

U4

隧道力学

【日】 樗木武 著
关宝树 麦倜曾 译

中国铁道出版社



隧 道 力 学

[日] 樽木武 著

关宝树 麦桐曾 译

中 国 铁 道 出 版 社

1983年·北京

内 容 简 介

本书系日本九州大学土木工程系副教授、工学博士榎木武的新著。全书共分四篇十二章，全面地论述了隧道工程中的力学问题及其现象。其中包括力学的基本知识、坑道围岩的力学分析、支护结构的力学分析及隧道涌水的力学分析等，并附有若干实例。可供从事地下结构理论研究、设计和施工技术人员参考，亦可作为高等院校有关专业教材。

トンネル力学

榎木武 著

共立出版株式会社 1977

隧 道 力 学

关宝树 麦偶曾 译

中国铁道出版社出版

责任编辑 王顺庆

封面设计 王毓平

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：850×1168 $\frac{1}{4}$ 印张 9.875 字数·235千

1983年8月 第1版 1983年3月 第1次印刷

印数：0001—37500册 定价：1.45元

译 者 序

日本九州大学土木系副教授、工学博士榎木武编著的《隧道力学》(トンネル力学)是一部立意新颖、内容广泛、别具风格的阐述与隧道工程有关的力学问题的专著。

从60年代以来,隧道及地下工程无论在理论上,还是在实践上都出现了一个新的飞跃。其主要标志之一就是把一个长期属于“经验科学”的地下工程技术,转变为具有一定理论基础的现代科学技术。这个转变是极其重要而明显的。一门以岩体力学、工程地质力学、弹塑性力学、结构力学、流体力学等为基础的“隧道力学”,就是在这种条件下产生的。本书就是这方面的著作之一,它在日本土木工程界有着较高的评价。

本书的内容大体分为力学的基础理论,围岩的力学问题,支护结构的力学问题及隧道涌水的力学问题等四部分。作者主要是从理论上全面地阐明了隧道工程中发生的各种力学现象和过程,以及分析这些问题的基本方法和途径,如围岩的工程性质、当前各种分析隧道围岩应力的方法、支护体系(围岩—支护结构)的力学分析、隧道涌水的力学动态及涌水量的预估等。这对我们从理论上去认识和理解地下工程的力学本质,掌握现代隧道技术的发展,改善我国当前的隧道设计、施工面貌很有参考价值。故将此书全文译出,推荐给广大读者。

本书初稿译出后,曾在教学中加以试用,效果较好,不失为一部良好的教学参考书或选修课的教材。

译 者

1981年5月于西南交通大学

目 录

第一篇 力学基础知识

第一章	力学基础	1
§ 1—1	序言	1
§ 1—2	力的平衡条件	2
§ 1—3	应变的相容条件	3
§ 1—4	应力-应变关系方程	4
§ 1—5	边界条件	20
§ 1—6	位移法的基本方程	21
§ 1—7	应力法的基本方程	23
§ 1—8	关于分析方法	24
§ 1—9	变分原理	26
第二章	塑性、破坏理论	32
§ 2—1	序言	32
§ 2—2	弹性破坏的条件	32
§ 2—3	破坏理论	42
§ 2—4	塑性变形时的应力-应变方程	46
第三章	有限单元法	53
§ 3—1	序言	53
§ 3—2	有限单元法的力学模型	54
§ 3—3	有限单元法的理论基础	55
§ 3—4	计算中的几个问题	61
§ 3—5	材料非线性问题的分析	64
§ 3—6	粘弹性体的分析	72

第二篇 围岩的力学分析

第四章	围岩的工程性质	75
§ 4—1	序言	75
§ 4—2	土体的工程性质	76
§ 4—3	岩体的工程性质	83
第五章	围岩的力学分析理论	89
§ 5—1	序言	89
§ 5—2	平面应变问题的有限单元法	89
§ 5—3	三维问题的有限单元法	94
第六章	围岩的二维弹性分析	101
§ 6—1	序言	101
§ 6—2	围岩的一次应力状态	101
§ 6—3	围岩二次应力状态的分析概念	106
§ 6—4	无限弹性体围岩内的隧道	108
§ 6—5	半无限弹性体围岩内的隧道	146
第七章	围岩的二维非线性分析	161
§ 7—1	序言	161
§ 7—2	围岩的无拉分析	161
§ 7—3	围岩的弹塑性分析	164
§ 7—4	围岩的不连续分析	176
§ 7—5	围岩的粘弹性分析	179
第三篇 支护结构的力学分析		
第八章	地压	188
§ 8—1	序言	188
§ 8—2	松弛地压	189
§ 8—3	破坏流动性地压	195
§ 8—4	底压	196
第九章	支护结构概论	199

