复旦大学金融学研究生
学位课程教材

丛书主编 姜波克

MATHEMATICAL FINANCE

数学金融学

编著 雍炯敏
刘道百

上海人民出版社

世纪集团

复旦大学
金融学研究生
学位课程教材

《国际金融学》
姜波克 陆前进 编著

《货币银行学》
胡庆康 张卫东 编著

《现代投资学》
孔爱国 编著

《金融市场学》
刘红忠 编著

《金融工程学》
范龙振 胡 畏 编著

《公司财务学》
朱 叶 王 伟 编著

《金融经济学》
孙立坚 编著

《数学金融学》
雍炯敏 刘道百 编著

ISBN 7-208-04573-9
9 787208 045736 >
定价 38.00元

MATHEMATICAL

数学金融学

FINANCE

编著 雍炯敏
刘道百

上海人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学金融学/雍炯敏,刘道百编著.
—上海:上海人民出版社,2003
复旦大学金融学研究生学位课程教材
ISBN 7-208-04573-9

Ⅰ.数... Ⅱ.①雍...②刘... Ⅲ.金融学-应用
数学-研究生-教材 Ⅳ.F830-05

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 013870 号

责任编辑　李　娜
美术编辑　王晓阳
封面装帧　张国梁

·复旦大学金融学研究生学位课程教材·
数学金融学
雍炯敏　刘道百　编著
世纪出版集团
上海人民出版社出版、发行
(200001　上海福建中路 193 号　www.ewen.cc)
新华书店上海发行所经销　商务印书馆上海印刷股份有限公司印刷
开本 787 × 1092　1/16　印张 22　插页 4　字数 462,000
2003 年 5 月第 1 版　2003 年 5 月第 1 次印刷
印数 1—6,000
ISBN 7-208-04573-9/F · 988
定价　38.00 元

复旦大学金融学研究生
学位课程教材

丛书主编 姜波克

总前言

“复旦大学金融学研究生学位课程教材”是复旦大学金融学科建设计划项目，其用意是将当今金融学的各重要分支作为金融学研究生教材建设内容，形成学科建设的示范效应，进一步提升金融学教学和科研的水平，推动金融学各重要分支人才的培养。现在呈献给大家的这8本教材就是该项目的最终成果，它们是：《国际金融学》、《货币银行学》、《现代投资学》、《金融市场学》、《金融工程学》、《公司财务学》、《金融经济学》和《数学金融学》。这套教材涉及的领域很宽，其中既有早已被学界认同的国际金融学和货币银行学，也有在我国有待发展的金融市场学、金融工程学、现代投资学、公司财务学、金融经济学和数学金融学。

我们将这套教材定位在金融学研究生学位课程教材上，不是为了追求全国首套金融学研究生教材的名分，而是想为复旦大学乃至全国的金融学科建设尽自己的一份力量。为此，我们精心组织了在相关课程上有多轮教学经验并长期从事本领域研究的教授负责本套教材的编写工作，总投入48万元，历时三年，力图使这套教材能够体现出三个特色。第一，前沿性。教材充分反映了金融学各主要分支学科的核心内容、主要研究方法以及目前最新的研究成果。第二，交叉性。整套教材的框架兼收并蓄了宏观金融学和微观金融学。值得一提的是，金融学领域的重大变化和发展趋势的微观化，在我们这套教材中得到了充分的体现，其中有5本教材即属于微观金融的范畴。此外，定量分析和定性分析的内容在每一本教材中也得到了较合理的安排。第三，衔接性和层次性。研究生教材既要与本科生教材有衔接性，又要注重培养研究生的独立科研能力，在层次上与本科生教材要有所不同。目前，我国研究生阶段的教学与本科教学的台阶不明显，这在很大程度上与研究生教材的教学深度不够有关。因此在编写本套教材时我们尤其注意这一点，做到了在内容上拉开与同类专业课程的本科生教材的档次。

本套教材的编撰出版得到了上海人民出版社的大力支持。除了给予启动经费的支持外，上海人民出版社的同仁们还在多次有关教材的协调会上提出了诸多宝贵的意见，在此深表感谢。同时，我们也恳切希望全国高校的教师和研究生就本套教材使用中出现的问题向我们提出宝贵意见。

