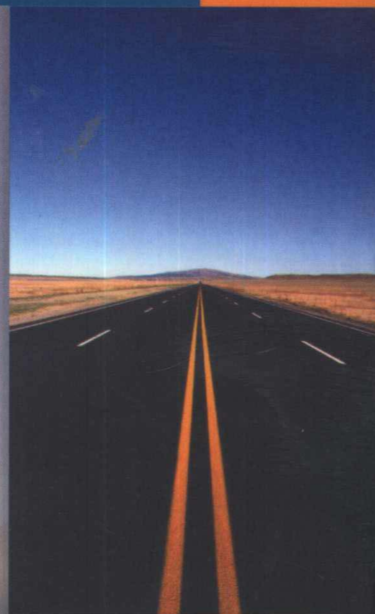
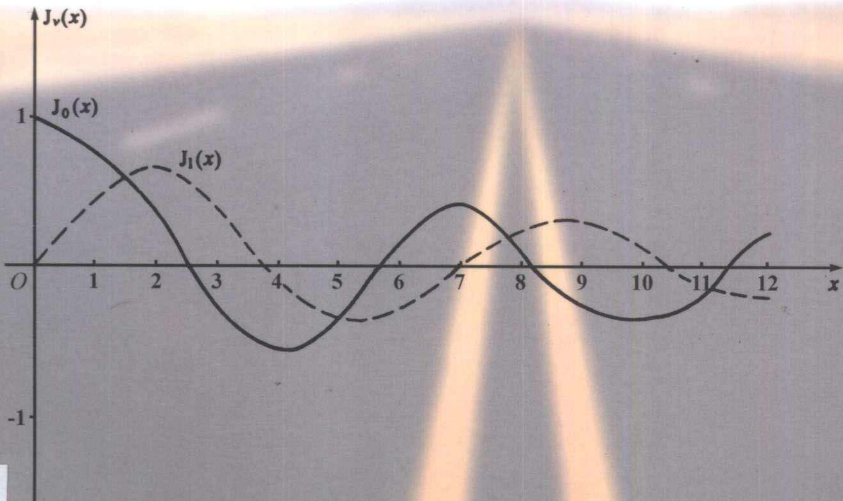
路桥结构理论与工程系列丛书

路面力学中的工程数学

郭大智　马松林　编著





哈尔滨工业大学出版社

路面力学中的工程数学

郭大智　马松林　编著

哈尔滨工业大学出版社
·哈尔滨·

内 容 提 要

本书是在道路工程专业研究生使用的讲义基础上，经修改、补充而成。本书内容包括特殊函数(伽马函数、超几何函数、勒让德多项式和贝塞尔函数等)和积分变换(傅里叶积分变换、拉普拉斯积分变换和亨格尔积分变换等)。

本书可供高等学校道路工程专业高年级学生、研究生，以及从事道路工程的设计、研究人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

路面力学中的工程数学/郭大智编著.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2001.8

ISBN 7-5603-1617-4

Ⅰ.路... Ⅱ.郭... Ⅲ.工程数学—应用—道路工程 Ⅳ.U412

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 24480 号

出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区教化街 21 号 邮编 150006
传 真 0451-6414749
印 刷 地矿部黑龙江测绘印制中心印刷厂
开 本 787×1092 1/16 印张 12 字数 283 千字
版 次 2001 年 8 月第 1 版 2001 年 8 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 7-5603-1617-4/TU·23
印 数 1~3 000
定 价 19.00 元

前　言

路面力学是拟定与研究沥青路面和水泥混凝土路面设计方法的理论基础，它包括层状弹性体系力学和层状粘弹性体系力学两大部分。为了适应培养研究生与开展路面设计理论和方法研究的需要，上海同济大学朱照宏教授、西安长安大学王秉纲教授和哈尔滨工业大学郭大智教授撰写了《路面力学计算》，并于1985年9月由人民交通出版社正式出版。这本书主要介绍均质体、双层体系和三层体系应力与位移的分析方法，为在我国普及路面力学知识起到了较大的促进作用。近几十年来，路面力学得到极大发展，尤其是我国的道路工作者做出卓越的成绩，将路面力学向前推进一大步。

