-1)(t^2+t+1)(t+1)(1-t+t^2)(t^2+1)(t^4-t^2+1)$$

因式分解正确吗? 通过观察知根 $\pm 1, \pm i$ 在这些因式中 (其中 i 是 -1 的平方根). 因而我们倾向于相信 Maple 因式分解正确. 当然, 我们能要求 Maple 用 `expand` 把那些因式展开回到 $t^{12} - 1$.

```
> expand("");

$$t^{12} - 1$$

```

现在我们做些线性代数中的简单计算.

```
> with(linalg):
```

```
Warning: new definition for norm
```

Warning: new definition for trace

命令 `with(linalg)` 调用线性代数程序包到 Maple, 我们就可以使用 Maple 的线性代数程序包了. 警告 `warning` 告诉你主程序库中 `norm` 和 `trace` 已被同名的线性代数程序所替代. 由于我们不打算使用这些函数, 这里忽略这些警告. 本书中以后遇到此情况都将忽略这些警告.

```
> A:=matrix([[4,5],[5,6]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

现在计算这个矩阵的特征多项式:

```
> p:=charpoly(A,lambda);
```

$$p := \lambda^2 - 10\lambda - 1$$

矩阵的迹是 $6 + 4 = 10$, 它应是线性项系数的负数. 正确. 矩阵的行列式是 $4 \cdot 6 - 5^2 = -1$. 它应是常数项. 再一次正确. 因此可以说 Maple 的运算是正确的.

现在让我们做些微积分.

```
> Int(1/(t^6-1),t)=int(1/(t^6-1),t);
```

这条命令的输出如下. 首先我们观察一下输入语句. 注意它的左边和右边, 除了左边 `Int` 的首字母大写 (这个大写使此命令为惰性的. 在 1.8.1 节中将讨论惰性函数) 外, 其他都相同. 这里, 我们用此语句来产生一个实用的等式, 这个等式的左边为一个不定积分式, 右边则是与左边积分相等的表达式.

$$\int \frac{1}{t^6-1} dt = \frac{1}{6} \ln(-1+t) - \frac{1}{12} \ln(t^2+t+1) - \frac{1}{6} \sqrt{3} \arctan\left(\frac{1}{3}(2t+1)\sqrt{3}\right) - \frac{1}{6} \ln(1+t) \\ + \frac{1}{12} \ln(t^2-t+1) - \frac{1}{6} \sqrt{3} \arctan\left(\frac{1}{3}(2t-1)\sqrt{3}\right)$$

注意在 Maple 的解答中不加任意常数. 这应该是可以理解的. 如果想在答案中出现任意常数就人为地加上它, 例如 `int(1/(t^6-1), t)+C;`

上面的答案是繁琐的. 如果不用 Maple 去检验, 我们也许更愿意用代入数值法去检验它, 然而, Maple 中进行微分的代码独立于进行积分的代码, 因此, 用 Maple 微分上面等式的两端, 将得到有用的验证.

```
> diff(",t);
```

$$\frac{1}{t^6-1} = \frac{1}{6} \frac{1}{-1+t} - \frac{1}{12} \frac{2t+1}{t^2+t+1} - \frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{1}{3}(2t+1)^2} - \frac{1}{6} \frac{1}{1+t} + \frac{1}{12} \frac{2t-1}{t^2-t+1} - \frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{1}{3}(2t-1)^2}$$

两边都进行了微分 — 现在仅需化简结果. 经过实验发现最有效的简化式子的命令是具有 `expanded` 选项的 `normal` 命令.

```
> normal(", expanded);
```

$$\frac{1}{t^6-1} = \frac{1}{t^6-1}$$

因此, Maple 找到了 $1/(t^6 - 1)$ 的一个正确的反导数. 现在我们来解逻辑斯谛微分方程

```
> logistic := diff(x(t), t) = x(t) * (1 - x(t));
```

$$\text{logistic} := \frac{\partial}{\partial t} x(t) = x(t) (1 - x(t))$$

使用初始条件 $x(0) = \alpha$.

```
> initial_cond := x(0) = alpha;
```

$$\text{initial_cond} := x(0) = \alpha$$

现在用此初始条件解微分方程, 以求出未知函数 $x(t)$.