姜波克

2002年11月

前　言

在过去的半个世纪里，金融学的定量研究越来越引起人们的重视，尤其是20世纪90年代，全球性的金融风暴使得人们深切体会到，没有定量的思想方法要驾驭"金融"这匹野马简直是天方夜谭。而定量的思想方法自然地依赖于数学，19世纪的伟人马克思认为，一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步。而今，金融学已经进入其成熟期，数学的广泛和深入的运用已成为必然。于是，作为一门学科，数学金融学应运而生并且已登大雅之堂。近几年来，国内外从事数学金融学研究和教学的队伍不断壮大，希望学习或了解数学金融学的人也越来越多，为了适应这种迫切的需求，这几年在西方出现了大批数学金融学（或金融工程）方面的专著和教材。受国际金融形势的影响，在过去的十多年中，我国国内高级金融人才的需求不断增加。随着我国加入WTO，金融全球一体化的形势给我们带来的机遇和挑战，使得国内有志于金融事业的人们更感到数学金融学的重要。在这种形势下，近年来，全国许多高校兴办了与数学金融学有关的本科专业，开拓了与之有关的研究生科研方向，还有不少数学金融学方面的博士后在有关高校和一些金融机构从事有关方面的研究工作，形成了一派人丁兴旺的景象。

我国数学金融学的研究至少起始于20世纪90年代初。从20世纪90年代中期开始，国家自然科学基金委曾经设立"九五"重大项目、"十五"重点项目和一系列面上项目，对数学金融学的研究给予了很大的支持。国家的其他有关机构也以不同形式支持数学金融学的研究和教学。在科研方面，我国学者取得了许多引人瞩目的成果；有些方面的成果在国际上处于领先地位或有相当的影响。

在过去的几年中，复旦大学数学系对本科生和研究生开设了一些与数学金融学有关的课程。在参考了国外出版的数学金融学方面的专著和教材以及一些在国内出版的翻译教材后，我们发现编写一本具有较为广泛适用范围、层次分明、充分反映数学金融学思想的教材是十分必要的。作为一种尝试，我们编写了此教材。我们力图避免两点：如同词典，面面俱到；如同提纲，过于"点到为止"。同时，我们还尽量采用比较新的观点和若干最新的数学工具来处理有关问题，这将使得读者能够从较高的理论角度思考和研究他们将面临的有关数学金融学的问题。为了达到预定的目标，我们在选材和写作过程中动了不少脑筋。另外，我们还尽量追求数学上的严格性，追求"要讲就讲清楚"的效果，不故弄玄虚，"刁难"读者。但是，限于作者的知识水平，预定的目标未必真正能够实现，并且有可能存在许多错误，欢迎

读者提出批评意见。

本书可以分为三个部分：

第一部分包括第 1、2、3、4 章，这部分可以称作为“直观理论”。这一部分主要介绍数学金融学中的一些基本概念（包括远期、期货、期权、互换，等等）和若干基本思想（尤其是套期保值的思想）。这部分基本上不涉及高等数学，只在极少数地方提及导数和微分方程。这部分适用的对象是数学系本科高年级学生和非数学系与金融有关专业的硕士研究生。

第二部分包括第 5、6、7 章，这部分可以称作为“离散理论”。这一部分着重介绍单时段市场中的两个基本问题：未定权益定价问题和期望效用最优化问题。在这中间，市场的若干本质性质（例如，市场的完备性、单一价格定律、占优策略的存在性、无套利性，等等）得以逐步介绍和刻画。对于多时段市场，着重介绍了市场的动态特性。这部分涉及的数学基本限于线性代数和概率论初步。这部分适用的对象是数学系硕士研究生和非数学系与金融有关专业的硕士和博士研究生。

第三部分包括第 8、9、10、11 章，这部分可以称作为“连续理论”。这一部分在随机微分方程的框架下讨论连续时间证券市场，包括投资组合的自融资性、市场的完备性和无套利性、等价鞅测度、Black-Scholes 欧式期权定价公式、美式期权定价、最优投资组合和均值方差问题、利率期限结构，等等。在这部分内容中，若干近年来发展起来的数学工具（例如，倒向随机微分方程和正倒向随机微分方程，等等）充分发挥了它们在连续时间市场问题处理过程中的作用，也涉及一些比较高深的经典数学工具，例如，鞅论、随机最优控制、偏微分方程，等等。这部分适用的对象是数学系博士研究生和非数学系与金融有关专业的数学程度较好的博士研究生。

上述的三个部分相对独立又相辅相成，形成一个有机的整体。课程的讲授者可以根据需要选择其中的若干章节形成一个学期（或多于一个学期）的一门课程。比如，第 1、2、3、4 章和第 5 章的简介就可以成为本科生高年级的一门课；前四章的简介和第 5、6、7 章可以形成一门硕士研究生的课程；而第三部分则可以单独成为一门博士研究生的课程。

