

全国高等教育自学考试



高等数学(二)自学辅导

李凯 师文英 郭子雪 齐红然 编著

全国高等教育自学考试指定教材辅导书

华中科技大学出版社

222

C13

L32C

全国高等教育自学考试指定教材辅导书

高等数学(二)自学辅导

李 凯 师文英 编著
郭子雪 齐红然

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(二)自学辅导/李 凯 等编著
武汉:华中科技大学出版社, 2002年9月
ISBN 7-5609-2822-6

I. 高…

Ⅰ. ①李… ②师… ③郭… ④齐…

Ⅲ. 高等数学-高等教育-自学考试-自学参考资料

Ⅳ. O13

高等数学(二)自学辅导

李 凯 等编著

责任编辑:万亚军 钟 珊

封面设计:潘 群

责任校对:封春英 章 红

责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

录 排:华中科技大学出版社照排室

印 刷:华中科技大学印刷厂

开本:850×1168 1/32

印张:11.375

字数:270 000

版次:2002年9月第1版

印次:2002年9月第1次印刷

印数:1—4 000

ISBN 7-5609-2822-6/O·270

定价:16.80元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

前 言

本书是根据全国高等教育自学考试委员会颁布的《高等数学(二)自学考试大纲》，并参考指定教材(《高等数学(二)第一分册线性代数》，高汝熹、姚慕生主编，武汉大学出版社出版；《高等数学(二)第二分册概率论与数理统计》，唐国兴主编，武汉大学出版社出版)编写的，其目的是使参加自学考试的读者复习好这门课程并且顺利通过考试。为了达到此目的，本书作者们经过多次研究讨论，最后拟定了本书的写作思路和提纲。

全书包括两部分，第一部分为线性代数；第二部分为概率论与数理统计。本书在内容及形式上独具一格，除了简明扼要地介绍知识点外，还在其后配有相关知识点的例题、分析及注意事项，这样安排可使读者循序渐进地掌握较复杂的知识及其综合性题目；另外还精心选编了一些习题，并附有参考答案，使其更具有代表性和针对性。需要说明的是，由于线性代数和概率论与数理统计的学习各有自己的特点，故本书这两部分的写作风格有所不同。我们深信，这些工作将对本书的读者大有裨益。

参加本书编写的同志，均是长期从事数学研究、数学教学的教师，有丰富的经验，在编写各自完成的章节中融进了自己许多深刻的理解与体会，使得本书不仅内容全面、论证严谨，而且深入浅出，好学易懂。本书第一部分的第一章由齐红然老师编写；第二、三章由李凯老师编写；第四、五章由郭子雪老师编写；第二部分由师文英老师编写。

由于作者能力所限,编写时间仓促,书中难免有错误与不当之处,敬请读者批评指正。

编 者

2002 年 7 月

目 录

第一部分 线性代数

第1章 行列式	(1)
重点难点	(1)
基本解题方法	(1)
典型题解析	(18)
练习题参考答案	(23)
第2章 矩阵	(26)
重点难点	(26)
基本解题方法	(26)
典型题解析	(45)
练习题参考答案	(52)
第3章 向量组与线性方程组	(55)
重点难点	(55)
基本解题方法	(55)
典型题解析	(87)
练习题参考答案	(92)
第4章 线性空间	(101)
重点难点	(101)
基本解题方法	(101)
典型题解析	(126)
练习题参考答案	(131)
第5章 矩阵特征值与实二次型	(137)

重点难点	(137)
基本解题方法	(137)
典型题解析	(170)
练习题参考答案	(177)

第二部分 概率论与数理统计

第6章 概率的基本概念	(187)
一、随机事件及其运算	(187)
知识要点	(187)
类型题解	(189)
练习题 1	(191)
二、古典概率	(192)
知识要点	(192)
类型题解	(193)
练习题 2	(196)
三、利用概率的性质计算概率	(197)
知识要点	(197)
类型题解	(198)
练习题 3	(199)
四、条件概率与乘法公式	(201)
知识要点	(201)
类型题解	(201)
练习题 4	(203)
五、全概率公式与贝叶斯公式	(204)
知识要点	(204)
类型题解	(205)
练习题 5	(208)
六、相互独立的事件与贝努里概型	(209)

