全国高等教育自学考试

高等数学(二)自学辅导

李凯 师文英 郭子雪 齐红然 编著

全国高等教育自学考试指定教材辅导书

华中科技大学出版社

全国高等教育自学考试指定教材辅导书

高等数学（二）自学辅导

李　凯　师文英
郭子雪　齐红然　编著

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(二)自学辅导/李 凯 等编著

武汉:华中科技大学出版社, 2002年9月

ISBN 7-5609-2822-6

Ⅰ.高…

Ⅱ.①李… ②师… ③郭… ④齐…

Ⅲ.高等数学-高等教育-自学考试-自学参考资料

Ⅳ.O13

高等数学(二)自学辅导 李 凯 等编著

责任编辑:万亚军 钟 珊 封面设计:潘 群

责任校对:封春英 章 红 责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

录 排:华中科技大学出版社照排室

印 刷:华中科技大学印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:11.375 字数:270 000

版次:2002年9月第1版 印次:2002年9月第1次印刷 印数:1—4 000

ISBN 7-5609-2822-6/O·270 定价:16.80元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

前　言

本书是根据全国高等教育自学考试委员会颁布的《高等数学(二)自学考试大纲》,并参考指定教材(《高等数学(二)第一分册线性代数》,高汝熹、姚慕生主编,武汉大学出版社出版;《高等数学(二)第二分册概率论与数理统计》,唐国兴主编,武汉大学出版社出版)编写的,其目的是使参加自学考试的读者复习好这门课程并且顺利通过考试。为了达到此目的,本书作者们经过多次研究讨论,最后拟定了本书的写作思路和提纲。

全书包括两部分,第一部分为线性代数;第二部分为概率论与数理统计。本书在内容及形式上独具一格,除了简明扼要地介绍知识点外,还在其后配有相关知识点的例题、分析及注意事项,这样安排可使读者循序渐进地掌握较复杂的知识及其综合性题目;另外还精心选编了一些习题,并附有参考答案,使其更具有代表性和针对性。需要说明的是,由于线性代数和概率论与数理统计的学习各有自己的特点,故本书这两部分的写作风格有所不同。我们深信,这些工作将对本书的读者大有裨益。

参加本书编写的同志,均是长期从事数学研究、数学教学的教师,有丰富的经验,在编写各自完成的章节中融进了自己许多深刻的理解与体会,使得本书不仅内容全面、论证严谨,而且深入浅出,好学易懂。本书第一部分的第一章由齐红然老师编写;第二、三章由李凯老师编写;第四、五章由郭子雪老师编写;第二部分由师文英老师编写。

由于作者能力所限，编写时间仓促，书中难免有错误与不当之处，敬请读者批评指正。

编　者

2002年7月

目　录

第一部分　线性代数

第二部分 概率论与数理统计

第一部分 线性代数

第1章 行 列 式

重 点 难 点

本章应掌握如何计算行列式、如何用克莱姆法则求线性方程组的解.

基本解题方法

1. 用定义计算行列式

一阶行列式$|a_{11}|=a_{11}$,设$n-1$阶行列式已经定义,则n阶行列式A可定义为

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$$

其中,$i=1,2,\cdots,n$;M_{ij}为元素a_{ij}的余子式,表示划去元素a_{ij}所在的第i行第j列后剩下的$n-1$阶行列式.由此可以得出二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

例1 计算行列式$A=\begin{vmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

解 由于该行列式第 3 行元素只有一个不为 0,所以可用定义将行列式按此行展开.

$$A=\begin{vmatrix}6 & 0 & 8\\5 & -1 & 3\\0 & 2 & 0\end{vmatrix}=2\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}6 & 8\\5 & 3\end{vmatrix}$$

$$=-2\times(18-40)=44.$$

例 2 计算行列式 $A=\begin{vmatrix}0 & a & 0 & 0\\b & c & 0 & 0\\0 & 0 & d & e\\0 & 0 & 0 & f\end{vmatrix}$.

解 由于该行列式第 1 行仅有一个非零元素,所以直接用定义将行列式按此行展开.

$$A=\begin{vmatrix}0 & a & 0 & 0\\b & c & 0 & 0\\0 & 0 & d & e\\0 & 0 & 0 & f\end{vmatrix}=a\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}b & 0 & 0\\0 & d & e\\0 & 0 & f\end{vmatrix}$$

$$=-a\times b\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}d & e\\0 & f\end{vmatrix}=-abdf.$$

注 1 高阶行列式的计算需连续用定义展开.

注 2 本例第 4 行和第 3 列也仅有一个非零元素,因此按第 4 行、第 3 列展开计算同样可行.只是按第 1 行展开后的三阶行列式是三角形行列式,计算更快捷、简便,故应按第 1 行展开.

例 3 计算行列式 $A=\begin{vmatrix}2 & 1 & 5\\-6 & -2 & -16\\1 & 1 & 4\end{vmatrix}$.

