同济大学新编数学辅导丛书

范 磷 编著

大学数学习题精选精解

DAXUESHUXUEXITIJINGXUANJINGJIE

同济大学出版社

同济大学新编数学辅导丛书

大学数学习题精选精解

范　磷　编著

同济大学出版社

内容提要

本书从国内外《高等数学》、《线性代数》、《概率论与数理统计》近万道习题中，精选出500余道习题编写而成，并全部给出解答。各部分习题的数量是按照课程的课时分配以及考研试题的分布，加以综合确定。

本书所选习题覆盖大学数学课程的基本内容和要求。全书共分三个部分十六章。第一部分高等数学，内容为一元函数的极限、连续性，一元函数微分学，一元函数积分学，向量代数和空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数，常微分方程，共八章。第二部分线性代数，内容为行列式与矩阵，向量，线性方程组，相似矩阵与二次型，共四章。第三部分概率论与数理统计，内容为随机事件和概率，随机变量及其概率分布，随机变量的数字特征与极限定理，数理统计初步，共四章。

本书可作为大学本科及同等学历报考研究生的参考书，也可作为有关教师和工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学习题精选精解/范磷编著. —上海：同济大学出版社，2003.7

(同济大学新编数学辅导)

ISBN 7-5608-2641-5

Ⅰ. 大…　Ⅱ. 范…　Ⅲ. 高等数学-高等学校-习题　Ⅳ. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 030884 号

同济大学新编数学辅导丛书

大学数学习题精选精解

范　磷　编著

责任编辑 解明芳　责任校对 郁　峰　封面设计 永　正

出版发行　同济大学出版社

(上海四平路1239号　邮编 200092　电话 021-65985622)

经　销　全国各地新华书店

印　刷　常熟华顺印刷有限公司

开　本　787mm×960mm　1/16

印　张　18

字　数　360000

印　数　1—5200

版　次　2003年7月第1版　　2003年7月第1次印刷

书　号　ISBN 7-5608-2641-5/O・234

定　价　22.00元

前　　言

学习、理解、掌握大学数学的知识和方法，离不开大量的习题练习。"God is in the details。"这是西方对于数学学习的一句名言。然而，大学数学的习题数量浩如烟海，大学生们的时间、精力有限，往往难以适从。本书从近万道数学习题中精选出500余道，全部给出解答，奉献给读者，希望能对他们有所帮助。

本书所选习题覆盖大学数学课程的基本内容和要求。大学生们一册在手，必将成为大学期间的忠实伴侣，并能对报考研究生起到一定的指导作用。为适应不同的教学需要，书中除基本题外，还有一部分难度较高的习题。这些习题具有普遍性、典型性和新颖性。学生通过对这些习题理解，一定会触类旁通，举一反三，提高解题能力，更加牢固掌握大学数学的基本知识和解题方法。

在编写本书的过程中，得到了上海交通大学出版社陈鑫木编审、复旦大学博士生导师陶明德教授的支持和帮助。复旦大学数学系张林德教授认真、细心地审阅了全稿，不但指出了笔误或疏漏之处，而且对这些错误提出了修改意见。在策划、安排、出版本书的过程中，同济大学出版社编辑解明芳老师发挥了重要的作用，对此我谨表示衷心的感谢。

编著者

2002 年 12 月

目　录

第一部分　高等数学

第二部分 线性代数

第三部分 概率论与数理统计

第一部分　高等数学

第一章　一元函数的极限、连续性

第一节　一元函数

一、内容提要

1. 函数的定义，$y=f(x)$的定义域和值域.

2. 函数的性质：周期性，有界性，奇偶性，单调性.

3. 基本初等函数：幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数的定义、性质、图形.

4. 反函数的定义、求法、图形.

5. 复合函数，复合函数的分解.

二、习题

1-1　设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1;\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$ 求 $f(f(x))$.

解　对于任意的 x，总有 $|f(x)|\leqslant 1$

因此
$$f(f(x))=1.$$

1-2　若 $f(x+1)=x^2+3x+3$，求 $f(x)$.

解　$f(x+1)=x^2+3x+3=x^2+2x+1+(x+1)+1$

$$=(x+1)^2+(x+1)+1,$$

$$f(x)=x^2+x+1.$$

1-3　求双曲正弦函数 $y=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$的反函数.