§ 9—1	序言	199
§ 9—2	支撑概论	199
§ 9—3	衬砌概论	204
第十章	支护结构的力学分析	207
§ 10—1	序言	207
§ 10—2	支护结构的力学分析理论	208
§ 10—3	圆形支护结构按圆弧梁单元的分析	223
§ 10—4	分析例 1 —— 圆形衬砌	229
§ 10—5	分析例 2 —— 马蹄形衬砌、矩形衬砌	235
§ 10—6	支护结构的弹塑性分析	238
§ 10—7	H型钢拱支撑的弹塑性动态	246
第十一章	支护结构与围岩的整体分析	254
§ 11—1	序言	254
§ 11—2	分析理论	254
§ 11—3	隧道正上方地面开挖对已成衬砌的影响	255
§ 11—4	粘弹性围岩中的后期荷载	258

第四篇 涌水的力学分析

第十二章	隧道涌水	265
§ 12—1	序言	265
§ 12—2	涌水特性	266
§ 12—3	地下水流的连续方程和运动方程	268
§ 12—4	用有限单元法分析二维稳定涌水的理论	274
§ 12—5	涌出点推定法	284
§ 12—6	还原有限单元法的二维稳定涌水的 分析理论	288
§ 12—7	隧道稳定涌水的二维分析	294
§ 12—8	非稳定涌水的二维分析	297
§ 12—9	三维稳定涌水的分析	304

第一篇 力学基础知识

第一章 力学基础

§1—1 序 言

在有关物体的力学问题中，有荷载、应力、应变及位移四个基本量值，分析的目的就是找出它们之间的相互关系。荷载与应力的关系是由平衡条件给出的，应力与应变的关系则由应力-应变方程决定。此外，根据对变形的考察可求出应变和位移的关系。在这些条件上再引入边界条件，就能计算满足全部条件的未知量（应力、应变、位移）。这就是力学问题分析的基本内容。

在实际的分析中，根据应用上述条件的不同顺序，大体上有位移法和应力法（也称力法）两种不同的方法。两种方法的优劣视问题的性质而异，不能一概而论。

弹性体并假定变形微小时，其基本方程是线性的，不仅在分析上极为方便，而且可以应用叠加原理。为此，在各种力学问题中多首先假定物体为弹性体和变形是微小的，而后求其近似解。当近似解对工程目的来说精度不够时，就应进行有关材料的力学性质和变形的更严密的研究。但是如下一章所述，对不是弹性体材料的非线性问题和变形不是微小的几何非线性问题，也可以反复应用微小变形弹性体的分析方法求解。

本章概述隧道力学问题分析所需的基础知识和分析的基本方法，重点是基于微小变形的弹性理论，必要时引入材料的非线性问题。关于几何非线性问题，因为对隧道力学来说不那么重要，故省略。

§ 1-2 力的平衡条件

设作用在物体内任一微分面积 ΔA 上的内力总和为 ΔP , ΔP 的法向分量为 ΔN , 切向分量为 ΔQ (图 1-1), 则由下式定义的力的强度叫应力:

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} = p, \quad \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} = \sigma,$$

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \tau \quad (1-1)$$

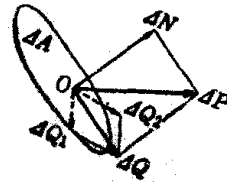


图 1-1

p 称为合应力, σ 称为垂直应力或正应力, τ 称为剪应力。

其次在物体内取出任意微小立方体 $dx dy dz$, 研究作用在这个微小立方体上的力的平衡条件。在微小六面体的表面上作用有正应力和剪应力, 共有三个正应力分量 (σ) 和六个剪应力分量 (τ) (图 1-2)。此外, 除这些力外, 还有分布作用的重力和离心力等体积力 (*body force*)。设体积力的 x 、 y 、 z 方向分量为 X 、 Y 、 Z 。首先, 根据通过立方体中心并绕与 x 、 y 、 z 轴平行的三个轴的力矩平衡条件, 略去微小项后得出下式