在本书的编撰过程中，我们得到了国家自然科学基金委“十五”重点项目、教育部博士点专项基金和香港“求是科技基金会”的资助，也得到了复旦大学“重点教材”基金和复旦大学金融研究院“研究生系列教材”项目的资助。在此，我们表示衷心的感谢！

作　者

2002 年 9 月于复旦大学

目　录

第1章

引　　言

1.1 一些例子

本书的题目是《数学金融学》。人们首先要问：什么是“数学金融学”？为了回答这个问题，我们先来看一下“数学”和“金融学”的定义：

- 数学：研究现实世界的空间形式和数量关系的科学。
- 金融学：研究运作“金钱”[①]事务的科学。

于是，顾名思义，数学金融学就是运用数学工具来定量研究金融问题的一门学科。换言之，它是定量地研究运作“金钱”事务的一门学科。

现代社会中，金融活动无处不在，其重要性是不言而喻的。下面，让我们举一些简单的例子来说明这一点。

例 1.1 （银行存款）假定某人有一笔 1 000 元的暂时不用的现金，则他可以将其存入银行，以便获得利息[②]收入。假定他将它存为 1 年定期，而银行的 1 年定期利率为 5%，则存入时间满一年时，这笔现金产生的利息为 $1\,000 \times 5\% = 50$ 元，从而，这笔现金的总额变为 $1\,000 + 50 = 1\,050$ 元。我们常称初始的 1 000 元为本金。

现在，让我们将上述的情形一般化。假定在时刻 $t=0$，某人有现金 P 元，他决定将其存银行的 1 年定期，利率为 r，则 1 年后，这笔钱的总额变为：

$$A = P + Pr = P(1+r) \tag{1.1}$$

此处，Pr 是在这一年中所获得的利息，我们称 P 为本金，也称之为 A 的现值。

更一般的情形是这样的：假如在任何时刻 $t \in [0,\ T]$，某人在银行存款总额为 $A(t)$，存期为 $h>0$，则在 $t=h$，初始的存款总额 $A(0)$（亦即本金）增值至 $A(h)$，它具有如下分解：

$$A(h) = A(0) + R(h) \tag{1.2}$$

其中 $R(h) \equiv A(h) - A(0)$，称为利息，也称由本金 $A(0)$ 在时间区间 $[0,\ h]$ 上产生

① 当然，这里的金钱指的是任何有价证券，包括现金、债券、股票、期权……等等。

② 利息可以看作银行向存户借钱所应付出的代价。

的回报。我们注意到，单单考虑利息的大小是没有多大意义的，因为本金可能有大有小，存期也可能有长有短，于是我们有必要引入下述的量：

$$r(h) \equiv \frac{A(h)-A(0)}{hA(0)} = \frac{R(h)}{hA(0)} \tag{1.3}$$

这是单位时间内的相对回报率，我们将 $r(h)$ 称为 $[0,\ h]$ 上的利率。利用(1.3)，我们可以将(1.2)写成：

$$A(h) = A(0)[1+r(h)h] \tag{1.4}$$

易见，如果取 $h=1$，$A(0)=P$，且记 $r=r(h)$，则(1.4)变为(1.1)。因此，(1.4)蕴含了(1.1)。

现在，让我们来考虑存在银行中的本金到期后自动转成同样期限续存时存款总额的变化。假设利率 r 保持常值，款子在时刻 $t=0$ 存入，存期为 h，在时刻 $t=h$，存款到期，其总额变为 $A(h)$。现将 $A(h)$ 作为本金以同样的期限续存，这种存款利息的计算方式称为复利。按这种方式，在时刻 $t=2h$，存款总额变为：

$$A(2h) = A(h)[1+rh] = A(0)[1+rh]^2 \tag{1.5}$$

容易知道，我们可以按此类推，如果总是到期自动续存，则在时刻 $t=kh$，存款总额成为：

$$\begin{aligned} A(kh) &= A((k-1)h)[1+rh] = A((k-2)h)[1+rh]^2 \\ &= \cdots = A(0)[1+rh]^k, \quad k \geqslant 1 \end{aligned} \tag{1.6}$$