1962年前后，为了建立柔性路面设计的理论基础，国内对层状弹性体系理论积极开展研究工作。为此，1963年本专题被列入国家十年科研规划重点课题的第2115项。当时，朱照宏教授利用轴对称洛甫位移函数求得双层和三层弹性体系在单圆均布垂直荷载作用下的应力与位移分量表达式；吴晋伟高级工程师根据轴对称苏斯威尔位移函数也导出双层和三层弹性体系在单圆均布垂直荷载作用下的应力和位移分量解析解。应当指出，这两种解法尽管表达式有所不同，但其计算结果却完全相同，而且是非常实用和有效的。1973年左右，笔者采用非轴对称洛甫位移函数得到双层和三层弹性体系在单圆均布单向水平荷载作用下的应力与位移分量理论解。这些成果虽然只是学习消化国外文献的结果，但它为我国今后的研究工作打下了良好的基础。

采用位移函数法求解应力与位移分量一般解时，必须满足如下两条要求：一是必须找出应力与位移分量与位移函数的关系式；二是位移函数必须为某一微分方程的解，否则，无法利用位移函数求解。因此，笔者和钟阳教授根据拉梅方程式，采用积分变换方法，分别以不同的物理量作为基本变量求解。在笔者的方法中，采用位移分量作为基本变量求解；钟阳教授先求得体积变形的解，然后再利用体积变形和位移分量的关系式求得位移分量的一般解。这两种解法大同小异，均属位移法求解。另外，钟阳教授还根据状态方程提出传递矩阵法，导出应力与位移分量的一般解。这三种求应力与位移一般解的方法，不仅解法新颖，而且应用广泛。

随着国民经济的高速发展，高等级公路也得到迅速发展。高等级公路必须修筑高等级路面，才能适应交通量高速发展的需要。对于高等级路面，其路面层数往往超过三层，有的路面层数达到七层之多。因此，对于多层弹性体系的应力与位移如何计算，是一个急需解决的问题。在这方面，吴晋伟高级工程师提出“反力递推法”，笔者提出“系数递推法”，王凯教授提出“递推回代法”。这三种解法均优于“矩阵解法”。

1964年，由于路面弯沉仪在我国全面推广应用，需要解决双圆和多圆荷载作用下的应力和位移分量的计算问题，笔者采用“两次坐标变换法”，导出多圆荷载作用下某点的应力和位移叠加公式。

在分析单圆均布单向水平荷载下层状弹性体系表面($z=0$)圆形周边($r=\delta$)处的应力时，发现其中某些应力值为无穷大。产生这种理论值与实际值不符的原因在于单向均布水

平荷载在周边处有“突弯”。笔者提出高次抛物面荷载,只要该荷载中的荷载系数取值适当,就会避免这种现象的产生。因此,有必要将这些成果加以总结,编辑成册。由于需要添加的内容较多,故决定编写《路面力学中的工程教学》、《层状弹性体系力学》、《层状粘弹性体系力学》等三本书。

在层状弹性体系力学和层状粘弹性体系力学中,经常要用到特殊函数和积分变换等数学知识,而这些数学内容在土建类本科教学中,有的很少涉及,有的未做介绍。因此,撰写一本介绍特殊函数和积分变换等数学知识的教材,供高等学校道路工程专业学生学习和使用,势在必行。由于本书是为道路工程专业学生,特别为研究生学习层状弹性体系力学和层状粘弹性体系力学打数学基础,所以在撰写过程中,着重于使学生能够充分掌握和学会应用这些数学知识,解决路面力学中的各类课题,而不过分强调数学理论的推导和严谨性。这样,具有大学本科水平的道路工程技术人员参阅本书时,也不会有太大的困难。

本书是在笔者1979年所撰写的《路面力学中的工程数学》一书基础上,经多次修改和补充编写而成。全书共分两篇,其中,第一篇介绍特殊函数,第二篇讲述积分变换理论。

特殊函数一般是指某类微分方程非有限解表示的函数,这类函数在科技领域中经常用到,比如超几何函数、勒让德函数、贝塞尔函数,以及许多正交多项式等;另外一些是由特定形式的积分所定义的函数,如Γ函数(伽马函数)、B函数(贝塔函数),还有从函数周期性来考虑的椭圆函数,这类函数与微分方程无关。

根据层状弹性体系力学和粘弹性体系力学的需要,本篇主要介绍Γ函数、B函数、超几何函数、勒让德多项式和贝塞尔函数等。在第一篇中,除了介绍这些函数的基本概念外,还给出关于函数的一些积分、级数和无穷乘积等表达式、渐近公式、函数之间的关系式,以及它们的常用性质。