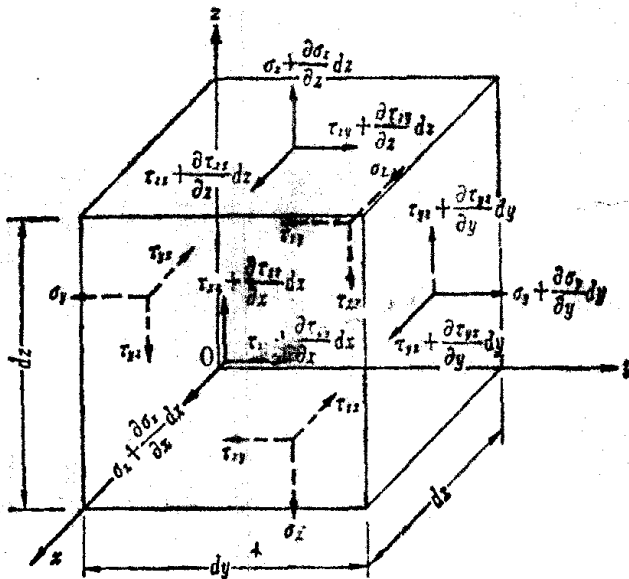


图 1-2

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}, \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (1-2)$$

据此，以后在六个剪应力分量中，只要选出三个独立量进行研究就可以了。

考虑 (1-2) 式后，根据沿 x 、 y 、 z 各轴方向的力的平衡条件，得出下式：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

作为二维应力状态（也叫平面应力状态），我们研究 xy 平面内的应力，设 Z 方向没有应力，则

$$\begin{aligned} \sigma_z &\equiv 0, \quad \sigma_y \equiv 0, \\ \sigma_z &= 0, \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \end{aligned} \quad (1-4)$$

把它们代入 (1-3) 式，得出平面应力状态的平衡条件如下：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0 \end{aligned} \quad (1-5)$$

§ 1-3 应变的相容条件

研究微小线段 ds ，令其端点的直角坐标系 (x 、 y 、 z) 的各轴向位移分量为 u 、 v 、 w ，则：

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1-6)$$

可定义为纵向应变（简称为应变）。根据对微小面积 $dxdy$ 的变形状态的考察，可定义剪应变如下：

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1-7)$$

在最为普遍的三维状态中，上述六个应变变量同时存在，但无论哪一个都可以用三个位移分量定义，所以它们都不是独立的，而相互间有着下述关系，这叫做相容条件。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (1-8)$$

在 xy 平面内有应变，而在平面外方向不产生应变的二维应变状态（平面应变状态）中，

$$\left. \begin{aligned} u \neq 0, v \neq 0, w = 0 \\ \varepsilon_x \neq 0, \varepsilon_y \neq 0, \varepsilon_z = 0 \\ \gamma_{xy} \neq 0, \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

此时，相容条件如下：

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \quad (1-10)$$

§ 1-4 应力-应变关系方程

A、应力-应变关系方程的基本形式

在隧道工程中，作为研究对象的材料有土、岩石、混凝土、钢、木材等多种，其应力和应变关系随各种材料而异。所以最好按各种材料分别讨论其应力-应变关系。其详情在其他一些书籍中已有论述，在此只介绍在实际计算上采用的一些方程。

(1) 弹性体

最简单的应力-应变关系可用下述的直线关系，即所谓虎克定律表达。具有这种性质的理想材料称为弹性体。

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1-11)$$

E 是比例常数，叫弹性模量。

此外，进行单轴拉伸试验时，不仅有拉伸方向的应变 ϵ_1 ，而且与其垂直的方向也产生应变 ϵ_2 ，使试件断面发生改变（图 1—3）。此时，在弹性体中， ϵ_1 和 ϵ_2 的比值可视为定值，即

