平面几何证题方法与技巧

PMJH ZTF YJQ

岳明义　冯志明
尹建堂　王经堂

河南大学出版社

平面几何
证题方法与技巧

岳明义　冯志明
尹建堂　王经堂　编

河南大学出版社

（豫）新登字第09号

平面几何证题方法与技巧

岳明义　冯志明
尹建堂　王经堂　编
责任编辑　程　庆

河南大学出版社出版
（开封市明伦街85号）
河南省新华书店发行
河南大学印刷厂印刷

开本：787×1092毫米　1/32　印张：4.5　字数：97千字
1991年5月第1版　1992年5月第2次印刷
印数：7001—22000　定价：1.70元

ISBN 7-81018-592-6/G·236

前　言

平面几何是中学的一门重要数学课程。掌握平面几何中的证题方法与技巧，对于学习这门知识，尤其是对于训练严谨、灵活的思维，有着重要意义。如果说数学是训练思维的体操，那么平面几何就是这套体操的基本功。

本书对平面几何的证题方法进行归纳分类。全书分为“证法通论”与“证法分论”两章。通论部分简述证题的一般方法。分论部分按题目的论断分类讲解，每一类总结出常用方法与技巧，举出若干典型例题，进行启发式的分析与条理清晰的证明，使读者了解证题思路，掌握证题方法与技巧。每节配有精选的练习题，书末对练习题给出扼要的证明或提示。

本书是中学生和知识青年学习平面几何的辅导读物，也是中学教师的得力参考书。

由于编者水平有限，书中恐有不当之处，敬请读者批评指正。

编　者

1990年10月

目　录

第一章　证法通论……………………………………………（1）

§1　命题的四种形式……………………………………（1）

§2　证题的方法与注意事项……………………………（3）

§3　综合法………………………………………………（4）

§4　分析法………………………………………………（6）

§5　重合法………………………………………………（10）

§6　反证法………………………………………………（11）

§7　同一法………………………………………………（14）

第二章　证法分论……………………………………………（18）

§1　等线段和等角的证法………………………………（18）

§2　倍量、半量与两量和、差证法……………………（27）

§3　不等量问题证法……………………………………（34）

§4　平行问题证法………………………………………（39）

§5　垂直问题证法………………………………………（43）

§6　线段平方问题证法…………………………………（47）

§7　定值问题证法………………………………………（52）

§8　比例线段问题证法…………………………………（58）

§9　切线问题证法………………………………………（73）

§10　面积等量问题证法……………………（76）
§11　三线共点问题证法……………………（82）
§12　三点共线问题证法……………………（87）
§13　四点共圆问题证法……………………（92）
§14　三圆共点问题证法……………………（97）
§15　极大极小问题证法……………………（101）

练习题证明与提示………………………………（106）

第一章　证法通论

§1　命题的四种形式

判断性的语言，叫做命题．每个命题都可分为题设和结论两部分．题设是已知事项，结论是由题设推出的事项．通常把命题写成“如果…，那么…”或“若…，则…”的形式．一般用A代表命题的条件，用B代表命题的结论．由此，命题可表示为：若A，则B．