在第二篇积分变换理论中,主要讲述傅里叶积分变换、拉普拉斯积分变换和亨格尔积分变换等积分变换理论。物理和技术科学方面的各种课题均可归结为线性微分方程式或方程组求解。这些数学物理微分方程采用古典求解方法存在不少缺点,有时难以用于实际课题,而采用积分变换理论求解,使所得到的解更为简捷。在层状弹性体系力学和层状粘弹性体系力学中,应用积分变换理论求解,不仅简捷,而且十分有效。

在本书编写过程中,曾得到侯云、郭玉青、谭忆秋、王彩霞、吴思刚、冯德有、王志永、姜丽伟、胡慧红等人的大力帮助,在此深表感谢。

本书除了可供高等学校道路工程专业高年级学生、研究生学习使用外,还可供从事路面工程的设计、研究人员学习参考。因受个人学识及时间所限,书中不妥之处在所难免,敬请读者批评指正,以便进一步修正补充。

郭大智

2001年3月

目　　录

第一篇　特殊函数

第二篇　积分变换

第一篇　特殊函数

第一章　伽马函数

由积分定义的特殊函数不下十余种，比如 Γ(Gamma) 函数（伽马函数）、B(Beta) 函数（贝塔函数）、菲涅尔函数、误差函数、正弦积分、余弦积分、指数积分、对数积分、不完全伽马函数和椭圆积分等。但是，只有 Γ 函数和 B 函数在层状弹性体系力学和层状粘弹性体系力学中得到广泛应用。因此，本章仅介绍 Γ 函数和 B 函数。

由于 Γ 函数和 B 函数均为欧拉(Euler) 积分所定义的特殊函数。它们之间有一定的关系，只要弄清这两类函数中的任何一类函数的性质，另一种函数的性质也就随之获得。对我们而言，研究 Γ 函数具有更大意义，因此本章主要论述 Γ 函数的性质。

第一节　欧拉积分

一、欧拉积分表达式

下述带参变量 p,q 的积分

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$$

称为**第一类欧拉积分**，它在 $p>0,q>0$ 的条件下收敛，故这个积分当 $p>0,q>0$ 时所确定的函数，称为 p,q 的 **B 函数**，记作

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x \tag{1.1.1}$$

在式(1.1.1) 中，若令 $x=1-t$，则可得

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 (1-t)^{p-1}t^{q-1}\mathrm{d}t=\mathrm{B}(q,p)$$

上式表明，B 函数具有对称关系。这一点，在后面的欧拉定理中也能得到印证。

若令 $x=\sin^2\theta$，则式(1.1.1) 可改写为下式

$$\mathrm{B}(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta \tag{1.1.2}$$

又令 $x = \frac{t}{1+t}$，则式(1.1.1) 又可改写为下述表达式

$$B(p,q) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}\mathrm{d}t}{(1+t)^{p+q}} \tag{1.1.3}$$

上述三式均为 B 函数的等价表述式，其中式(1.1.1) 和式(1.1.2) 为定积分表达式，而式(1.1.3) 为广义积分表达式。

具有如下形式的广义积分

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\mathrm{d}x$$

称为**第二类欧拉积分**。当 $p > 0$ 时，这个广义积分收敛，由它所确定的函数，称为 p 的 **Γ 函数**，记作

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\mathrm{d}x \tag{1.1.4}$$

若令 $x = t^2$，则式(1.1.4) 可表为下式

$$\Gamma(p) = 2\int_0^\infty t^{2p-1}e^{-t^2}\mathrm{d}t \tag{1.1.5}$$

又令 $x = -\ln y$，则式(1.1.4) 又可改写为下式

$$\Gamma(p) = \int_0^1 (\ln\frac{1}{y})^{p-1}\mathrm{d}y \tag{1.1.6}$$

再令 $x = \alpha u$，则式(1.1.4) 还可用下式表示

$$\Gamma(p) = \alpha^p\int_0^\infty u^{p-1}e^{-\alpha u}\mathrm{d}u \tag{1.1.7}$$