```
> ans := dsolve( {logistic, initial_cond}, x(t) );
```

$$\text{ans} := x(t) = -\frac{1}{-1 - \frac{e^{(-t)}(1 - \alpha)}{\alpha}}$$

我们把它带回到微分方程和初始条件来检验结果.

```
> subs(ans, logistic);
```

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{-1 - \frac{e^{(-t)}(1 - \alpha)}{\alpha}} \right) = -\frac{1 + \frac{1}{-1 - \frac{e^{-t}(1 - \alpha)}{\alpha}}}{-1 - \frac{e^{-t}(1 - \alpha)}{\alpha}}$$

```
> normal("");
```

$$-\frac{\alpha e^{-t}(-1 + \alpha)}{(-\alpha - e^{-t} + e^{-t}\alpha)^2} = \frac{\alpha e^{-t}(-1 + \alpha)}{(-\alpha - e^{-t} + e^{-t}\alpha)^2}$$

因为左边与右边相等, 所以 $x(t)$ 确实是解.

```
> subs(t=0, ans);
```

$$x(0) = -\frac{1}{-1 - \frac{e^0(1 - \alpha)}{\alpha}}$$

```
> normal("");
```

$$x(0) = \alpha$$

初始条件也得到满足.

1.1.2.2 结束 Maple 会话区

通过运行命令 `quit`, `done` 或 `stop` 可退出 Maple. 如你正在使用菜单驱动系统, 在菜单中选 `exit` 可退出 Maple. 这些命令可用回车来结束, 不需冒号和分号. 现在退出 Maple 会话区.

```
> quit
```

这就结束了第一个会话区例子. 如前所述, 使用 `?` 命令能得到每个命令的帮助.

练习

1. 分解因式 $t^{24} - 1$, 并检验结果.
2. 分解因式 $t^6 - 1$ 成线性因式. 提示: 见 `?factor`, 你需要扩张 $K = \sqrt{-3}$. 再次 (以后总是) 检验结果.
3. 从本节的会话区例子中用 Maple 求矩阵 A 的逆 (见 `?inverse` 或 `?evalm`).
4. 求 $\int \exp(-t) \sin(t) dt$.

5. 求 $\exp(\theta) \sin^{-1} \theta$ 的五阶导数 (反正弦函数 $\sin^{-1}$ 在 Maple 中为 `arcsin`.)
6. 解 $x^2 y'' + x y' + y = 3x^3$.

1.1.2.3 会话区的第二个例子 —— “Hello, world”

在第二个会话区例子中, 我们写 “Hello, world” 这一强制性的程序 (或它的小变化). 再次运行 Maple, 输入下列单行程序.

```
> hi := proc() 'Hello, World' end;
```

引号用的是左引号 (‘) 不是右引号 (’).

```
hi := proc() 'Hello, World' end
```

```
> hi(Maple);
```

```
Hello, World
```

现在再次退出 Maple.

```
> quit
```

Maple 的程序主体是以关键词 `proc()` 开始, 以关键词 `end` 结束. 在关键词 `proc()` 中, Maple 程序可以指明变量, 也可以不指明变量. 为了给程序一个名字, 可将程序主体赋值给程序名. 上例中的程序名是 `hi`.

练习

1. 比较下面 Maple 输入语句的结果 (`hi` 定义如上).

```
> hi;
> hi();
> hi(Ginger);
> eval(hi);
```

2. 下面程序做些什么?

