〔美〕陈惠开教授论文选集

—网络图论、量纲分析、宽带匹配

吴新余、戴旦前译　刘美轮　王兆明　欧[illegible]珉校

〔美〕陈惠开教授论文选集

——网络图论、量纲分析、宽带匹配

吴新余 戴旦前译　刘美轮 王兆明 欧阳珉校

湖南科学技术出版社

【美】陈惠开教授论文选集
——网络图论、量纲分析、宽带匹配
责任编辑：陈清山
*
湖南科学技术出版社出版
（长沙市展览馆路8号）
湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷
*
1987年12月第1版第1次印刷
开本：787×1092毫米　1/16　印张：26　插页：4　字数：654,000
印数：1——1,000
ISBN 7—5357—0029—2／TN·1
统一书号：15204·190　定价：9.20元
湘目87—29

陈惠开教授像

译者的话

陈惠开教授是一位在国际电路与系统学术界享有盛名的学者，现任美国芝加哥伊里诺大学电气工程与计算机科学系系主任。30年来，他从事网络理论方面的研究工作，其涉及的主要领域有：应用图论、无源与有源滤波器、有源网络与反馈放大器、宽带匹配网络理论与设计、网络流与通信网等。在上述各学科领域中他均有较大的建树与贡献。他的代表性著作有：(1)《应用图论》(英)、(2)《宽带匹配网络理论与设计》(英、俄、中)、(3)《有源网络与反馈放大器理论》(英、中)、(4)《线性网络与系统》(英、中)。30年来，他共撰写了160余篇论文，其中有不少是开创性的或有较大贡献的重要文献，并在国际上广为流传与引用。因此，他是一位在国际上知名度很高的学者。他曾在25种杂志中被列名，并列入美国2000名科学领袖之中。到目前为止，他指导过的世界各国的博士生和访问学者达50余人，仅中国大陆访问美国的学者在他门下深造的也有十多人。

陈教授不但是一位造诣高深的国际著名学者，同时他还是国际《电路与系统》界有影响的干练的活动家和组织者，他担任过IEEE-CAS杂志的副主编，两次担任过国际CAS学术会议的主席，在ISCAS-86会议上，他担任技术筹备主席，为组织这次规模盛大的国际学术会议做了许多具体和繁重的组织工作。

陈教授为了促进祖国的四化建设，多次回到祖国讲学。他在应用图论和宽带匹配网络理论方面作了独创性的工作，由于他不知疲倦地进行讲学活动，有力地推动了国内有关学科的蓬勃开展。

为了使陈教授的学术成果能供更多的教师和研究生学习与研究，我们从160篇论文中精选出30篇汇编成选集予以出版。由于陈教授的论文较多，而本书的篇幅有限，故对未列入本书的论文，读者需要时可根据本书末的总文献目录去查找。

关于本书出版的意义，在此，我们引用陈教授致湖南科学技术出版社此书的责任编辑陈清山先生信中所写的一段话即足以说明：

"本集中包括了我个人的许多贡献，这些论文并非是在任何各地都可容易获得的。虽然本集是倾向于欲受严格训练的研究者用的一本参考书，但是，它也可用来作为关于网络拓扑、线性电路与系统的研究生教材，某些专题适合于高级讨论班使用。事实上，这些材料在时间上是离散的，在空间上是遍布的（它分散刊载于世界各国的多种杂志中），因此本集对于网络理论的研究者来说是极有价值的材料。"

我们愿乘此机会，首先最诚挚地感谢陈惠开教授，他给我们提供了系统而丰富的学习材料，同时也给我们的研究工作提供了方便。其次，我们要衷心感谢三位同行专家在译文的校订过程中所付出的辛勤劳动，其中，有天津大学刘美轮教授、成都电讯工程学院王兆明教授以及南京邮电学院欧阳珉教授。

最后，由于我们的水平有限，尽管我们作了最大努力，但译文中错误之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

南京邮电学院　吴新余
华中工学院　戴旦前

1986年3月

内容提要

在《电路与系统》的国际性学术界中，陈惠开教授是一位享有盛名的学者。他现任美国芝加哥伊里诺大学电气工程与计算机科学系系主任。由于他在网络拓扑、线性电路和系统等理论方面的杰出贡献，仅1986年他就获得三项重大科学奖：西德的“汉勃德”奖、日本的“JSPS Fellowship”奖、美国伊里诺大学的“最杰出荣誉学者”奖。

我国读者迫切地希望了解他的科研成果，但是，他的论文在空间上是遍布的（即发表于世界各地的许多杂志之中），在时间上是离散的（指研究的时间长达30年左右），因此，本书搜集的论文十分珍贵。

本书从160篇论文中精选出30篇论文，其内容涉及到3个专题：网络图论及其应用、量纲分析、宽带匹配网络理论与设计。读者从这些论文中，不但能学习到上述理论的最新结论，了解到其发展方向，而且还能学习到写作科学论文的方法。