二、欧拉定理

从上述分析可以看出，Γ 函数和 B 函数都是由欧拉积分确定的特殊函数。它们之间的关系式可由下述欧拉定理确定。

当 $p > 0, q > 0$ 时，则有如下关系式

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{1.1.8}$$

【证】 由式(1.1.5) 可得

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

利用极坐标系来化简上式右端的积分，即令

$$x = r\sin\theta$$
$$y = r\cos\theta$$

则上式可改写为下式

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

又由式(1.1.2) 和式(1.1.5) 可知

$$B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\Gamma(p+q) = 2\int_0^{\infty} r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}dr$$

故可得如下关系式

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p,q)$$

即

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

上式就是欧拉定理，它建立起Γ函数与B函数的关系式。因此，只要弄清这两类函数中任何一类函数的性质，另一类函数的性质也就可以借助欧拉定理确定。由于Γ函数是应用最为广泛的特殊函数，故下面主要研究Γ函数的常用性质。

另外，根据欧拉定理也可证明B函数具有对称关系

$$B(p,q) = B(q,p)$$

【例1】 计算$\Gamma(1)$和$\Gamma(2)$之值。

【解】 根据式(1.1.4)，则可得

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^{\infty} = 1$$

$$\Gamma(2) = \int_0^{\infty} xe^{-x}dx = -\int_0^{\infty} x\,de^{-x} = -xe^{-x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x}dx$$

上式右端第一项xe^{-x}当x趋于无穷时，其值为不定型$\frac{\infty}{\infty}$，采用罗必塔(L'Hospital)法则处理，其值为零，又当$x=0$时，其值也为零，故有

$$\Gamma(2) = 1$$

【例2】 当$z>0$时，求证$\int_{-\infty}^{\infty} e^{zt-e^t}dt = \Gamma(z)$。

【证】 若令$u = e^t$，则有

$$dt = \frac{du}{u}$$

当$t=-\infty$时，$u=0$；$t=\infty$时，$u=\infty$，故可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{zt-e^t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} (e^t)^z e^{-e^t}dt = \int_0^{\infty} u^z e^{-u}\frac{du}{u} = \int_0^{\infty} u^{z-1}e^{-u}du = \Gamma(z)$$

【例3】 若$a>0, b>0, m>0, n>0, m+n-\frac{m}{a}>0$，

求证$\int_0^{\infty}\frac{t^{m-1}dt}{(1+bt^a)^{m+n}} = \frac{b^{-\frac{m}{a}}}{a}B(\frac{m}{a}, m+n-\frac{m}{a})$。

【证】 若令$x = bt^a$，则可得

$$t = (\frac{x}{b})^{\frac{1}{a}}$$

$$dt = \frac{1}{a}(\frac{x}{b})^{\frac{1}{a}-1}\frac{1}{b}dx$$

当 $t=0$ 时，$x=0$；$t=\infty$ 时，$x=\infty$，故可得

$$\int_0^\infty \frac{t^{m-1}\mathrm{d}t}{(1+bt^a)^{m+n}} = \int_0^\infty \frac{(\frac{x}{b})^{\frac{m-1}{a}}\frac{1}{ab}(\frac{x}{b})^{\frac{1}{a}-1}}{(1+x)^{m+n}}\mathrm{d}x =$$

$$\frac{b^{-\frac{m}{a}}}{a}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{m}{a}-1}}{(1+x)^{m+n}}\mathrm{d}x \tag{a}$$

又根据式(1.1.3)，则有

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{m}{a}-1}}{(1+x)^{m+n}}\mathrm{d}x = \mathrm{B}(\frac{m}{a}, m+n-\frac{m}{a}) \tag{b}$$

若将式(b)代入式(a)，则有如下所证表达式成立，即

$$\int_0^\infty \frac{t^{m-1}\mathrm{d}t}{(1+bt^a)^{m+n}} = \frac{b^{-\frac{m}{a}}}{a}\mathrm{B}(\frac{m}{a}, m+n-\frac{m}{a})$$

第二节　欧拉无穷乘积公式

根据 e^{-x} 的极限关系

$$\mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to\infty}(1-\frac{x}{n})^n$$

取下述函数的积分表达式

$$f(n,p) = \int_0^n x^{p-1}(1-\frac{x}{n})^n\mathrm{d}x$$

利用分部积分法，便可得到

$$f(n,p) = \frac{x^p}{p}(1-\frac{x}{n})^n\Big|_b^n + \frac{1}{p}\int_0^n x^p(1-\frac{x}{n})^{n-1}\mathrm{d}x$$