解　由 $y=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$，

所以　$2y=e^x-\dfrac{1}{e^x}$；　$e^{2x}-2ye^x-1=0$，

得
$$e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}.$$
因为 $e^x>0$,取正号,所以
$$e^x=y+\sqrt{y^2+1},$$
$$x=\ln(y+\sqrt{y^2+1}),$$
反函数为
$$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

1-4　若 $f(x)=e^{x^2}$,$f(\varphi(x))=1-x$,且 $\varphi(x)\geqslant0$,求 $\varphi(x)$,并求出它的定义域.

解　由 $f(x)=e^{x^2}$,

故
$$f(\varphi(x))=e^{\varphi^2(x)},\quad 且\quad f(\varphi(x))=1-x,$$
$$e^{\varphi^2(x)}=1-x.$$
两边取对数,解得 $\varphi^2(x)=\ln(1-x)$,
$$\varphi(x)=\pm\sqrt{\ln(1-x)}.$$
由于
$$\varphi(x)\geqslant0,\quad \varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)},$$
其定义域为 $x\leqslant0$.

1-5　若函数 $f(x)$满足 $f(x)=f(2a-x)$,则称函数的图形对称于直线 $x=a$,试证明:若函数 $f(x)$的图形同时对称于直线 $x=a$ 和 $x=b(a\neq b)$,则 $f(x)$为周期函数.

证　由于 $f(x)$图形同时对称于直线 $x=a$ 和 $x=b$,

因此　$f(x)=f(2a-x)$和$f(x)=f(2b-x)$成立.

由于 $a\neq b$,
$$f[x+2(a-b)]=f(x+2a-2b)=f[2a-(x+2a-2b)]$$
$$=f(2b-x)=f(x).$$
所以,$f(x)$是以 $2(a-b)$为周期的周期函数.

第二节　极限与连续

一、内容提要

极限是高等数学中重要的基本概念之一,连续、微分、积分和级数等概念都与极限概念有关.而这些概念引进后,利用这些知识又充实了求极限的方法.

1. 极限的定义.

$$\begin{array}{r}\text{数列极限}(\varepsilon—N\text{ 定义})\\ \text{函数极限}(\varepsilon—\delta\text{ 定义})\\ (\varepsilon—x\text{ 定义}\end{array}\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0} f(x),\\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x),\\ \text{左、右极限},\\ \text{极限存在充要条件}.\end{cases}$$

2. 极限存在的准则(夹逼准则,单调有界数列必有极限).两个重要极限.

3. 无穷小(大)量定义.

阶的分类:高阶无穷小,等价无穷小,同阶无穷小,k 阶无穷小.

4. 函数连续性的定义.

函数在闭区间上连续的三条性质(最大值、最小值定理,介值定理,零点定理).

第一类间断点,第二类间断点.

5. 求极值的常用方法:

(1) 单调、有界序列.

(2) 夹逼定理.

(3) 利用极限运算法则及函数的连续性.

(4) 两个重要极限.

(5) 无穷小量乘有界变量.

(6) 罗必塔法则.

(7) 先将有限项求和,再后求极限.

(8) 用级数收敛的必要条件.

(9) 用积分和(即定积分的定义).

(10) 应用导数的定义.

(11) 应用微分中值定理.

二、习题

1-6　用 $\varepsilon—N$ 方法证明

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n}=0.$$

证　$\forall\,\varepsilon>0$,要证 $\exists\,N>0$,当 $n>N$ 时,

有
$$\left|\frac{n!}{n^n}\right|=\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n}<\varepsilon,$$

而
$$\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n}<\frac{1}{n}\cdot\frac{n^{n-1}}{n^{n-1}}=\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，当 $n>N$ 时，

$$\left|\frac{n!}{n^n}\right|<\varepsilon$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0.$$

1-7 设 $a>1$ 是任一给定的常数，$a_n=\frac{a^n}{n!}$，求证当 $n\to+\infty$时，a_n 以 0 为极限.

证 要求 $n\to\infty$，先考查 $n>[a]+1$，

则有
$$0\leqslant a_n=\frac{a^{[a]}}{[a]!}\cdot\frac{a}{[a]+1}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{n}<\frac{a^{[a]}}{[a]!}\cdot\frac{a}{n}.$$

当 a 给定时，$\frac{a^{[a]}}{[a]!}$是一常数，而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}=0$$

由夹逼准则，可得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

1-8 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots\sqrt{2}}}}$ （n 次复合）.