本书可供大专院校电专业的研究生、教师、高年级学生和电专业科研工作者、工程技术人员参考。

目　录

陈惠开教授简历

陈惠开教授在1960年以最高的荣誉获得俄亥俄大学电气工程系的学士学位（1960年毕业总人数为1260名，陈为第一名，总平均为满分）。1961年获得该校硕士学位，1964年在伊里诺大学（Champaign-Urbana）的电气工程系获得博士学位。

在1960年与1961年他是伊里诺大学研究生奖学金和华美协进会罗氏奖（C.T.Loo奖）的获得者，从1962～1964年加入伊里诺大学联合科学实验室(Coordinated Science Laboratary)，曾任科研助理、副研究员，1964年加入俄亥俄大学电气工程系，任该系助理教授。1967年被授于副教授，1971年被授于正教授。在1970～1971年间，他曾在普渡大学电工学校(即研究生院)作访问教授。从1981年9月以来，他担任芝加哥伊里诺大学电气工程与计算机科学系的教授与系主任。

陈除了讲授研究生、硕士生与博士生的课程之外，其主要的兴趣与著作是在网络与系统理论、应用图论、反馈放大器与应用数学等领域方面。由于他对这些领域所作的贡献，1967年他曾获得美国数学协会的福特奖、1972年俄亥俄大学研究会的院士奖、1973年的美国杰出教育家奖、1974年的贝克奖以及1978年的贝克科研奖。他还获得了1975年俄亥俄大学工程学院的最优秀教育奖、1978年俄亥俄大学中国学生联合会的荣誉教授以及1978年该校电气工程研究生的感激奖。

1977年他获得IEEE授于的院士奖，表彰其“对图论与网络理论的贡献”。1978年，他获得两项重大荣誉：即美国科学促进会的院士奖，表彰其“对网络理论的贡献，特别是他将图论应用于电网络方面的发展”，以及俄亥俄大学授于的最杰出的教授奖，这是该校所赠予的最高荣誉。

1984年他获得美国科学院两张高等教育荣誉证书，一是表彰其在电工教育方面的杰出贡献，二是表彰其在计算机科学方面的杰出贡献。

1985年在中国荣获七所高等院校所授予的荣誉教授称号，这些院校是：东北工学院、浙江大学、南京工学院、华东工学院、南京邮电学院、安徽大学、成都电讯工程学院。

1986年他获得的三项重大奖励是：(1) 6月份联邦德国授于其亚历克山特尔·冯·汉勃德奖（资深美国科学奖）；(2) 日本科学促进会授于其JSPS Fellowship 奖，并有6所高等院校邀请他于1987年赴日讲学；(3) 伊里诺大学最杰出荣誉学者奖（本次奖励是在该校两大校园——芝加哥校园和Champaign-Urbana 校园之一千两百余名教授中所选出的九名之一）。

陈教授是在各种专业杂志上发表过185篇论文的作者，也是下列各书的编著者：

1.《应用图论》（北荷兰出版公司，Amsterdam, The Netherlands, 484页，207个习题，1971）。

2.《宽带匹配网络理论与设计》（英国，牛津出版社，432页，129个习题，1976；俄译本，莫斯科，288页，1979；中译本，中国四川，成都，384页，1982）。

3.《应用图论：图及电网络》（美国纽约，伊尔赛维尔出版公司，542页，228个习题，1976）

4.《有源网络及反馈放大器理论》（纽约，麦克格罗-歇尔图书公司，494页，297个习题，1980）。

5.《线性网络与系统》（加里福尼亚，蒙特利尔，Brooks/Cole 出版公司，712页，534个习题，1983）。

6.《无源与有源滤波器：理论与实现》（纽约，约翰·威廉父子公司，504页，408个习题，1986）。

7.《解题手册》（出版社同上，139页，1986）。

8.《网的理论》（出版社同上，1988）。

此外，他对下列书籍的编著也有所贡献：《网络拓扑及其工程应用》（台湾，国立台湾大学出版社，1975），以及《KIRK/OTHMER》化工技术百科全书（纽约威廉国际科学出版社，1979年第三版，1984年第四版）。

陈惠开教授在其专业上有极为广泛的社交活动，他曾是IEEE 杂志的副主编以及电路与系统论文评审委员会的成员。他组织与主持过几届国际会议并任主席，其中包括1970年在东京举行的电路与系统理论国际会议；1979、1982与1983年国际电路与专题会议。他曾是1979年国际电路与系统学术讨论会的筹备主席以及1985年日本京都ISCAS国际会议的技术筹备主席、1985年中国北京ISCAS 国际会议技术筹备主席，在1987年担任IEEE-CAS学会的执行副主席。从1980年10月以来他是《电路、系统与信号处理》杂志的副主编，并任电气工程与计算机科学 Brooks/Cole 丛书的主编。