一般而言，利率 r 不是常数，所以，如果记 r_j 为时间区间 $[jh,\ (j+1)h]$ 上的定期存款利率，则在时刻 $t=kh$，存款总额为：

$$A(kh) = A(0)\prod_{j=0}^{k-1}(1+r_j h),\ \forall k \geqslant 1 \tag{1.7}$$

特别地，当 $h=1$ 和 $r_j \equiv r$ 为常数时，我们得到：

$$A(k) = A(0)(1+r)^k,\ \forall k \geqslant 1 \tag{1.8}$$

这又回到了(1.6)。

习惯上(也是为了具有可比性)，人们所说的利率一般是指年利率①，即在长度为 1 年的时间内存款的相对回报率。比如，定期利率为 4%的 3 个月期存款意味着长度为 3 个月的时间内相对回报率为 1%的存款(因为 3 个月是 1/4 年)；而定期利率为 6%的 2 年期存款意味着长度为 2 年的时间内相对回报率为 12%的存款；其他期限的利率也可类似解释。活期有点类似于期限为 1 天的定期，但它始终是单利，因此，假如活期利率为 2%，则每天的利率为 $\frac{2}{365}$%，而存了 m 天的一笔金额为

① 除非特别声明，例如有时用月利率来计算。

P 的款子将获得利息：

$$R = P\frac{0.02m}{365} \tag{1.9}$$

一般而言，对于同一个初始存款时刻（比如 $t=0$），期限越长的定期存款，其（年）利率越高，活期的利率最低，从而，假如利率保持不变，则相同时间段中，较长期限的存款所获利息多于较短期限的存款所获利息。从借贷（或银行）的角度讲，借入归还日期较晚的款子理应支付较高的报酬，不过，有时也会有例外。在美国的利率史上，曾经有过长期利率低于短期利率的例子，这种情况在经济由高速增长阶段进入衰退阶段时会出现。

由于利率大小依赖于存期的长短，因此，同一笔款子采用不同的存款方式所得到的回报是不同的。为说明此点，让我们来看一看下面的情形。假定初始时刻的两笔钱数额均为 10 000 元。第一笔存 2 年定期，年利率为 5.25%，第二笔存 1 年定期，年利率为 5%，且第 1 年底到期时自动转存 1 年定期。我们来比较它们在第 2 年底的数额。

对于第一笔，它是以单利来计算的。由于年利率为 5.25%，因此，在第 2 年末，第一笔的总额为：

$$10\,000(1+2\times 0.052\,5) = 11\,050(\text{元}) \tag{1.10}$$

对于第二笔，它是以复利来计算的。利用(1.8)可得第 2 年末的第二笔的总额为：

$$10\,000\times(1+0.05)^2 = 11\,025(\text{元}) \tag{1.11}$$

我们可以将这两笔的现金流列入下表：

时　刻	第一笔	第二笔
第 1 年初	10 000	10 000
第 1 年末	10 525*	10 500
第 2 年末	11 050	11 025

*　此栏数额仅是账面上的。因为定期期限为 2 年，在 2 年末以前支取是以活期计算的，正因为如此，在第 2 年末作这两笔数额的比较才是有意义的。

由上，我们看到存 2 年定期的（按单利计算）要比存 1 年定期的（按复利计算）所获的利息多。但是，如果利率变动，情形可能会不相同。为说明问题，我们仅看一个比较极端的情形。假定在第 1 年末，银行 1 年定期利率由 5%调到 6%。则第二笔钱在第 2 年末的总额为：

$$10\,000\times(1+0.05)(1+0.06) = 11\,130(\text{元}) \tag{1.12}$$

这样存 1 年定期的第二笔钱反而获得更多利息。由此可见，如果利率变化，则长期限未必比短期限获得更多利息。所以，为了获得较好的（期望）回报，需要仔细研究利率的走势，这是利率理论所研究的问题之一。

现在，我们来看一下当存款利率为固定常数 r，存款期限 h 缩短时按复利计算的存款总额的变化。对给定 $t>0$（由于 r 为年利率，t 的单位为年），记不超过 $\frac{t}{h}$ 的最大整数为 $k=\left[\frac{t}{h}\right]$，则在时刻 t 的存款总额 $A(t;\ h)$（其中 $A(0;\ h)=A(0)$，$\forall h>0$）由下式给出（参看(1.7)或(1.8)）：

$$A(t;\ h)=A(kh;\ h)=A(0)(1+rh)^k=A(0)(1+rh)^{\left[\frac{t}{h}\right]}$$

$$=A(0)\left[\left(1+\frac{1}{(rh)^{-1}}\right)^{(rh)^{-1}}\right]^{rh\left[\frac{t}{h}\right]} \tag{1.13}$$

如果我们让期限 $h\to 0$，并且注意到微积分课程中 e 的定义：

$$\mathrm{e}=\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} \tag{1.14}$$