解 （1）极限存在，设 $a_1=\sqrt{2}$，$a_2=\sqrt{2\sqrt{2}}$，…，

$$a_n=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots\sqrt{2}}}}\qquad（n\text{ 次复合}），$$

显然，$a_1<2$，若 $a_{n-1}<2$，则 $a_n<\sqrt{2\times2}=2$，数列$\{a_n\}$有上界.

显然，$a_n>0$，$a_n^2=2a_{n-1}$，所以，

$$a_n^2-a_{n-1}a_n=2a_{n-1}-a_{n-1}a_n=a_{n-1}(2-a_n)>0,$$

即
$$a_n^2-a_{n-1}a_n>0.$$

所以，$a_n>a_{n-1}$ （$n=2,3,\cdots$），$\{a_n\}$递增有上界，故必有极限.

（2）计算极限，设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，

有
$$\lim_{n\to\infty}a_n^2=\lim_{n\to\infty}2a_{n-1}$$

$$A^2=2A$$

解得 $A=0,A=2$.

因$\{a_n\}$为正数列，且递增，$a_1=\sqrt{2}>0$，所以，$A=0$ 不合题意. 因而

$$\lim_{n\to\infty}a_n=2.$$

1-9 设 $x_1=10,x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$，证明数列$\{x_n\}$存在极限，并求此极限.

解 $x_1=10,x_2=\sqrt{6+x_1}=\sqrt{16}=4$，因而可以推测$\{x_n\}$为单调下降数列.

设 $x_k>x_{k+1}$，则 $x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}>\sqrt{6+x_{k+1}}=x_{k+2}$

由归纳法可知，对一切正整数 n，都有 $x_n>x_{n+1}$. 即$\{x_n\}$为单调下降数列.

由于 $x_1>0,x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}>0$，可知 $x_n>0$，即$\{x_n\}$为单调下降有下界数列

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{6+x_n}$

从而有
$$A=\sqrt{6+A}$$
$$A^2-A-6=0$$
$$A=3 \quad 或 \quad A=-2$$

由于 $x_n>0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

1-10 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots+10^n}$.

解 因为 $10=\sqrt[n]{10^n}<\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots+10^n}<\sqrt[n]{10\times10^n}=\sqrt[n]{10^{n+1}}$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{10^n}=1$$

由夹逼准则知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots+10^n}=10.$$

1-11 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{5^n+3}{n}}$.

解 因为$\dfrac{5}{\sqrt[n]{n}}=\sqrt[n]{\dfrac{5^n}{n}}<\sqrt[n]{\dfrac{5^n+3}{n}}<\sqrt[n]{\dfrac{5^n+5}{n}}<\sqrt[n]{\dfrac{2\times5^n}{n}}=5\,\dfrac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{n}}$

而
$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1,\quad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2}=1,$$

由夹逼准则知
$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{5^n+3}{n}}=5.$$

1-12　求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x$.

解

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1+\dfrac{a}{x}}{1-\dfrac{a}{x}}\right]^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x}{\left(1-\dfrac{a}{x}\right)^x}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{a}{x}\right)^x}=e^{2a}.$$

1-13　设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$,求 a.

解

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1+\dfrac{2a}{x}}{1-\dfrac{a}{x}}\right]^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{2a}{x}\right)^x}{\left(1-\dfrac{a}{x}\right)^x}=e^{3a}$$

由已知条件 $e^{3a}=8$,$3a=\ln 8$,因此 $a=\ln 2$.

1-14　求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-2}\right)^{4x+1}$.

解　令 $t=3x-2$,则 $x=\dfrac{1}{3}(t+2)$,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-2}\right)^{4x+1}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{4}{t}\right)^{\frac{4}{3}(t+2)+1}=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{t}\right)^{\frac{4}{3}t}\left(1+\frac{4}{t}\right)^{\frac{11}{3}}\right]$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left\{\left[\left(1+\frac{4}{t}\right)^t\right]^{\frac{4}{3}}\left(1+\frac{4}{t}\right)^{\frac{11}{3}}\right\}=(e^4)^{\frac{4}{3}}=e^{\frac{16}{3}}.$$

1-15　求极限$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

解

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+x+1}{-x\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+1+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}}=1.$$

1-16　求极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot\frac{3x}{\sin x}\times 2}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}]^{\frac{6x}{\sin x}}=e^6$.