陈教授在38种杂志、书刊上均有列名，它们是：

1. 中西部名人录
2. 美国的科学领袖
3. 美国男女科学家
4. 国际名人传记辞典
5. 计算机和数据处理名人录
6. 美国的社团领袖
7. 国际服务社团名人录
8. 美国杰出的教育家
9. 今日技术名人录
10. 美国(经正式鉴定的)丛书
11. 杰出的美国人辞典
12. 中国名人录(台湾)
13. 社团领袖和著名美国人
14. 有成就的男士
15. 美国名人录
16. 百年来的美国知名人士
17. 北美名人录
18. 西部和中西部人物
19. 美国人物
20. 杰出的美国男子和女士
21. 1980年世界研究者辞典
22. 2000个知名美国人
23. 边缘科学和技术名人录
24. 计算机图形工业传记名人辞典
25. 国际工程名人录
26. 世界社团领袖
27. 世界名人录
28. 边缘技术名人录
29. 电气工程名人录
30. 大学教授（电气工程）名人录
31. 大学教授（计算机科学）名人录
32. 国际传记
33. 1986年传记
34. 国际杰出领导者辞典
35. 国际教育名人录
36. 美国名人录
37. 国际荣誉书
38. 世界5000个知名人士

序　言

1982年夏，我应中国科学院研究生院的邀请，在由圣他·克勒拉（Santa Clara）大学陈树柏（S.P.Chan）教授组织的《图论及其应用》的暑期讲习班上作了一系列《有向图及其应用》的讲演。在这次讲习班上的其他讲演者还有伯克利的加里福尼亚大学葛守仁（E.S. Kuh）教授和普渡大学的林本铭（P.M.Lin）教授。值得注意的事实是，在此讲习班中这四位讲演者所提供的资料几乎全部是他们有独创性的科研文献，因而，向讲习班的参加者所提供的信息是精确而完整的，而绝非只是对其他人的研究工作进行阐述。经过了两年，即在1984年夏，我又应华东工学院和南京邮电学院的邀请，在南京讲习班上，作了《网络图论专题与宽带匹配网络理论》的又一系列讲演，在这次讲习班上还有另一位讲演者，即日本东京工业大学的梶谷洋司教授。令人欣慰的是，这两次讲演引起了国内有关人士对图论及其应用、对宽带匹配网络理论这两个课题的浓厚兴趣。

讲习班的大多数参加者是中国各大学的教师，他们的共同要求之一是渴望得到大量的原始研究论文。本论文选集旨在满足这一方面的需要。我对这些课题的兴趣开始于在伊里诺大学和俄亥俄大学的实验，在那里，我把自己的一些开创性的论文提供给我的学生，这在培养学生的兴趣方面获得了满意的结果。由此，我确信，为了提高网络理论的研究水平，可阅读该领域中的许多开创性文献，因为这些文献有力地提供了通常在教科书中所缺乏的见解和清晰的证明。

网络理论作为一个领域来说，其源远流长，而许多其它工程领域和专业的历史却非如此悠久。它可以被认为是从欧姆定律（1827年）和基尔霍夫定律（1845年）提出后开始的。这一领域在近30年内发展十分迅速。目前，每年大约有400种出版物问世，其中还未包括专利、论文和报告，更没有迹象表明这一数字会减少。上述数字从一个侧面说明了这一领域的迅速发展程度。

我在伊里诺大学工作时，自1962年开始对网络理论发生兴趣，当时我在该大学的前田渡（Watara Mayeda）教授指导下工作。这些年来我对网络理论的兴趣是多方面的，包括应用图论、分布放大器、量纲分析、无源和有源滤波器、宽带匹配网络理论、有源网络、反馈放大器理论、网络流及通信网。我认为本书是涉及上述课题中的有关两个专题的一本论文选集。也就是说，本书的内容主要是集中在应用图论和宽带匹配理论这两个学科领域。我希望这一著作的翻译出版将有助于中国的研究者们深入地理解开创性论文及其尔后发展而成的论著。

我愿借此机会向南京邮电学院吴新余副教授表示衷心感谢，并对他热心于科学研究的精神和他力图为中国工程学术团体服务的信念表示赞赏。我十分感谢湖南科技出版社的领导及有关成员，特别是责任编辑陈清山先生，如果没有他们的不懈努力和大力支持，此项工作的完成是完全不可能的。

我想对进行中文翻译的成员，首先对吴新余副教授，其次也对戴旦前副教授（参加了部分翻译工作）表示诚挚的谢意。他们做了一件极有意义的工作。我深深地知道，在该论文选

集的翻译、出版中需要做大量的工作，而这些工作确实是十分艰难而繁重的。我还要向所有对译文提出过意见和进行过认真校阅的人员表示衷心感谢，其中有天津大学刘美轮教授、成都电讯工程学院王兆明教授以及南京邮电学院欧阳琨教授。最后，我向对此项工作给以过帮助和对这一成果感到高兴的人们表示衷心的感谢。