则由(1.13)可以得到：

$$A(t)\equiv A(t;\ 0)=\lim_{h\to 0}A(t;\ h)=A(0)\mathrm{e}^{rt},\ t\geqslant 0 \tag{1.15}$$

由(1.15)确定的 $A(t)$ 称为是由（常值）利率为 r 连续复利得到的存款总额。由上可知，当复合期限 h 充分小时，存款总额 $A(t)$ 可由 $A(0)\mathrm{e}^{rt}$ 来近似。值得强调的是，$A(0)\mathrm{e}^{rt}$ 是 $A(0)(1+rh)^k$ 的一个近似，而不能认为 $A(0)(1+rh)^k$ 是 $A(0)\mathrm{e}^{rt}$ 的一个近似。

最后，我们来看一下最一般的情况。考虑任何一个时间区间 $[t,\ t+h]$ $(h>0)$，则 $A(t+h)-A(t)$ 是存款总额在时间区间 $[t,\ t+h]$ 上的增量。瞬时利率被定义为瞬时的单位时间中的相对回报率，即：

$$r(t)=\lim_{h\to 0}\frac{A(t+h)-A(t)}{hA(t)}=\frac{A'(t)}{A(t)} \tag{1.16}$$

此处，我们假定 $A(\cdot)$ 是可导的 $\left(A'(t)=\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}\right)$。我们也可以将(1.16)写成：

$$A'(t)=r(t)A(t) \tag{1.17}$$

这是一个线性常微分方程。当 $r(t)\equiv r$ 为常数时，(1.17)的解为 $A(t)=A(0)\mathrm{e}^{rt}$，这就回到上面的(1.15)。

需要指出的是对于银行存款的所有上述讨论中（只要利率是非负的），我们总有：

$$A(t_1)\leqslant A(t_2),\ \forall\, 0\leqslant t_1\leqslant t_2 \tag{1.18}$$

这表明，对一笔存款，其总额总是非减的，就是由于此点，我们说银行存款是无风险的。不过，我们已经看到，不同的存款方式所获得的利息一般是不同的。

例 1.2 （按揭贷款）假定某人想购买一套住房，需要 30 万元。但眼下他只有

20 万元。于是，他先付 20 万元给房产商(作为首付款)，同时向银行按揭贷款 10 万元(即获取贷款后，分期归还)。假定贷款的月利率恒为 1%，以复利计算，贷款期限为 20 年。假定购房之日为某个月的月初，银行要求从该月起，借款者每个月末归还一笔等额的款子给银行，问：他每个月末需要付给银行多少钱?

我们这样来分析这个问题。假定他每个月末付 x 元，考虑第一个月末所付的 x 元的现值，记为 y_1，即在月初需存 y_1 元，才能使得在月末获得 x 元(按照 1% 的月利率计算)。容易知道，x 和 y_1 的关系如下：

$$x = y_1(1+0.01) = 1.01y_1 \tag{1.19}$$

所以，第一个月末所付的 x 元的现值为：

$$y_1 = \frac{x}{1.01} \tag{1.20}$$

现在来看一下第二个月末所付的 x 元的现值 y_2，由于复利的原因，x 和 y_2 的关系为：

$$x = y_2(1+0.01)^2 = 1.01^2 y_2 \tag{1.21}$$

从而，y_2 由下式给出：

$$y_2 = \frac{x}{1.01^2} \tag{1.22}$$

类似地，第 k 个月末所付的 x 元的现值 y_k 为：

$$y_k = \frac{x}{1.01^k},\ 1 \leqslant k \leqslant 240 \tag{1.23}$$

在第 240 笔还款付出后，现值为 10 万元的贷款全部还清，因此，下式成立：

$$\begin{aligned} 100\,000 &= \sum_{k=1}^{240} y_k = \sum_{k=1}^{240} \frac{x}{1.01^k} = \frac{x}{1.01} \cdot \frac{1-1.01^{-240}}{1-1.01^{-1}} \\ &= \frac{x}{0.01}[1-1.01^{-240}] \end{aligned} \tag{1.24}$$

因此，每个月末应付款额 x 为：

$$x = \frac{1\,000}{1-1.01^{-240}} = 1\,101.09(\text{元}) \tag{1.25}$$

这样，在这 20 年中，此人共付出

$$240x = 240 \times 1\,101.09 = 264\,261.60(\text{元}) \tag{1.26}$$

其中，银行在 20 年中获得利息 164 261.60 元。

值得注意的是利率的大小是至关重要的。我们来看一下如果月利率调至 0.9% 产生的结果。此时，(1.25)变为：