命题有下述四种形式：

（1）原命题：若A，则B．

（2）逆命题：若B，则A．

（3）否命题：若$\overline{A}$，则$\overline{B}$．

（4）逆否命题：若$\overline{B}$，则$\overline{A}$．

（注：“$\overline{A}$”是否定A的意思，读作“非A”．）

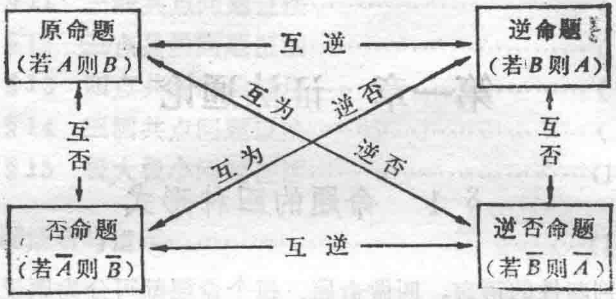
四种形式的命题有下述关系：

原命题和逆命题是互逆的，否命题和逆否命题也是互逆的．

原命题和否命题是互否的，逆命题和逆否命题也是互否的．

原命题和逆否命题是互为逆否的，逆命题和否命题也是互为逆否的．

四种命题的相互关系如下图所示：



命题有真有假．关于四种命题真假的关系，先看例子：

（1）原命题：两直线和第三直线相交，若两直线平行，则同位角相等．（真）

逆命题：两直线和第三直线相交，若同位角相等，则两直线平行．（真）

否命题：两直线和第三直线相交，若两直线不平行，则同位角不相等．（真）

逆否命题：两直线和第三直线相交，若同位角不相等，则两直线不平行．（真）

（2）原命题：若两角是对顶角，则此两角相等．（真）

逆命题：若两角相等，则它们是对顶角．（假）

否命题：若两角非对顶角，则它们不相等．（假）

逆否命题：若两角不相等，则它们非对顶角．（真）

（3）原命题：若一四边形是平行四边形，则它的对角线互相垂直．（假）

逆命题：若一四边形的对角线互相垂直，则此四边形是平行四边形.（假）

否命题：若一四边形不是平行四边形，则它的对角线不互相垂直.（假）

逆否命题：若一四边形的对角线不互相垂直，则这个四边形不是平行四边形.（假）

从上面的例子可以发现，互逆或互否的两个命题，可以同真或同假，也可以一真一假.而互为逆否的两个命题则必然同真或同假. 互为逆否的两命题的这个性质，通常叫等价或等效.

下面我们证明：互为逆否的两个命题真则同真，假则同假.

（1）设“有A则有B” 为真，则无B亦无A. 因若有A，则依“有A则有B”，则必有B，这与无B之假设矛盾.故一命题为真，其逆否命题亦必为真.

（2）设有一命题为假，则其逆否命题亦必为假.因若为真，则依（1）的证明，二者皆真，这与假设矛盾.

例如，对顶角必相等，已证它为真，则不相等的两角，必非对顶角.

§2 证题的方法与注意事项

几何证题的方法，有直接证法与间接证法两大类.

由题设出发，根据公理与定理，逐步推得所要证明的结论，叫做直接证法.平面几何中多数定理都采用此法.有的定理，往往不易直接证明，而改证它的等价命题成立，这种

证法叫做间接证法。

常用的直接证法有综合法、分析法、重合法；间接证法有反证法与同一法。

证明几何题时，要注意以下事项：

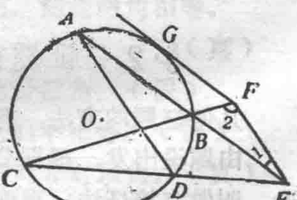
（1）证题时，要分清什么是假设，什么是结论，并分别书写在已知、求证之后，然后再寻找证题方法，着手证明。论证时，必须以定义、公理和定理为依据，将条件找够，切勿条件未充分时就下结论。

（2）证题时所画的图形，要符合题设条件，不可遗漏，也不可添加。如题设直角三角形，就不要画成任意三角形；题设是一般的四边形，就不能画成梯形或平行四边形。

（3）所画图形要尽可能准确，这有助于看出证法。否则，就不利于证明，甚至导出错误。

§3 综合法

由题设条件出发，引用公理或定理，逐步推导，直至题之结论成立，这种证法叫做综合法。这是由因导果的方法，是几何证题中最基本最常用的方法。其思路是：题设$\Rightarrow A\Rightarrow B\Rightarrow C\cdots\Rightarrow$结论。



例 1 延长圆O的两弦AB和CD，交于圆外一点E。过E点作DA的平行线交CB的延长线于F，自F点作圆O的切线，切点为G。

求证：$FG=FE$。

证明： $\because EF \parallel AD$，$\therefore \angle 1 = \angle A$。

又$\because \angle C = \angle A$，$\therefore \angle 1 = \angle C$。

在$\triangle CEF$与$\triangle EFB$中，$\angle 2$是公共角，$\angle C = \angle 1$，

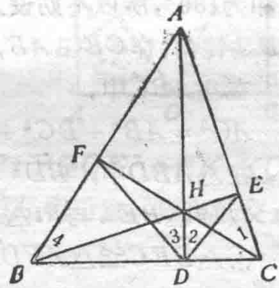
$\therefore \triangle EFB \backsim \triangle CEF$，从而$EF : FC = FB : FE$，