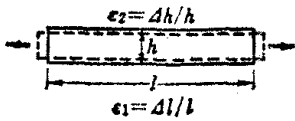


图 1—3

$$\left| \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right| = \nu \quad (1-12)$$

ν 叫泊松比。

(2) 硬化性弹塑性体、完全弹性体、完全刚塑性体

应力达到屈服点 σ_Y 时，产生塑性流动，接着引起变形硬化，其间的应力-应变方程可用下式表达，具有这种性质的材料叫做硬化性弹塑性体。

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } \epsilon \leq \epsilon_Y: & \quad \sigma = E\epsilon \\ \text{当 } \epsilon_Y \leq \epsilon \leq \epsilon_{s1}: & \quad \sigma = \sigma_Y \\ \text{当 } \epsilon_{s1} \leq \epsilon: & \quad \sigma = E_{s1}(\epsilon - \epsilon_{s1}) + \sigma_Y \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

式中 ϵ_Y —— 屈服应变。

ϵ_{s1} 、 E_{s1} —— 应变硬化开始点的应变及切线斜率。

在上式中，特别是 $E_{s1} = 0$ 时，产生无限制的塑性流动（完全弹塑性体）。当 $E = \infty$ ，忽略弹性变形时，应力和应变之间的关系可单纯视为图 1—4 中的折线 $O A' P$ （完全刚塑性体）。

(3) 双直线型应力-应变方程

忽略塑性流动的钢材的应力-应变关系，其初次近似可假定为弹性体。但是，岩石和混凝土等的应力-应变关系从一开始就是曲线的，在这种场合用一条直线近似表达是不合理的，所以要用两条以上的直线组成的折线近似地表达，其中特别是用两条直线近似表达的，称为双直线型应

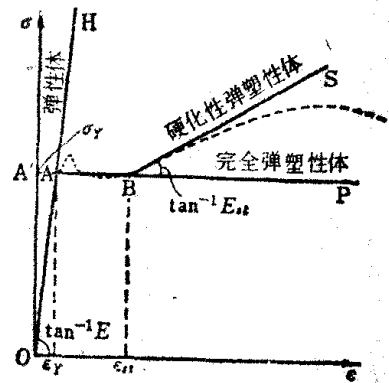


图 1—4 应力-应变曲线的理想化

力-应变方程，其公式表示如下（参见图 1—5）：

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } \varepsilon \leq \varepsilon_Y: \sigma &= E\varepsilon; \\ \text{当 } \varepsilon \geq \varepsilon_Y: \sigma &= E_{s'}(\varepsilon - \varepsilon_Y) + \sigma_Y \end{aligned} \right\} \quad (1-14)$$

作为双直线型的扩充，屈服点以后的应力-应变关系，有时采用符合实际情况的曲线（图 1—6），即屈服点以后的应力-应变方程采用

$$\sigma = F(\varepsilon) \quad (a)$$

并把 ε 分为弹性部分 ε^e 和塑性部分 ε^p ，即 $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$ ，此时，(a) 式的微分形式为：

$$d\sigma = \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon^e} \right) d\varepsilon^e + \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon^p} \right) d\varepsilon^p \quad (b)$$

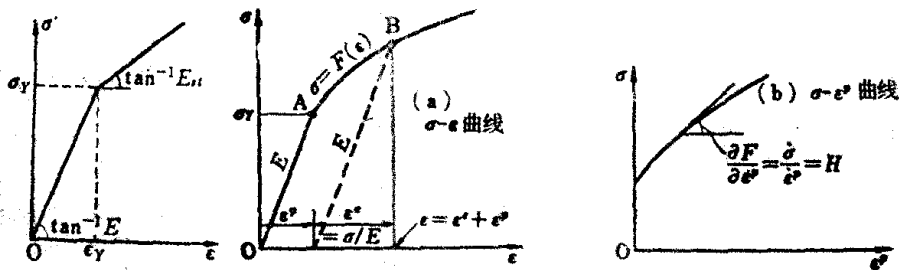


图 1—5 双直线型应力-应变关系

图 1—6 双直线型应力-应变关系的一般化

由图可知， $\partial F / \partial \varepsilon^e = E$ ，并且 $\partial F / \partial \varepsilon^p = H$ ，即曲线的切线斜率，称为应变硬化率，其值视应力的大小而变。结果 (b) 式可改写为

$$\dot{\sigma} = E \dot{\varepsilon}^e + H \dot{\varepsilon}^p \quad (1-15)$$

式中 $\dot{\sigma} = d\sigma$ (应力增量)， $\dot{\varepsilon} = d\varepsilon$ (应变增量)。

(4) 粘弹性体

为了说明徐变、应力松弛、弹性后效等现象，除材料的固体性质外，有必要考虑粘性液体的性质。即在前面所述的应力-应变关系中再引入时间因素，这样的处理叫流变 (rheology)。