陈惠开

1986年3月

第一部分　图论及其应用

一、论一个图的树、补树、回路和割集之间的代数关系

摘　　要

本文给出了一个图的树（k-树）和回路、补树（补k-树）和割集之间的代数关系。它们可作为Hakimi与Green的关于列举树与k-树的方法的推广与发展。还给出了利用初等变换产生树与补树的代数关系。

1.引言

在线性电路的拓扑分析中，最终是将问题化简为在有关的图中求树与求k-树的问题。许多作者已研究了产生树和k-树的有效方法〔1〕～〔9〕。本文的目的是指出在树、k-树、补树、补k-树、回路、通路和割集之间存在着紧密的关系。

2.定义与预备知识

在本文中我们仅研究无向的、带标号的线图G，即用符号e_1，e_2，…，e_m来标记边，用v_1，v_2，…，v_{r+c}来标记节点；这里m是G的边数；r是G的秩；c是G的连通片的数目；以及n是G的零度。为方便起见，G的每一个子图S也用其边的"乘积"或并置来表示，即G的一个树可用乘积$e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_r}$来表示。

四种集合论的二元运算，"并"、"交"、"环和"与"差"分别用$\cup$、$\cap$、$\oplus$及$-$来表示。它们用于两种稍有不同的对象。例如，若g_1和g_2是G的两个子图，那么$g_1\cup g_2$表示了一个包含有既在g_1中或在g_2中、或在二者之中元素所构成的子图。如果H_1和H_2是两个集合，那么$H_1\cup H_2$表示两个集合的并。这对于$\cap$、$\oplus$及$-$也是成立的。为方便起见，ϕ用来表示零图[1]，即G的边是一个空集、且$H_0=\{\}$、表示空集。

下面，我们定义G的任意两个非空子集H_1和H_2的"笛卡儿乘积"运算（用符号$H_1\times H_2$表示）为：

$H_1\times H_2=\{g_i\cup g_j;\ g_i$在$H_1$中，$g_j$在$H_2$中$\}$，以及$H_1\times H_0=H_0\times H_1=H_0$，

即是将H_1中的子图与H_2中的子图取所有可能的并而得到的集合。

令g是G的一个子图，e是G的一条边。我们定义g对e的"偏导数"为(见〔1〕)：

$$\frac{\partial g}{\partial e}=\partial g/\partial e=g\oplus e,\ \text{当}e\text{在}g\text{中时。}$$

1　为简单起见，我们已经假设G的每一个子图是用其边的"乘积"来表示的。因此，它包括了孤立节点集合的模糊情况。从网络理论观点看来，这完全是满足的，因此在本文中，零图是否包含孤立节点的集合是无关紧要的，关于这一点的严格处理，可参阅〔9〕。

$=\phi$，当e不在g中时。

如果H是G的子图的一个集合，我们定义：

$$\frac{\partial H}{\partial e}=\partial H/\partial e=\left\{\frac{\partial g}{\partial e};\ g\text{在}H\text{中},\ e\text{在}g\text{中}\right\}$$

如果$g=e_1e_2\cdots e_k$是G的子图，我们定义：

$$\frac{\partial H}{\partial g}=\partial H/\partial g=\frac{\partial H}{\partial e_1}\oplus\frac{\partial H}{\partial e_2}\oplus\cdots\oplus\frac{\partial H}{\partial e_k}$$

所谓$\partial^2H/(\partial g_1\partial g_2)$，我们意指$\partial(\partial H/\partial g_2)/\partial g_1$。容易证明求偏导数的次序是无关紧要的。还能证明（见[1]）

$$\frac{\partial(H_1\oplus H_2)}{\partial g}=\frac{\partial H_1}{\partial g}\oplus\frac{\partial H_2}{\partial g}\qquad(1)$$

如果在H_1中的子图均不包含H_2中子图的边时，则

$$\frac{\partial(H_1\times H_2)}{\partial g}=\left(H_1\times\frac{\partial H_2}{\partial g}\right)\cup\left(H_2\times\frac{\partial H_1}{\partial g}\right)\qquad(2)$$

特别地，若H_2中的子图均不含g中的一条边，由于$\partial H_2/\partial g=H_0$，故我们有：

$$\frac{\partial(H_1\times H_2)}{\partial g}=H_2\times\frac{\partial H_1}{\partial g}$$

如果H_1和H_2是G的两个子图的集合，使得H_1中的子图均不包含H_2中子图的一条边，并且H_2中的子图均不包含G的任何一个子图g_1，g_2，…，g_k的一条边，则

$$\frac{\partial^k(H_1\times H_2)}{\partial g_1\partial g_2\cdots\partial g_k}=H_2\times\left(\frac{\partial^kH_1}{\partial g_1\partial g_2\cdots\partial g_k}\right)\qquad(3)$$