即 $FE^2 = FB \cdot FC$。

$\because FG$是圆O的切线，FBC是割线，

$\therefore FG^2 = FB \cdot FC$，从而$FG^2 = FE^2$，于是$FG = FE$。

例 2 设锐角三角形ABC之三高为AD、BE、CF，垂心为H。求证：AD平分$\angle EDF$。



证明：

$\because \angle HDC + \angle HEC = 180°$，

$\therefore H$、E、C、D共圆，

$\therefore \angle 1 = \angle 2$。

同理，$\angle 3 = \angle 4$。

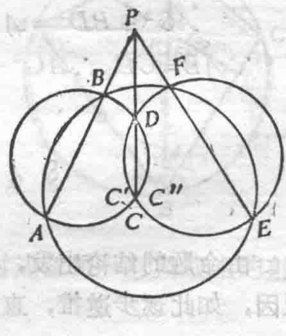
在$Rt\triangle BHF$与$Rt\triangle CHE$中，$\angle BHF = \angle CHE$，

$\therefore \angle 1 = \angle 4$。

综合上述，知$\angle 2 = \angle 3$，

即AD平分$\angle FDE$。

例 3 设三圆相交如图，试证其三公共弦相交于一点。



证明： 如图，设相交三圆的共公弦为AB、CD、EF。延长AB和EF交于P点，连PD，延长它分别交另两圆于C'、C''。

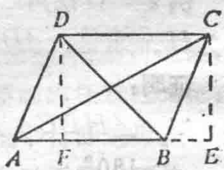
$$\left.\begin{array}{l}A、B、E、F\text{共圆}\Rightarrow PB\cdot PA=PF\cdot PE\\ C''、E、F、D\text{共圆}\Rightarrow PD\cdot PC''=PF\cdot PE.\end{array}\right\}$$

C'、D、B、A共圆$\Rightarrow PD\cdot PC'=PB\cdot PA$

$\Rightarrow PD\cdot PC''=PD\cdot PC'\Rightarrow PC'=PC''$

$\Rightarrow C'$与C''共为一点$C\Rightarrow AB$、CD、EF 三弦相交于一点。

例 4 试证平行四边形两条对角线的平方和等于它的各边的平方和。



证明：因平行四边形$ABCD$两邻角和为180°，所以不妨设$\angle A$是锐角，$\angle B$是钝角。作$CE\perp AB$，$DF\perp AB$。

在$\triangle ABC$中，

$AC^2=AB^2+BC^2+2AB\cdot BE$。 ①

在$\triangle ABD$中，$BD^2=AD^2+AB^2-2AB\cdot AF$。 ②

在$Rt\triangle BEC$与$Rt\triangle AFD$中，$BC=AD$，$CE=DF$，

$\therefore\triangle BEC\cong\triangle AFD$，$\therefore BE=AF$。

由上可知，$2AB\cdot BE=2AB\cdot AF$。

把①、②两式相加，得

$$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+AD^2+AB^2.$$

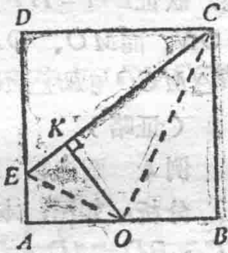
$\because AB=CD$，$\therefore AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2$。

§ 4 分析法

由命题的结论出发，假设结论成立，然后探求它成立的原因，如此逐步逆推，直至命题的假设，这种证法叫做分析

法．这是执果索因的方法．其思路是：结论$\Leftarrow A \Leftarrow B \Leftarrow C \cdots \Leftarrow$题设．

例 1 在正方形$ABCD$的边AD上取一点E，使$AE=\frac{1}{4}AD$．自AB的中点O作$OK\perp EC$，K为垂足，则$OK^2=EK\cdot KC$．