知识要点	(209)
类型题解	(210)
练习题 6	(212)
七、典型题解	(213)
八、参考答案	(216)
第 7 章 随机变量与概率分布	(219)
一、离散型随机变量	(219)
知识要点	(219)
类型题解	(220)
练习题 1	(221)
二、连续型随机变量	(221)
知识要点	(221)
类型题解	(225)
练习题 2	(229)
三、随机变量的数字特征	(231)
知识要点	(231)
类型题解	(233)
练习题 3	(236)
四、二维随机向量	(238)
知识要点	(238)
类型题解	(242)
练习题 4	(247)
五、典型题解	(249)
六、参考答案	(254)
第 8 章 抽样和抽样分布	(257)
一、基本概念	(257)
知识要点	(257)
类型题解	(258)
练习题 1	(259)

二、大数定律和中心极限定理	(259)
知识要点	(259)
类型题解	(260)
练习题 2	(261)
三、抽样分布	(262)
知识要点	(262)
类型题解	(264)
练习题 3	(266)
四、典型题解	(267)
五、参考答案	(270)
第 9 章 参数估计	(272)
一、参数的点估计	(272)
知识要点	(272)
类型题解	(273)
练习题 1	(277)
二、估计量的评价标准	(279)
知识要点	(279)
类型题解	(279)
练习题 2	(282)
三、参数的区间估计	(281)
知识要点	(284)
类型题解	(287)
练习题 3	(290)
四、典型题解	(292)
五、参考答案	(295)
第 10 章 假设检验	(297)
一、一个正态总体的假设检验	(297)
知识要点	(297)
类型题解	(300)

练习题 1	(304)
二、两个正态总体的假设检验	(307)
知识要点	(307)
类型题解	(309)
练习题 2	(313)
三、概率的假设检验	(313)
知识要点	(313)
类型题解	(315)
练习题 3	(316)
四、典型题解	(316)
五、参考答案	(319)
第 11 章 回归分析与相关分析	(321)
一、一元线性回归	(321)
知识要点	(321)
类型题解	(325)
练习题 1	(329)
二、多元线性回归	(330)
知识要点	(330)
类型题解	(331)
练习题 2	(335)
三、典型题解	(335)
四、参考答案	(338)
模拟考试卷	
试卷一	(339)
试卷二	(344)
试卷一参考答案	(349)
试卷二参考答案	(351)

第一部分 线性代数

第1章 行列式

重点难点

本章应掌握如何计算行列式、如何用克莱姆法则求线性方程组的解.

基本解题方法

1. 用定义计算行列式

一阶行列式 $|a_{11}| = a_{11}$, 设 $n-1$ 阶行列式已经定义, 则 n 阶行列式 A 可定义为

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

其中, $i=1, 2, \cdots, n$; M_{ij} 为元素 a_{ij} 的余子式, 表示划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行第 j 列后剩下的 $n-1$ 阶行列式. 由此可以得出二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

例 1 计算行列式 $A = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

解 由于该行列式第 3 行元素只有一个不为 0, 所以可用定义将行列式按此行展开.

$$A = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ = -2 \times (18 - 40) = 44.$$

例 2 计算行列式 $A = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \end{vmatrix}.$

解 由于该行列式第 1 行仅有一个非零元素, 所以直接用定义将行列式按此行展开.

$$A = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \end{vmatrix} = a \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} \\ = -a \times b \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} d & e \\ 0 & f \end{vmatrix} = -abdf.$$

注 1 高阶行列式的计算需连续用定义展开.

注 2 本例第 4 行和第 3 列也仅有一个非零元素, 因此按第 4 行、第 3 列展开计算同样可行. 只是按第 1 行展开后的三阶行列式是三角形行列式, 计算更快捷、简便, 故应按第 1 行展开.

例 3 计算行列式 $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -6 & -2 & -16 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$

解 该行列式中不存在非零元素, 用定义计算时按任一行(或列)展开相差不大, 这里选择按第 3 行展开.