上式右端的第一项，当取积分上下限时，它的值均为零。因此，可得

$$f(n,p) = \frac{1}{p}\int_0^n x^p(1-\frac{x}{n})^{n-1}\mathrm{d}x$$

重复应用分部积分法，则可得

$$f(n,p) = \frac{1}{p(p+1)}\frac{n-1}{n}\int_0^\infty x^{p+1}(1-\frac{x}{n})^{n-2}\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{p(p+1)(p+2)}\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\int_0^\infty x^{p+2}(1-\frac{x}{n})^{n-3}\mathrm{d}x =$$

$$\frac{(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{n^{n-1}p(p+1)(p+2)\cdots(p+n-1)}\int_0^n x^{p+n-1}\mathrm{d}x =$$

$$\frac{(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot n^{p+n}}{n^{n-1}p(p+1)(p+2)\cdots(p+n-1)(p+n)} =$$

$$\frac{n}{p+n}\frac{n^p}{p\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1+\frac{1}{k})}$$

又将因子 n^p 用乘积表达式表示如下

$$n^p = \prod_{k=1}^{n-1}(1+\frac{1}{k})^p$$

并将其代入上式,则可得

$$f(n,p) = \frac{n}{p+n}\frac{1}{p}\prod_{k=1}^{n-1}(1+\frac{1}{k})^p(1+\frac{p}{k})^{-1}$$

当 n 趋于无穷大时,并注意下列关系式

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{x}{n})^n = e^{-x}$$

$$\lim_{n\to\infty}f(n,p) = \Gamma(p)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{p+n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n-1}(1+\frac{1}{k})^p(1+\frac{p}{k})^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{1}{k})^p(1+\frac{p}{k})^{-1}$$

则可得 Γ 函数的欧拉无穷乘积表达式如下

$$\Gamma(p) = \frac{1}{p}\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{1}{k})^p(1+\frac{p}{k})^{-1} \tag{1.2.1}$$

上式除在 $p=0,-1,-2,\cdots$ 处为无穷大外,其余各点均有定义。因此,可采用上述无穷乘积表达式来定义 Γ 函数。这样定义的 Γ 函数,不仅适用于不为零的正数域,而且还可将其定义域扩充到不含负整数的负数域,此时,Γ 函数的图象,如图 1.1 所示。

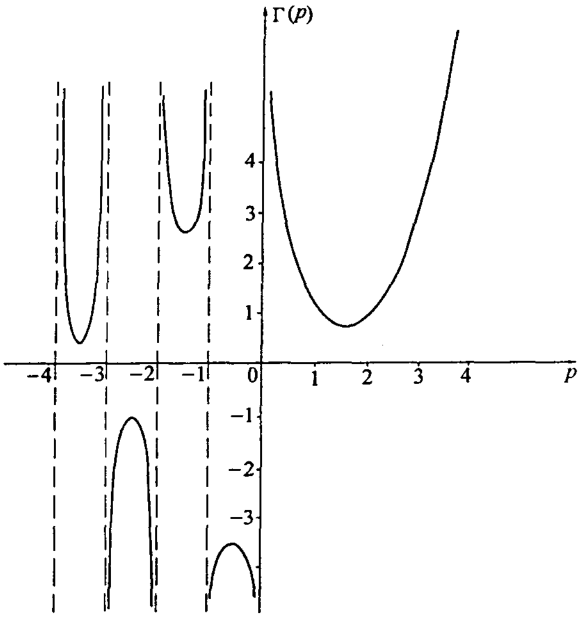


图 1.1

第三节　Γ函数的基本性质

Γ函数是应用最广的特殊函数之一，它在许多特殊函数中均得到应用。因此，本节将深入讨论Γ函数的几个重要性质。

一、递推关系

当 $p>0$ 时，Γ函数满足下述递推关系

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p) \tag{1.3.1}$$

【证】 根据Γ函数的定义，则有

$$\Gamma(p+1)=\int_0^{\infty}x^p\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

利用分部积分法，则可得

$$\Gamma(p+1)=-x^p\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{\infty}+p\int_0^{\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

上式右端的第一项，当取积分上下限时，其值均为零。其中，当取积分上限时，该项变为 $\frac{\infty}{\infty}$ 不定型。重复应用罗必塔法则，可知其值为零。因此，可得如下递推公式