分析：欲证$OK^2=EK\cdot KC$，连EO，OC，只要证$\angle EOC=90°$．

证明：设正方形边长为4．由勾股定理，在$\triangle EOC$中，$EO=\sqrt{5}$，

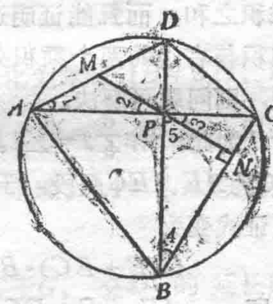
$OC=\sqrt{20}$，$CE=5$．

$\therefore EO^2+OC^2=5+20=25$

$=CE^2$，

$\therefore\triangle EOC$是$Rt\triangle$，$\angle EOC=90°$，于是$OK^2=EK\cdot KC$．

例 2 圆内接四边形之对角线若互相垂直，则自其交点至一边之垂线必平分其对边．



分析：如图，$\triangle APD$为$Rt\triangle$，欲证$AM=MD$，必须$MA=MP$；欲证$MA=MP$，必须$\angle1=\angle2$．

现有$\angle1=\angle4$，$\angle2=\angle3$；

且 $\angle3=\angle4$（同为$\angle5$的余角），

故 $\angle1=\angle2$成立．

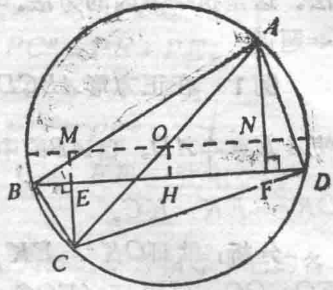
（证略）

例 3 设圆内接四边形之一条对角线为圆的直径，则此四边形两对边在另一对角线上的射影必相等．

分析：如图，欲证

$BE=FD$，

即证$EH=HF$（H为BD之中点）。



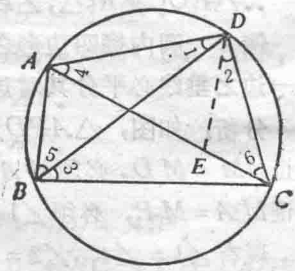
过O作$MN\parallel BD$，连OH，延长CE交MN于M。于是，欲证$EH=HF$，可证$MO=ON$。而MO、ON分别是$Rt\triangle MCO$与$Rt\triangle AON$的两边，且此两三角形易证全等。

（证略）

例 4 圆内接四边形二对角线之积等于对边之积的和。

分析：如图，本题求证

$$AC\cdot BD=AD\cdot BC+CD\cdot AB.$$



上式右边是两个乘积之和，如果能把左边也分成两个乘积之和，而且能证明这两个乘积与右边的两个乘积分别相等，则问题可解决。

为此，作$\angle 2=\angle 1$．E分AC为AE、EC两段，于是原求证式变为

$$(AE+EC)\cdot BD=AD\cdot BC+CD\cdot AB,$$

即 $$AE\cdot BD+EC\cdot BD=AD\cdot BC+CD\cdot AB.$$

下面，我们证$AE\cdot BD=AD\cdot BC$，$EC\cdot BD=CD\cdot AB$。

简证：在$\triangle AED$与$\triangle BCD$中，

$$\left.\begin{array}{l}\angle 3=\angle 4\\ \angle ADE=\angle BDC\end{array}\right\}\Rightarrow\triangle AED\backsim\triangle BCD\Rightarrow\frac{AE}{BC}=\frac{AD}{BD}$$

$$\Rightarrow AE\cdot BD=AD\cdot BC.$$

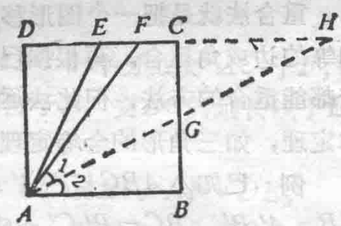
在$\triangle ABD$与$\triangle DEC$中，

$$\left.\begin{array}{l}\angle 1=\angle 2\\ \angle 5=\angle 6\end{array}\right\}\Rightarrow\triangle ABD\backsim\triangle DEC\Rightarrow\frac{AB}{EC}=\frac{BD}{CD}$$

$$\Rightarrow EC\cdot BD=CD\cdot AB.$$

例 5 设E是正方形$ABCD$的CD边的中点，F是EC的中点，则$\angle DAE=\frac{1}{2}\angle FAB$.