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -6 & -1 & -16 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -16 \end{vmatrix} \\
 &\quad + 1 \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -6 & -16 \end{vmatrix} + 4 \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} \\
 &= (-16 + 5) - (-32 + 30) + 4 \times (-2 + 6) = 7.
 \end{aligned}$$

注 用行列式递推定义计算行列式的方法俗称“降阶法”. 对比上面三个例子可知, 当行列式中某行(或列)仅有一个非零元素时用此方法较简单; 相反, 若行列式中不存在只有一个非零元素的行(或列), 则用定义展开时就比较麻烦. 如例 3, 用定义展开后化为三个二阶行列式. 对例 3 这类问题, 可先利用行列式的性质化某行(或列)为只有一个非零元素的情况, 然后再按此行(或列)展开.

2. 利用行列式的性质计算行列式

用行列式定义计算行列式有时相当麻烦, 甚至十分困难, 这时应结合行列式的性质来处理. 行列式有如下主要性质:

性质 1 行列式转置后值不变, 即 $A^T = A$.

性质 2 行列式中两行(或列)互换, 行列式的值改变符号.

性质 3 行列式某行元素的公因子可以提到行列式外面, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

注 若 n 阶行列式 A 的所有元素均有公因子 k , 则可以从 A 中提出 n 个公因子 k .

性质 4 如果行列式的某两行(或列)成比例, 则行列式的值等于零.

性质 5 如果行列式中某行(或列)的元素都可以分解为两个元素的和, 则该行列式可以分解为相应的两个行列式的和, 即

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

性质 6 把行列式的某行(或列)元素都乘以一个常数加到另一行(或列)上去,行列式的值不变.

(1) 三角形法.

根据行列式的定义可得以下特殊行列式的值:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \quad (\text{上三角形行列式}).$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \quad (\text{下三角形行列式}).$$

根据行列式的性质,可先把行列式化为上(下)三角形行列式,然后再按三角形行列式的特点计算.

例 1 计算行列式

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times (1) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} \times (1) \\ \times (1) \\ \times (1) \end{array} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times (-1) \\ \leftarrow \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times (1) \\ \leftarrow \end{array} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 2 \times 2 = 8.
 \end{aligned}$$

注 利用三角形法时,应首先用第1列的第一个元素 a_{11} 把第1列的其它元素化为零(当 $a_{11}=0$ 时可用行列式的性质化该位置元素为非零元素),然后再用第2列上元素 a_{22} (当 $a_{22} \neq 0$ 时)把 a_{22} 下面的元素化为零……依此类推,直至把行列式化成上三角形行列式.

例2 计算行列式

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 6 \\ 3 & 7 & 7 & 13 \\ -5 & 0 & -8 & -14 \end{vmatrix}.$$

解

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 6 \\ 3 & 7 & 7 & 13 \\ -5 & 0 & -8 & -14 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times (-2) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} \times (-3) \\ \times (5) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 10 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times (-2) \quad \times (1) \\ \left\{ \begin{array}{l} \downarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right. \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times \left(\frac{1}{3}\right) \\ \left\{ \begin{array}{l} \downarrow \\ \leftarrow \end{array} \right. \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{vmatrix} = 1 \times 5 \times 15 \times \frac{7}{3} = 175.
\end{aligned}$$

例 3 计算行列式

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 该行列式主对角线上的元素全为零,不能直接按上面方法计算. 观察可知,该行列式各行元素之和相等,故首先将第 2、3、4 列加到第 1 列,然后再化为三角形行列式.

$$\begin{aligned}
A &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times (-1) \times (-1) \times (-1) \\ \left\{ \begin{array}{l} \downarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right. \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$= 3 \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -3.$$

注 这种处理方法可称为“迭加法”，即当行列式各行元素之和相等时，可利用行列式的性质，把其它各列元素加到第1列的元素上，然后再按行列式的性质化该行列式为三角形行列式。

例4 计算 n 阶行列式

$$A_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a & a \\ a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & x & a \\ a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}.$$

解

$$A_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a & a \\ a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & x & a \\ a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x + (n-1)a & a & \cdots & a & a \\ x + (n-1)a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x + (n-1)a & a & \cdots & x & a \\ x + (n-1)a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}$$

$$= [x + (n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a & a \\ 1 & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a & \cdots & x & a \\ 1 & a & \cdots & a & x \end{vmatrix} \times (-1) \cdots \times (-1) \times (-1)$$

$$= [x + (n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a & a \\ 0 & x-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [x + (n-1)a](x-a)^{n-1}.$$