3.树、k-树和独立回路之间的关系

为了不失一般性起见，我们假设给定的图G是连通的。通过节点v_1，v_2，…，v_t的集合将G分解为两个子图G'与G''，使得G由G'的节点v'_1，v'_2，…，v'_t分别与G''的节点v''_1，v''_2，…，v''_t重合而形成。我们假设G'是连通的且G''有k个连通片。令T与T^x_k分别是G与G^x中的树与k-树的集合（$x='$或$''$）。对于$k=1$的情况，我们定义$T^x=T^x_1$，即是G^x中树的集合。又令P'_{ij}与P''_{ij}分别是在G'与G''中，连接节点v'_i与v'_j之间以及v''_i与v''_j之间的两条通路。因为G''有k个连通片，所以v''_1，v''_2，…，v''_t可分为k个互不相交的子集。为简单起见，我们假设在一个子集中的节点依顺序标记。例如v''_9，v''_{10}，v''_{11}，v''_{12}以及v''_{13}是一个子集的节点。

引理1.（*Hakimi*和*Green*）

如果$k=1$，那么

$$T=\frac{\partial^{t-1}(T'\times T'')}{\partial(P'_{12}\cup P''_{12})\partial(P'_{23}\cup P''_{23})\cdots\partial(P'_{t-1,t}\cup P''_{t-1,t})}$$

定理1.

$$T=\frac{\partial^{t-k}(T'\times T''_k)}{\partial(P'_{12}\cup P''_{12})\partial(P'_{23}\cup P''_{23})\cdots\partial(P'_{t-1,t}\cup P''_{t-1,t})}$$

对于$P''_{ij}=\phi$，不用对$(P'_{ij}\cup P''_{ij})$取偏导数。（注意有$k-1$条这种零通路。[1]）

证明：我们对G''中的连通片数k用归纳法来证明该定理。对于$k=1$的情况，该定理成立。

1 类似定理1的结果最近由Jong等人给出。

假设该定理对于任何具有$k-1$个（或少于$k-1$个）连通片的G''成立，我们将证明该定理对具有k个连通片的G''也成立。

令G''_1，G''_2，…，和G''_k是G''的各个连通片，使得G''_i与G'通过节点t_i的一个集合而连接，即$t=t_1+t_2+\cdots+t_k$。为方便起见，我们假设在G''中v''_1，v''_2，…，v''_t已采用这种方法标号，即v''_y在G''_i中，v''_z在G''_j中，且若$i<j$，则$y<z$。利用归纳法的假设，子图$G-G''_k$的树的集合T^*由下式给出：

$$T^* = \frac{\partial^{t-t_k-k+1}T' \times T^*_{k-1}}{\partial(P'_{12}\cup P''_{12})\partial(P'_{23}\cup P''_{23})\cdots\partial(P'_{t-t_k-1,t-t_k}\cup P''_{t-t_k-1,t-t_k})}$$

此处T^*_{k-1}是在$G''-G''_k$中（$k-1$）树的集合。利用引理1，G中的树的集合由下式给出：

$$T = \frac{\partial^{t_k-1}T^* \times T^{@}}{\partial(P'_{t-t_k+1,t-t_k+2}\cup P''_{t-t_k+1,t-t_k+2})\cdots\partial(P'_{t-1,t}\cup P''_{t-1,t})}$$

此处$T^{@}$是G''_k中树的集合。因为利用(3)式

$$T^* \times T^{@} = \frac{\partial^{t-t_k-k+1}T' \times T^*_{k-1}\times T^{@}}{\partial(P'_{12}\cup P''_{12})\partial(P'_{23}\cup P''_{23})\cdots\partial(P'_{t-t_k-1,t-t_k}\cup P''_{t-t_k-1,t-t_k})}$$

且$T^*_{k-1}\times T^{@} = T''_k$立即得到此定理。定理证毕。

在下面，所谓G的f回路集，我们是指G的基本回路的一个集合。

定理2

如果C_{f1}，C_{f2}，…，C_{fn}是G的基本回路集，那么

$$T = \frac{\partial^n\{G\}}{\partial C_{f1}\partial C_{f2}\cdots\partial C_{fn}}$$

证明：对零度n我们利用归纳法来证明该定理。对于$n=1$的情况显然此定理成立，因为该图仅包含了一个回路。我们假设该定理对于任意一个零度为（$n-1$）[或少于($n-1$)]的图成立。令G'是从G移去了相对所选树的一个连支e而得到的图。因为e仅包含在一个基本回路集内，令该基本回路集为C_{fn}。容易证明G'仍然是连通的且其零度为$n-1$，此外，C_{f1}，C_{f2}，…，$C_{f(n-1)}$是G'的f回路集。利用归纳法的假设，G'的树的集合T'为：

$$T' = \frac{\partial^{n-1}\{G'\}}{\partial C_{f1}\partial C_{f2}\cdots\partial C_{f(n-1)}}$$