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$$

上述递推公式表明，左端自变量为 $p+1$ 的Γ函数值可用右端自变量为 p 的Γ函数值求得。反复利用该递推公式，可得如下三点推论。

【推论1】 若 m 为正整数，且 $p>m$，则有如下递推公式

$$\Gamma(p)=(p-1)(p-2)\cdots(p-m)\Gamma(p-m)$$

或

$$\Gamma(p)=\left[\prod_{k=1}^{m}(p-k)\right]\Gamma(p-m) \tag{1.3.2}$$

【推论2】 若 $p>0$，且 n 为正整数，则可得如下递推公式

$$\Gamma(p+n)=(p+n-1)(p+n-2)\cdots p\Gamma(p)$$

或

$$\Gamma(p+n)=\left[\prod_{k=1}^{n}(p+n-k)\right]\Gamma(p) \tag{1.3.3}$$

当 $p=1$ 时，则式(1.3.3)可改写为下式

$$\Gamma(n+1)=\left[\prod_{k=1}^{n}(n+1-k)\right]\Gamma(1)$$

又因

$$\prod_{k=1}^{n}(n+1-k)=n!$$

$$\Gamma(1)=1$$

故可得

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{1.3.4}$$

由式(1.3.4) 可以看出，Γ 函数是阶乘概念的一种推广。正是由于这种缘故，有时也称 Γ 函数为阶乘函数。

【推论 3】 若 $p < 0$，且 $p \neq -1, -2, \cdots$ 时，根据推论 2，采用逆递推法，则可得计算负数的 Γ 函数公式如下

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+n)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(p+n-k)} \tag{1.3.5}$$

其中，n 为正整数，且 $n > -p$。

在式(1.3.5) 中，因为 $p+n>0$，所以比值

$$\frac{\Gamma(p+n)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(p+n-k)}$$

具有完全确定的值。利用上述递推公式，可将 Γ 函数的定义域扩充到不含负整数的负数域。

应当指出的是，当 p 等于零或负整数时，Γ 函数没有意义，其值均为无穷大，即

$$\Gamma(0) = \frac{\Gamma(1)}{0} = \infty$$

$$\Gamma(-1) = \frac{\Gamma(0)}{1} = \infty$$

$$\Gamma(-2) = \frac{\Gamma(-1)}{-2} = \infty$$

等等。这一结论，也可由式(1.2.1) 中得到。

由递推关系，可将 Γ 函数重新定义如下

$$\Gamma(p) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x & (p>0) \\ \dfrac{\Gamma(p+n)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(p+n-k)} & (p<0, p=-1, -2, \cdots) \end{cases} \tag{a}$$

其中，$p+n>0$，且 n 为正整数。

在第二节中，也曾采用 Γ 函数的欧拉无穷乘积表达式

$$\Gamma(p) = \frac{1}{p}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{p}\left(1+\frac{p}{k}\right)^{-1} \qquad (p \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{b}$$

来定义 Γ 函数。

这两种定义，均能将定义域扩充到不含负整数的负数域。但由式(a) 定义的 Γ 函数，主要用于数值计算，采用式(b) 定义的 Γ 函数，主要用于理论推导。

二、余元公式

当 p 不为整数时，根据欧拉无穷乘积表达式，则有

$$\Gamma(p) = \frac{1}{p}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{p}\left(1+\frac{p}{k}\right)^{-1}$$

$$\Gamma(-p) = -\frac{1}{p}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-p}\left(1-\frac{p}{k}\right)^{-1}$$

若将上述两式相乘，则可得

$$\Gamma(p)\Gamma(-p) = -\frac{1}{p^2}\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{p^2}{k^2})^{-1}$$

根据函数无穷乘积展开式可知

$$\frac{\sin p\pi}{p\pi} = \prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{p^2}{k^2})$$

将此式代入上式，则可得

$$\Gamma(p)\Gamma(-p) = -\frac{\pi}{p\sin p\pi}$$

又利用下述递推公式

$$\Gamma(1-p) = -p\Gamma(-p)$$

则可得如下的**余元公式**

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \tag{1.3.6}$$

余元公式建立起 Γ 函数与三角函数之间的关系式，利用余元公式，可得如下三点推论。

【推论 1】 若 $p = \frac{1}{2}$，根据余元公式，并注意下列关系式

$$\Gamma(\frac{1}{2}) > 0$$

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1$$

则可得

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \tag{1.3.7}$$

若将 $p = \frac{1}{2}$ 代入式(1.1.5)，并注意下述表达式

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

则可得两个有用的积分结果

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$$

【推论 2】 对于正整数 m，则有

$$\Gamma(m+\frac{1}{2}) = [\prod_{k=1}^{m}(m+\frac{1}{2}-k)]\sqrt{\pi} \tag{1.3.8}$$