1-17　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2-4}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1-x^2}-2}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sqrt{1-x^2}-1)(\sqrt{1-x^2}+1)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2}+1)}=-\frac{1}{4}.$$

1-18　求$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}$.

解　记$x_n=\dfrac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{5}{6}\times\cdots\times\dfrac{2n-1}{2n}$

则
$$x_{n+1}=\frac{2n+1}{2n+2}x_n,$$
这时
$$0<x_{n+1}<x_n,$$
故知
$$\lim_{x\to+\infty}x_n=A\geqslant 0,$$
引进
$$y_n=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\cdots\times\frac{2n}{(2n+1)},$$
显然
$$0<x_n<y_n,$$
$$0<x_n^2<x_ny_n=\frac{1}{2n+1},$$
即
$$0<x_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

当$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$，由夹逼准则，

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\cdots\times(2n)}=0.$$

1-19　求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$.

解　这是1^∞型，令 $y=(\tan x)^{\tan 2x}$，

两边取自然对数，$\ln y=\tan 2x\ln\tan x$，

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x\ln\tan x=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\tan x}{\cot 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cot x\sec^2 x}{-2\csc^2 2x}$$

$$=-\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin 2x=-1,$$

故　原式$=e^{-1}$.

1-20　求极限$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$.

解　这是∞^0型，令 $y=\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$，

两边取自然对数，$\ln y=x\ln\ln\frac{1}{x}$，

$$\lim_{x\to0^+}x\ln\ln\frac{1}{x}=\lim_{x\to0^+}x\ln(-\ln x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(-\ln x)}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{-\ln x}\left(-\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}x\,\frac{1}{-\ln x}=0$$

故　原式$=e^0=1$.

1-21　$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1-x^2}{1-\cos x}$.

解　这是$\frac{0}{0}$型，用罗必塔法则

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{3}x(1+x^2)^{-\frac{2}{3}}-2x}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{3}(1+x^2)^{-\frac{2}{3}}-\frac{4}{3}x^2\left(\frac{2}{3}\right)(1+x^2)^{-\frac{5}{3}}-2}{\cos x}=-\frac{4}{3}.$$

1-22　求极限$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$.

解　$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right]$

设$f(x)=\frac{1}{1+x}$,则上式可表示为

$$\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)\right]=\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}.$$

$f(x)=\frac{1}{1+x}$在[0,1]上连续,故$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$存在.

$$原式=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2.$$

1-23　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n})$.

解　$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n})=\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\sqrt{\frac{3}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)$

设$f(x)=\sqrt{x}$,则上式可表示为

$$\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(n)\right]=\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$$原式=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}.$$

1-24　求极限$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

解　$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\sqrt[n]{\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n}}=\mathrm{e}^{\ln\sqrt[n]{\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n}}}$

$$=\mathrm{e}^{\frac{\ln\left(\frac{1}{n}\right)+\ln\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\frac{n}{n}}{n}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{i}{n}\right)},$$

$$原式=\mathrm{e}^{\int_0^1\ln x\mathrm{d}x},$$

而
$$\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=x\ln x\Big|_0^1-\int_0^1\mathrm{d}x=-1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

1-25　已知 $f(x)=\begin{cases}\ln(\cos x)x^{-2}, & x\neq 0;\\ a, & x=0.\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=-\frac{1}{2}$.

解　$f(0)=a$，

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}\times\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}$$

$$=\ln\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}}=-\frac{1}{2}.$$

所以 $a=-\frac{1}{2}$.

1-26　设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to 0}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f(x)$ 的间断点，$x=0$，$x=-1$ 或者 $x=1$.

解　显然，$x=0$ 不是间断点，$f(-1)=0$，$x=-1$ 也不产生奇异.

讨论 $x=1$，$f(1)=1$.

当 $0<x<1$ 时，$x^{2n}\to 0$（当 $n\to\infty$ 时），

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=1+x;$$

当 $x>1$ 时，$x^{2n}\to\infty$（当 $n\to\infty$ 时），

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=0,$$

$f(x)$ 表达式：

$$f(x)=\begin{cases}0, & 当\ x\leqslant -1\\ 1+x, & 当\ |x|<1\\ 0, & 当\ x\geqslant 1\end{cases}$$

找出间断点 $x=1$

$$f(1-0)=2$$