利用引理1，G的树的集合T由下式给出

$$T = \partial(T'\times\{e\})/\partial C_{fn}$$

因为利用(3)式，

$$T'\times\{e\} = \frac{\partial^{n-1}\{G'\}\times\{e\}}{\partial C_{f1}\partial C_{f2}\cdots\partial C_{f(n-1)}}$$

且$\{G'\}\times\{e\}=\{G\}$，该定理立即得到，定理证毕。

引理2

如果g、g_1与g_2是G的子图，H是G的子图集合，那么

$$\frac{\partial H}{\partial(g_1\oplus g_2)} = \frac{\partial H}{\partial g_1}\oplus\frac{\partial H}{\partial g_2},$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial g\partial g} = \frac{\partial^2 H}{\partial g^2} = H$$

定理3

如果C_1，C_2，…，C_n是G的独立回路或为几个边不相重的回路之并，那么

$$T=\frac{\partial^n\{G\}}{\partial C_1\partial C_2\cdots\partial C_n}$$

重复应用(1)式、引理2，同时考虑到任何一个回路或几个边不相重的回路之并可以表示为f回路集的线性组合（环和）。上述定理便容易得到证明。

推论1.

如果G_k是一个从G将节点v_1，v_2，…，v_k合并（短接）在一起然后移去所有由此而产生的自环而得到的图，那么将节点v_1，v_2，…，v_k分离的k-树集合$T_{1,2,\cdots,k}$由下式给出：

$$T_{1,2,\cdots,k}=\frac{\partial^u\{G_k\}}{\partial C_1\partial C_2\cdots\partial C_u}$$

式中C_1，C_2，…，C_u是G_k中的u个独立回路或为几个边不相重的回路之并，u是G_k的零度。

我们将用下列例子来说明这一点。

例1.

假设如图1(a)所示图G的树集合是所求取的。又假设图G已分为如图1(b)所示的两个子图G'与G''。令$P'_{12}=bd$，$P'_{34}=bc$，$P''_{12}=f$以及$P''_{34}=e$。注意我们并不关心求取P'_{23}，因为$P''_{23}=\phi$。G'和G''的树集合T'和2-树集合T''_2分别给出如下：

$$T'=\{abc,\ abd,\ acd,\ bcd\}\text{和}T''_2=\{ef\}$$

根据定理1，G的树集合T由下式给出：

$$T=\frac{\partial^2T'\times T''_2}{\partial(P'_{12}\cup P''_{12})\partial(P'_{34}\cup P''_{34})}=\frac{\partial^2\{abc,\ abd,\ acd,\ bcd\}\times\{fe\}}{\partial bdf\ \partial bce}$$

$$=\frac{\partial}{\partial bdf}(\{abcf,abdf,acdf,bcdf\}\oplus\{abef,adef,bdef\}\oplus\{acfe,adfe,\ dcfe\})$$

$$=\{abc,\ abd,\ acd,\ bcd,\ abe,\ bde,\ ace,\ dce\}$$
$$\oplus\{abf,\ acf,\ bcf,\ bfe,\ cfe\}\oplus\{acf,\ adf,\ dcf,\ afe,\ dfe\}$$
$$=\{abc,\ abd,\ acd,\ bdc,\ abe,\ bde,\ ace,\ dce,\ abf,\ bcf,\ bfe,$$
$$cfe,\ adf,\ dcf,\ afe,\ dfe\}$$

我们也可利用定理3来产生G的树集合T。令$C_1=ade$，$C_2=bce$和$C_3=bdf$。则

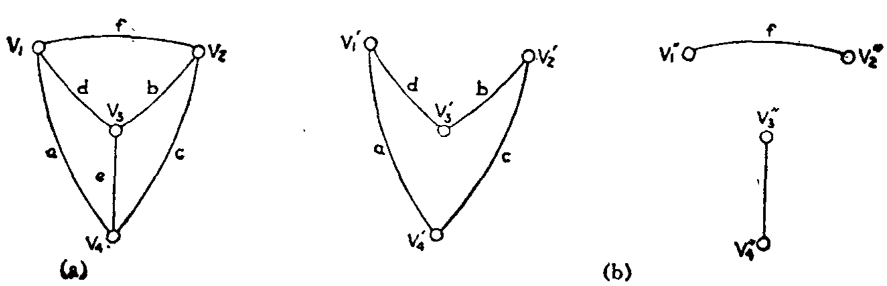

图1　线图G及其分解(a)G.(b)G'与G'' *

$$T=\frac{\partial^3\{G\}}{\partial C_1\partial C_2\partial C_3}=\frac{\partial^3\{abcdef\}}{\partial ade\ \partial bce\ \partial bdf}=\frac{\partial^2(\{abcde\}\oplus\{abcef\}\oplus\{acdef\})}{\partial ade\ \partial bce}$$