【推论 3】 对于正整数 m，则有

$$\Gamma(-m+\frac{1}{2}) = \frac{(-1)^m}{\prod_{k=1}^{m}(m+\frac{1}{2}-k)}\sqrt{\pi} \tag{1.3.9}$$

余元公式的上述三个推论，为计算半奇数的 Γ 函数提供一个简捷方便的表达式。所谓"半奇数"是指以$\frac{1}{2}$为单位的奇数，比如$\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\cdots,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},-\frac{5}{2},\cdots$，通常半奇数用

$m+\frac{1}{2}$ 表示，其中，m 为整数。

三、倍元公式

设下列两个积分表达式

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p}x\mathrm{d}x$$

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p}2x\mathrm{d}x$$

则有

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2(p+\frac{1}{2})-1}x\cos^{2\cdot\frac{1}{2}-1}x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{B}(p+\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}{2p\Gamma(p)}$$

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin x\cos x)^{2p}\mathrm{d}x=2^{2p}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p}\cos^{2p}x\mathrm{d}x=2^{2p-1}\mathrm{B}(p+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2})=\frac{2^{2p-1}[\Gamma(p+\frac{1}{2})]^2}{2p\Gamma(2p)}$$

又令 $t=2x,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$，则可得

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin^{2p}t\mathrm{d}t$$

由于被积函数 $\sin^{2p}t$ 为偶函数，则有

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p}t\mathrm{d}t$$

即

$$I=J$$

故可得

$$\Gamma(2p)=\frac{2^{2p-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(p)\Gamma(p+\frac{1}{2}) \tag{1.3.10}$$

上式称为**倍元公式**，也有人称为倍量公式，还有人称为倍乘公式。它在计算 Γ 函数值方面并无多大用处，但在其他特殊函数中推导公式时要用到。

四、乘积公式

设 n 为正整数，则有

$$\Gamma(np)=\frac{n^{np-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}}\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma(p+\frac{k}{n}) \tag{1.3.11}$$

上式称为乘积公式，由于证明较为繁琐，需用到复数理论，故不予证明。

当 $n=2$ 时，则乘积公式可简化为倍元公式，即

$$\Gamma(2p)=\frac{2^{2p-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(p)\Gamma(p+\frac{1}{2})$$

由此可见，倍元公式是乘积公式当 $n=2$ 时的特例。同倍元公式一样，乘积公式的理论

价值要远远大于其计算价值。

【例 1】 计算下述积分

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$$

的值,其中,n 为正整数。

【解】 因为被积函数是 x 的偶函数,故有

$$I = 2\int_0^1 (x^2)^n (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x$$

若令 $t = x^2$,则可得

$$x = t^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}t$$

当 $x = 0$ 时,$t = 0$;当 $x = 1$ 时,$t = 1$,故可得如下表达式

$$I = \int_0^1 t^{n-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}t = \int_0^1 t^{(n+\frac{1}{2})-1} (1-t)^{\frac{1}{2}-1} \mathrm{d}t =$$

$$\mathrm{B}(n+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}$$

又根据式(1.3.8),(1.3.7) 和(1.3.4),则有

$$\begin{aligned}\Gamma(n+\frac{1}{2}) &= [\prod_{k=1}^{n}(n+\frac{1}{2}-k)]\sqrt{\pi} = \\ &[\prod_{k=1}^{n}(\frac{2n+1-2k}{2})]\sqrt{\pi} = \\ &\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2^n}\sqrt{\pi} = \\ &\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1\cdot 2^n\cdot n!}{2^{2n}\cdot n!}\sqrt{\pi} = \\ &\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

若将这些计算结果代入上式,则可得

$$I = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n}(n!)^2}$$

【例 2】 计算 $\Gamma(-\frac{5}{2})$ 之值。

【解】 根据式(1.3.9),则有

$$\Gamma(-\frac{5}{2}) = \Gamma(-3+\frac{1}{2}) = \frac{(-1)^3}{\prod_{k=1}^{3}(3+\frac{1}{2}-k)}\sqrt{\pi}$$

又因