流变处理的材料中最简单的模型，在固体性质假定为应力和应变或应力速度和应变速度都具有直线关系的弹簧，在粘性性

质假定为应力和应变速度呈直线关系的阻尼器的粘弹性体，按照弹簧和阻尼器的组合而有各种粘弹性体模型，其中最基本的有：弹簧和阻尼器串联组合的马克斯威尔（Maxwell）单元和并联组合的伏格特（Voigt）单元。还有在马克斯威尔单元和伏格特单元上附加弹簧和阻尼器的组合模型。图 1—7 就是其中的一些示例。在这些模型中，图（b）伏格特的四单元模型在考虑迁移徐变和定值徐变两个过程中的现象上比较适用。

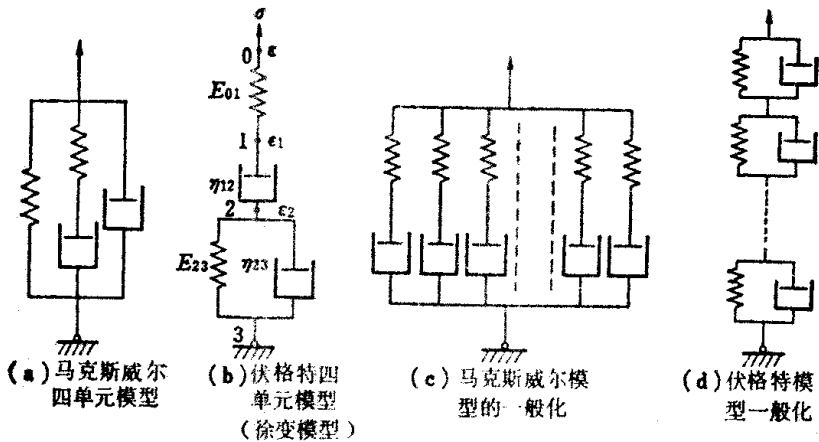


图 1—7 组合模型

伏格特四单元模型如按图示各点的应力、应变定义的话，可得出以下各式

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= E_{01}(\varepsilon - \varepsilon_1) \\ \sigma &= \eta_{12}(\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2) \\ \sigma &= E_{23}\varepsilon_2 + \eta_{23}\dot{\varepsilon}_2 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

上式用矩阵表示如下：

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{01} & \vdots & -E_{01} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -E_{01} & \vdots & E_{01} & 0 \\ -E_{01} & \vdots & E_{01} & E_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \dots \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & \eta_{12} - \eta_{12} & \\ 0 & \vdots & 0 & \eta_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\epsilon} \\ \dots \\ \dot{\epsilon}_1 \\ \dots \\ \dot{\epsilon}_2 \end{pmatrix}$$

上式右边第一项是应变 ϵ 和内部应变 ϵ_1 、 ϵ_2 ，其系数是由弹簧的弹性模量组成的。第2项是应变及内部应变的速度分量，其系数由阻尼器的粘滞系数组成。扩充这个公式，比较一般的组合模型的流变方程可表达如下¹⁾

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon \\ \epsilon_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\epsilon} \\ \dot{\epsilon}_I \end{pmatrix} \quad (1-16)$$

式中 $\epsilon_I^T = [\epsilon_1 \epsilon_2 \dots]$ (内部应变量)；

A——弹性模量矩阵；

B——粘滞系数矩阵；

B、三维状态的应力-应变线性方程

(1) 一般各向异性体

在三维应力状态中，存在六种应力及应变分量，两者之间视为线性时，各向异性体的应力-应变方程可用下式表示。

$$\sigma = E \epsilon \quad (1-17)$$

式中 $\sigma^T = [\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}]$

$\epsilon^T = [\epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx}]$

E = $[E_{ij}]$ (6×6 阶弹性模量矩阵)