$$=\frac{\partial(\{abcd\}\oplus\{abde\}\oplus\{acde\}\oplus\{abcf\}\oplus\{abef\}\oplus\{acef\}\oplus\{acdf\}\oplus\{adef\})}{\partial ade}$$

$$=\{abc\}\oplus\{bcd\}\oplus\{abd\}\oplus\{abe\}\oplus\{bde\}\oplus\{acd\}\oplus\{ace\}\oplus\{cde\}\oplus\{bcf\}$$
$$\oplus\{abf\}\oplus\{bef\}\oplus\{acf\}\oplus\{cef\}\oplus\{acf\}\oplus\{cdf\}\oplus\{adf\}\oplus\{aef\}\oplus\{def\}$$
$$=\{abc,\ bcd,\ abd,\ abe,\ bde,\ acd,\ cde,\ bdf,\ abf,\ bef,\ cef,\ cdf,\ adf,\ aef,\ def,\ ace\}$$

4.补树、补k-树和独立割集之间的关系

本节的目的是导出与前一节中相对偶的一些定理。我们将用一组独立的割集来代替一组独立的回路从而得到补树及补k-树的集合。

一个补树及一个补k-树分别定义为给定图G的一个树的补图及一个k-树的补图。为方便起见，符号$\bar{t}_{1,2,\cdots,k}$用来表示取k-树$t_{1,2,\cdots,k}$的补图而得到的补k-树，此处$t_{1,2,\cdots,k}$是G中节点v_1，v_2，…，v_k分离的一个k-树。类似地，$T_{1,2,\cdots,k}$及$\bar{T}_{1,2,\cdots,k}$分别表示在G中由$t_{1,2,\cdots,k}$及$\bar{t}_{1,2,\cdots,k}$得到的k-树及补k-树的集合。对于$k=1$的情况，我们定义$t=t_1$，即是G中的一个树；$\bar{t}=\bar{t}_1$是G中的一个补树；$T=T_1$，即是G的树集合；$\bar{T}=\bar{T}_1$是G的补树集合。

定理4.

如果$Q_{ij}=e_1e_2\cdots e_h$是一个割集，它把G中的节点v_i与v_j分离，如果$Y(\bar{e}_q)$是G的2-树$t_{i,j}$的集合，其中每一个2-树不含有e_q边，$q=1,\ 2,\ \cdots k$，那么G的树集合T由下式给出为：

$$T=Z(e_1)\oplus Z(e_2)\oplus\cdots\oplus Z(e_k)$$

式中$Z(e_q)=\{e_q\}\times Y(\bar{e}_q)$，$q=1,\ 2,\ \cdots,\ k$

证明：显然每一个$Z(e_q)$的元素或者是含有G中e_q边的一个树，或者是含有G的一个回路的子图。下面，我们将证明如果是一个树的话，它必须在$Z(e_q)$的集合中出现奇数次，且如果是含有一个回路子图的话，它将在$Z(e_q)$的集合中出现偶数次。

令t是G的一个树且P_{ij}是t中连接v_i和v_j之间的唯一通路。因为P_{ij}和Q_{ij}必须具有奇数个共有元素[2]。为不失一般性起见，我们假定，$t=e_1e_2\cdots e_{2h-1}\cup t'$，此处$2h-1\leq k$，$t'$是从$t$移去了$e_1$，$e_2$，…，$e_{2h-1}$后而得到的子图，$e_1$，$e_2$，…，$e_{2h-1}$是通路$P_{ij}$和割集$Q_{ij}$之间的公共边。由此得出$t$将出现在集合$Z(e_1)$，$Z(e_2)$，…，$Z(e_{2h-1})$中。下面，我们必须证明树$t$不出现在集合$Z(e_u)$中，$u=2h$，$2h+1$，…，$k$。假定不是如此，即假设树$t$也包含在$Z(e_u)$中，显然，边$e_u$必须包含在$P_{ij}$中。否则，子图$t-e_u$将不是$G$中形如$t_{i,j}$的一个2-树。于是$e_u$在$P_{ij}\cap Q_{ij}$中，因为$P_{ij}\cap Q_{ij}=e_1e_2\cdots e_{2h-1}$，同时$e_u$又不在$e_1e_2\cdots e_{2h-1}$之中，于是出现了矛盾。因此，$G$的每一个树都在集合$Z(e_q)$中出现奇数次。