```
> hi := proc(x)
>   if x=Maple then
>     'Hello, Deanna'
>   else
>     'I beg your pardon?'
>   fi
> end;
```

1.1.2.4 会话区的第三个例子 —— 用 Fourier 级数解热传导方程

作为最后的会话区例子, 我们将做一件稍具挑战性的工作, 即求热传导方程 $u_t = u_{xx}$, $0 \leq x \leq 1, 0 < t$ 满足边界条件 $u(0, t) = u(1, t) = 0$ 和初始条件 $u(x, 0) = x^2(1 - x^2)$ 的解. 得到的结果是一根初始温度分布为 $x^2(1 - x^2)$ 、长度为 1 的杆在时刻 t 的无维数温度 u .

我们用 Fourier 级数的标准理论来解这个问题 (参见 (6)), 并且用 Maple 作为计算的工具. 通过这个例子, 我们可以快速回顾 Maple 中的积分、代数操作和一些初等绘图等命令. 然而, 它还使用了 Maple 的几个高级特征. 现阶段这些特征似乎是神秘的. 我鼓励大家尽可能地跟踪此会话区例子学习, 如果遇到有困难而不能解决的话, 就跳到会话区的结束部分. 你在以后总可以再回到这个例子. 在这个例子讲述过程中, 需要时可随时使用帮助命令 (例如 `?int`).

我们要找的 Fourier 级数是

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2 \pi^2 t} \sin(k \pi x),$$

下面将用 Maple 计算常数 c_k . 已知

$$c_k = \frac{\int_0^1 f(x) \sin(k \pi x) dx}{\int_0^1 \sin^2(k \pi x) dx}$$

因而我们从这些积分的计算开始.

$$\begin{aligned} &> \text{int}(\sin(k \cdot \text{Pi} \cdot x)^2, x=0..1); \\ &\quad \frac{1}{2} \frac{-\cos(k \pi) \sin(k \pi) + k \pi}{k \pi} \end{aligned}$$

显然上述表达式可以化简, 但我们应记住 Maple 不知道 k 是一整数. 帮助 Maple 解决这一问题的最简捷的方法是用我们自己的知识.

$$\begin{aligned} &> \text{subs}(\sin(k \cdot \text{Pi})=0, ""); \\ &\quad \frac{1}{2} \\ &\text{这就给出了 } c_k \text{ 定义中两个积分中的一个. 现在计算另一个.} \\ &> \text{int}(x^2 \cdot (1-x^2) \cdot \sin(k \cdot \text{Pi} \cdot x), x=0..1); \\ &\quad -2 \frac{5 k^2 \pi^2 \cos(k \pi) + k^3 \pi^3 \sin(k \pi) - 12 \cos(k \pi) - 12 k \pi \sin(k \pi)}{k^5 \pi^5} - 2 \frac{12 + k^2 \pi^2}{k^5 \pi^5} \\ &> \text{subs}(\sin(k \cdot \text{Pi})=0, ""); \\ &\quad -2 \frac{5 k^2 \pi^2 \cos(k \pi) - 12 \cos(k \pi)}{k^5 \pi^5} - 2 \frac{12 + k^2 \pi^2}{k^5 \pi^5} \\ &> \text{subs}(\cos(k \cdot \text{Pi})=(-1)^k, ""); \\ &\quad -2 \frac{5 k^2 \pi^2 (-1)^k - 12 (-1)^k}{k^5 \pi^5} - 2 \frac{12 + k^2 \pi^2}{k^5 \pi^5} \\ &> \text{expand}(""); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\quad -10 \frac{(-1)^k}{k^3 \pi^3} + 24 \frac{(-1)^k}{k^5 \pi^5} - \frac{24}{k^5 \pi^5} - \frac{2}{k^3 \pi^3} \\ &> \text{collect}("", k, \text{factor}); \\ &\quad -2 \frac{5(-1)^k + 1}{\pi^3 k^3} + 24 \frac{(-1)^k - 1}{\pi^5 k^5} \end{aligned}$$

现在, 我们知道 c_k 就等于上述值除以 $\frac{1}{2}$. 使用下列做法可以很方便地把 c_k 表示为函数算子的形式.

$$\begin{aligned} &> c := \text{unapply}(2 \cdot "", k); \\ &\quad c := k \rightarrow -4 \frac{5(-1)^k + 1}{\pi^3 k^3} + 48 \frac{(-1)^k - 1}{\pi^5 k^5} \end{aligned}$$

命令 `unapply` 只是为我们提供了一个可以以后使用的算子, 而对正在进行的计算工作本身不产生任何作用, 这以后, 我们便可以方便地使用这个算子了. 例如, 若某算子为 $g: k \mapsto k^3 + 5$, 将其作用于变元 m , 就可以得到表达式 $m^3 + 5$. 这一过程的反过程, 即把某表达式转换成为一个算子, 当然就很合理地被认为是 “unapplication”.

回到本例, 我们能够把初始条件 $f(x)$ 下的 Fourier 级数前 n 项和表示如下:

$$\begin{aligned} &> \text{fq} := n \rightarrow \text{Sum}(c(k) \cdot \sin(k \cdot \text{Pi} \cdot x), k=1..n); \\ &\quad \text{fq} := n \rightarrow \sum_{k=1}^n c(k) \sin(k \pi x) \end{aligned}$$

然而, 使用下面更有效的构造是较好的, 见下面的练习和 2.7.2 节关于 seq 的附带讨论.