分析：作$\angle FAB$的平分线交BC于G，则本题的求证无异于求证$\angle DAE=\angle 2$。这可从$Rt\triangle DAE$与$Rt\triangle ABG$的全等来考虑。为此须先证G为BC边的中点。至此图上已无适当的点线可资联系，从而延长AG交DC延长线于H，使问题转化为求证$AB=CH$。联系到F是EC的中点，问题又变成推出$FH=\frac{5}{4}AB$成立。但是由$\angle 1=\angle H\Rightarrow FH=FA$，又由勾股定理，$FA=\frac{5}{4}AB$是明显的。



证明：作$\angle FAB$的平分线交BC于G，交DC的延长线于H。由$\angle 1=\angle 2=\angle H$，知$FA=FH$。

在$Rt\triangle DAF$中，易求得$AF=\frac{5}{4}AB$。

$\therefore CH = FH - FC = \frac{5}{4}AB - \frac{1}{4}AB = AB.$

由上所述知，$\triangle ABG \cong \triangle CGH \Rightarrow BG = GC \Rightarrow G$是$BC$的中点。

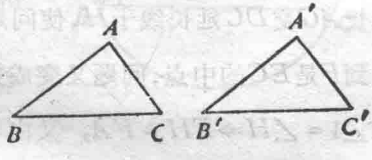
易见 $Rt\triangle DAE \cong Rt\triangle ABG \Rightarrow \angle DAE = \angle 2$

$$\Rightarrow \angle DAE = \frac{1}{2}\angle FAB.$$

§5 重合法

重合法就是把一个图形移到另一个图形上去，先使其中相等的边或角重合，再根据已知条件，逐步推导其余对应元素都能重合的方法。但此法运用不甚方便，故除证明一些基本定理，如三角形的全等定理之外，不常采用。

例 已知$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，$\angle B = \angle B'$，$AB = A'B'$，$BC = B'C'$。求证：$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$。



证明：把$\triangle A'B'C'$移到$\triangle ABC$上去，使线段$B'C'$与线段BC重合，且点A'与点A在BC（$B'C'$）的同一侧。

$\because \angle B = \angle B'$，$\therefore$直线$AB$与直线$A'B'$重合。

又$\because AB = A'B'$，$\therefore$线段AB与线段$A'B'$重合，即点A与点A'重合，从而线段AC与$A'C'$重合。

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$。

练 习 一

1. 已知：$\odot O$的弦CD的延长线和切线TP相交于P，T为切点，$\angle CPT$的平分线和DT、CT分别交于F、E。求证：

(1) $TE = TF$；　　　　(2) $TE^2 = CE \cdot DF$。

2. 已知E、F分别为▱$ABCD$的边BC、CD的中点。试证AE、AF三等分对角线BD。

3. 设直线AD交$\angle AOB$的边OB的反向延长线于D，$OE \perp OB$，OE交AD于E，如果$DE = 2OA$，求证：

$$\angle EDO = \frac{1}{3}\angle AOB.$$

4. 设▱$ABCD$的对边AD、BC的中点为E、F，则BE、DF三等分对角线AC。

5. 已知$\triangle ABC$中，$\angle ABC$的平分线交AC于F，交$\triangle ABC$的外接圆于E，ED切圆于E，交BC的延长线于D。求证：

(1) $AC \parallel ED$；　　　　(2) $AE^2 = AF \cdot DE$。

6. 已知：正方形$ABCD$中，两对角线交于O点，P是OD上一点，$BQ \perp AP$于Q，交AC于R点。求证：

$$\triangle ABP \cong \triangle BCR.$$

§ 6 反证法

先假设命题中结论的否定事项成立，逐步推导，直至得出矛盾的结果，从而推翻了结论的否定事项，于是肯定了结论的正确。这种证法，叫做反证法。这实际是证明原命题的逆否命题。当定理不易直接证明时，常采用反证法。