令z是在集合$Z(e_q)$中包含有一个回路的子图，因为一个回路和一个割集的公共边总是为偶数的[2]，为不失一般性起见，我们假设$z=e_1e_2\cdots e_{2w}\cup z'$，此处$2w\leq k$，$z'$是从该回路由$z$移去$e_1, e_2, \cdots$，和$e_{2w}$而得到的子图。于是，$z$将出现在含有集合$Z(e_q)$的$2w$个集合中，即出现$Z(e_1)$，$Z(e_2)$，…及$Z(e_{2w})$中，显然$Z$不会出现在任何集合$Z(e_v)$中，$v=2w+1$，$2w+2$，…，$k$。否则，子图$z-e_v$将不是$G$中形如$t_{i,j}$的一个2-树，因为它含有一个回路。于是，$Z(e_q)$的任何元素，如果不是一个树，它将在集合$Z(e_q)$中出现偶数次。这就完成了本定理的证明。

现在定理4可用来产生G的补树集合。

定理5.

如果Q_{ij}是把G中的节点v_i和v_j分离的割集，那么G的补树集合$\bar{T}$由下式给出：

$$T=\frac{\partial T_{i,j}}{\partial Q_{ij}}$$

证明：

$X(e_q)=\{x;\ x在\overline{T}_{i,j}中，且e_q在x中\}$，

$X(\bar{e}_q)=\{x;\ x在\overline{T}_{i,j}中，且e_q不在x中\}$，$q=1，2，\cdots，k$以及$Q_{ij}=e_1e_2\cdots e_k$。

因为

$$\overline{T}_{i,j}=X(e_1)\oplus X(\bar{e}_1)=X(e_2)\oplus X(\bar{e}_2)=\cdots=X(e_k)\oplus X(\bar{e}_k)$$

由此得到：

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overline{T}_{i,j}}{\partial Q_{ij}}&=\frac{\partial\overline{T}_{i,j}}{\partial e_1}\oplus\frac{\partial\overline{T}_{i,j}}{\partial e_2}\oplus\cdots\oplus\frac{\partial\overline{T}_{i,j}}{\partial e_k}\\&=\left[\frac{\partial X(e_1)}{\partial e_1}\oplus\frac{\partial X(\bar{e}_1)}{\partial e_1}\right]\oplus\cdots\oplus\left[\frac{\partial X(e_k)}{\partial e_k}\oplus\frac{\partial X(\bar{e}_k)}{\partial e_k}\right]\\&=\frac{\partial X(e_1)}{\partial e_1}\oplus\frac{\partial X(e_2)}{\partial e_2}\oplus\cdots\oplus\frac{\partial X(e_k)}{\partial e_k}\end{aligned}$$

下面，我们观察到$\partial X(e_q)/\partial e_q$的每一个元素是$\{e_q\}\times Y(\bar{e}_q)$中唯一元素的补，此处$Y(\bar{e}_q)$是$G$的2-树$t_{i,j}$的集合，其中每一个2-树不包含$e_q$边。因此，我们定义：

$\overline{H}=\{x;\ x是G中h的补，h在H中\}$，

此处H是G的子图的集合，$Z(e_q)=\{e_q\}\times Y(\bar{e}_q)$，我们有：

$$\frac{\partial\overline{T}_{i,j}}{\partial Q_{ij}}=\overline{Z}(e_1)\oplus\overline{Z}(e_2)\oplus\cdots\oplus\overline{Z}(e_k)=\overline{H}_1$$

此处$H_1=Z(e_1)\oplus Z(e_2)\oplus\cdots\oplus Z(e_k)$。利用定理4，我们有$H_1=T$，即$G$的树集合。立即得出该定理，定理证毕。

上述定理的一个简单的推广如下。

推论2.

如果$Q_{k,12\cdots(k-1)}$是一个割集，它把v_k与v_1，v_2，…，及v_{k-1}分离，那么

$$\overline{T}_{1,2,\cdots,k-1}=\frac{\partial\overline{T}_{1,2,\cdots,k}}{\partial Q_{k,12\cdots(k-1)}}$$

下面，所谓G的f割集，我们意指它是G的基本割集的一个集合。

定理6：

如果Q_{f1}，Q_{f2}，…，及Q_{fr}是G的r个f割集，那么

$$\overline{T}=\frac{\partial^r\{G\}}{\partial Q_{f1}\partial Q_{f2}\cdots\partial Q_{fr}}$$

证明：对G的秩r我们将用归纳法来证明此定理。显然，对于$r=1$的情况，该定理成立。假设该定理对于秩为$r-1$（或小于$r-1$）的任何图成立，我们将证明该定理对于任何秩为r的图也成立。

令G'是一个从G首先将一条边e的两端点合并（短接）在一起，然后移去e而得到的图形。此处e是f割集的确定树中的一个树支。因为e仅可能在f割集的一个集合中，令该割集为Q_{fr}。现在G'的秩为$r-1$，且它含有割集Q_{f1}，Q_{f2}，…，$Q_{f(r-1)}$作为其f割集。利用归纳法的假设，G'的补树$\overline{T}'$的集合为