```
> fn := n -> convert([seq(c(k)*sin(k*Pi*x), k=1..n)], '+');
```

Warning, 'k' is implicitly declared local

```
fn := n -> local k; convert([seq(c(k) sin(k π x), k = 1..n)], '+');
```

忽略这个警告, 它告诉我们求和中的 k 是与任何其他我们可能使用过的 k 无关. 我无法预见有这么一种情况, 在此情况中出现的警告是不必要的. 以后文本中出现的这类信息将被隐藏. 我们回到此例, 取级数中的 5 项观察误差.

```
> f5 := fn(5);
```

$$f5 := \left(\frac{16}{\pi^3} - \frac{96}{\pi^5}\right) \sin(\pi x) - 3 \frac{\sin(2\pi x)}{\pi^3} + \left(\frac{16}{27} \frac{1}{\pi^3} - \frac{32}{81} \frac{1}{\pi^5}\right) \sin(3\pi x) - \frac{3}{8} \frac{\sin(4\pi x)}{\pi^3} \\ + \left(\frac{16}{125} \frac{1}{\pi^3} - \frac{96}{3125} \frac{1}{\pi^5}\right) \sin(5\pi x)$$

```
> plot(f5-x^2*(1-x^2), x=0..1);
```

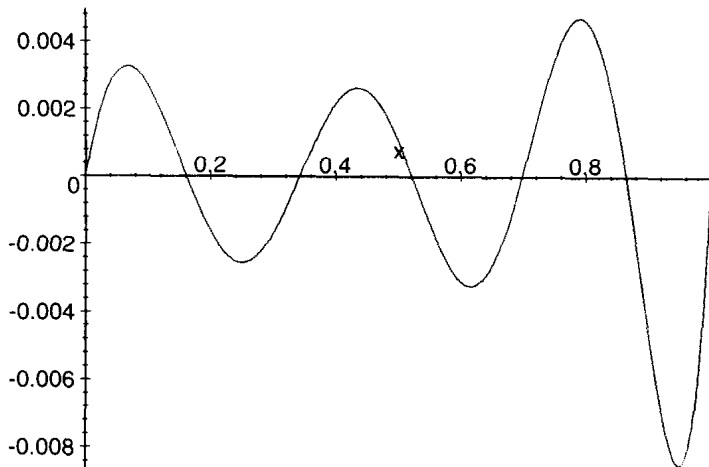


图 1.1: 热传导方程的五项解的误差图形

见图 1.1, 当级数中仅有 5 项时, 误差的最大值小于 0.01. 函数的最大值当 $x^2 = 1 - x^2$ (由算术几何均值不等式 [37], 或初等微积分) 或 $x^2 = \frac{1}{2}$ 时出现, 在此点 $f(x) = \frac{1}{4}$. 于是相对误差小于 5%. 我们再看如果取 10 项时会如何. 我们不想看级数中的这 10 项是什么, 我们只想计算它们.

```
> f10 := fn(10);
```

```
> plot(f10-x^2*(1-x^2), x=0..1);
```

见图 1.2. 误差的最大值大约是 0.002, 或者说小于 1%.

现在让我们考虑解 u 是否满足微分方程? Fourier 级数就是按照每一项都满足微分方程来构造的, 因而我们估计惟一的误差来自于初始条件的表示. 下面我们验证一下得到的解确实满足微分方程以保证除了较小的逼近误差外, 我们没有犯大的错误.

```
> un := n -> convert([seq(c(k)*exp(-k^2*Pi^2*t)*sin(k*Pi*x), k=1..n)], '+');
```

```
un := n -> local k; convert([seq(c(k) e(-k2 π2 t) sin(k π x), k = 1..n)], '+');
```