解 该行列式中不存在非零元素,用定义计算时按任一行(或列)展开相差不大,这里选择按第 3 行展开.

$$A=\begin{vmatrix}2&1&5\\-6&-1&-16\\1&1&4\end{vmatrix}=1\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1&5\\-1&-16\end{vmatrix}$$

$$+1\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&5\\-6&-16\end{vmatrix}+4\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&1\\-6&-1\end{vmatrix}$$

$$=(-16+5)-(-32+30)+4\times(-2+6)=7.$$

注 用行列式递推定义计算行列式的方法俗称“降阶法”. 对比上面三个例子可知，当行列式中某行(或列)仅有一个非零元素时用此方法较简单；相反，若行列式中不存在只有一个非零元素的行(或列)，则用定义展开时就比较麻烦. 如例 3，用定义展开后化为三个二阶行列式. 对例 3 这类问题，可先利用行列式的性质化某行(或列)为只有一个非零元素的情况，然后再按此行(或列)展开.

2. 利用行列式的性质计算行列式

用行列式定义计算行列式有时相当麻烦，甚至十分困难，这时应结合行列式的性质来处理. 行列式有如下主要性质：

性质 1 行列式转置后值不变，即 $A^{\mathrm{T}}=A$.

性质 2 行列式中两行(或列)互换，行列式的值改变符号.

性质 3 行列式某行元素的公因子可以提到行列式外面，即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\ka_{i1}&ka_{i2}&\cdots&ka_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

注 若 n 阶行列式 A 的所有元素均有公因子 k，则可以从 A 中提出 n 个公因子 k.

性质 4 如果行列式的某两行(或列)成比例，则行列式的值等于零.

性质 5 如果行列式中某行(或列)的元素都可以分解为两个元素的和，则该行列式可以分解为相应的两个行列式的和，即

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6 把行列式的某行(或列)元素都乘以一个常数加到另一行(或列)上去,行列式的值不变.

(1) 三角形法.

根据行列式的定义可得以下特殊行列式的值:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\quad(\text{上三角形行列式}).$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\quad(\text{下三角形行列式}).$$

根据行列式的性质,可先把行列式化为上(下)三角形行列式,然后再按三角形行列式的特点计算.

例 1 计算行列式

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

解

$$A=\begin{array}{c|l}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\-1&1&1&1\\-1&-1&1&1\\-1&1&-1&1\end{vmatrix} & \begin{array}{l}\times(1)\quad\times(1)\quad\times(1)\\ \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

$$=\begin{array}{cl}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&0&2&2\\0&2&0&2\end{vmatrix} & \begin{array}{l} \\ \times(-1)\\ \\ \\ \end{array}\end{array}=\begin{array}{cl}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&0&2&2\\0&0&-2&0\end{vmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \times(1)\\ \\ \end{array}\end{array}$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&0&2&2\\0&0&0&2\end{vmatrix}=1\times2\times2\times2=8.$$

注 利用三角形法时，应首先用第 1 列的第一个元素 a_{11} 把第 1 列的其它元素化为零（当 $a_{11}=0$ 时可用行列式的性质化该位置元素为非零元素），然后再用第 2 列上元素 a_{22}（当 $a_{22}\neq0$ 时）把 a_{22} 下面的元素化为零……依此类推，直至把行列式化成上三角形行列式.

例 2 计算行列式

$$A=\begin{vmatrix}1&-1&2&3\\2&3&-3&6\\3&7&7&13\\-5&0&-8&-14\end{vmatrix}.$$

解

$$A=\begin{array}{cl}\begin{vmatrix}1&-1&2&3\\2&3&-3&6\\3&7&7&13\\-5&0&-8&-14\end{vmatrix} & \begin{array}{l}\times(-2)\quad\times(-3)\quad\times(5)\\ \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

$$
=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 5 & -7 & 0\\ 0 & 10 & 1 & 4\\ 0 & -5 & 2 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}\times(-2)\quad\times(1)\\ \\ \\ \\ \end{matrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 5 & -7 & 0\\ 0 & 0 & 15 & 4\\ 0 & 0 & -5 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \times\left(\frac{1}{3}\right)\\ \\ \end{matrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 5 & -7 & 0\\ 0 & 0 & 15 & 4\\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{3}\end{vmatrix}=1\times 5\times 15\times\frac{7}{3}=175.
$$

例 3 计算行列式

$$
A=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix}.
$$

解 该行列式主对角线上的元素全为零，不能直接按上面方法计算. 观察可知，该行列式各行元素之和相等，故首先将第 2、3、4 列加到第 1 列，然后再化为三角形行列式.

$$
A=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix}\begin{matrix}\times(-1)\times(-1)\times(-1)\\ \\ \\ \\ \end{matrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{vmatrix}
$$

$$= 3 \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -3.$$

注 这种处理方法可称为“迭加法”，即当行列式各行元素之和相等时，可利用行列式的性质，把其它各列元素加到第 1 列的元素上，然后再按行列式的性质化该行列式为三角形行列式.

例 4 计算 n 阶行列式

$$A_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a & a \\ a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & x & a \\ a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}.$$

解

$$A_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a & a \\ a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & x & a \\ a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x & a \\ x+(n-1)a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}$$

$$\times(1) \quad \cdots \quad \times(1) \quad \times(1)$$

$$= [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a & a \\ 1 & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a & \cdots & x & a \\ 1 & a & \cdots & a & x \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-1) \cdots \times(-1) \times(-1) \end{matrix}$$

$$= [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a & a \\ 0 & x-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$