弹性模量**E**的元素共有36个，它们不是全部独立的，其中 $E_{ij} = E_{ji}$ ($i \neq j$)。故36个中只有21个是独立的，此外，(1-17)式还可以用下式表达

$$\epsilon = C \sigma \quad (1-18)$$

式中 **C** = $[C_{ij}] = E^{-1}$

(2) 正交各向异性体

在特殊材料中，分析上多采用正交各向异性体。这种叫法是因为它们在材料力学性质方面有三个相互正交的对称轴。现选定与材料的力学性质对称轴一致的坐标为原坐标系 (x, y, z) ，把它绕 z 轴旋转 180° 后得出另一坐标系 (x', y', z') 。此时，在正交各向异性体中，例如 x' 方向的应力 $\bar{\sigma}_{x'}$ 和各轴向的应变分量，应与原坐标系中的采取同一形式。

$$\sigma_z = e_{1*} \varepsilon, \quad \bar{\sigma}_{x'} = e_{1*} \varepsilon' \quad (d)$$

式中 $e_{1*} = [E_{11} \ E_{12} \ \dots \ E_{16}]_0$

另外，求出原坐标系与新坐标系的方向余弦，把应力及应变进行坐标变换，则

$$\sigma_{x'} = \sigma_x,$$

$$\varepsilon_{x'} = \varepsilon_x, \quad \varepsilon_{y'} = \varepsilon_y, \quad \varepsilon_{z'} = \varepsilon_z,$$

$$\gamma_{x'/y'} = \gamma_{xy}, \quad \gamma_{y'/z'} = -\gamma_{yz}, \quad \gamma_{z'/x'} = -\gamma_{zx}$$

把这些代入 (d) 式，得

$$\bar{\sigma}_{x'} = e_{1*} \varepsilon,$$

$$\bar{\sigma}_{x'} = e_{1*} [\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \gamma_{xy} - \gamma_{yz} - \gamma_{zx}]^T$$

根据正交各向异性体的性质，应有 $\sigma_{x'} = \bar{\sigma}_{x'}$ ，为使这个关系成立，应使 $E_{15} = E_{16} = 0$ 。同样地研究 (1-17) 式的另外 5 个公式，将以 x 、 y 轴分别代替 z 轴，把坐标系相应地绕 x 、 y 轴旋转 180° 的话，可得下列新的公式

$$\begin{aligned} E_{14} = E_{24} = E_{25} = E_{26} = E_{34} = E_{35} = E_{36} = E_{45} \\ = E_{46} = E_{56} = 0 \end{aligned}$$

依上所述，最后正交各向异性体的应力-应变方程如下，独立的弹性模量只有 9 个。

$$\sigma = E_{\sigma, \varepsilon} \quad (1-19)$$

式中 $E_{or} =$

E_{11}	对称				
E_{12}	E_{22}				
E_{13}	E_{23}	E_{33}			
0	0	0	E_{44}		
0	0	0	0	E_{55}	
0	0	0	0	0	E_{66}

或用下式表示

$$\epsilon = C_{or} \sigma \quad (1-20)$$

式中 $C_{or} = E_{or}^{-1} =$

$1/E_x$	$-\nu_{xy}/E_y$	$-\nu_{xz}/E_z$	0	0	0
$-\nu_{yx}/E_x$	$1/E_y$	$-\nu_{yz}/E_z$	0	0	0
$-\nu_{zx}/E_x$	$-\nu_{zy}/E_y$	$1/E_z$	0	0	0
0	0	0	$1/G_{xy}$	0	0
0	0	0	0	$1/G_{yz}$	0
0	0	0	0	0	$1/G_{zx}$

E_x ——弹性模量， ν_{xx} ——泊松比， G_{xx} ——剪切弹性模量。

$$\frac{\nu_{xy}}{E_y} = \frac{\nu_{yx}}{E_x}, \quad \frac{\nu_{xz}}{E_z} = \frac{\nu_{zx}}{E_x}, \quad \frac{\nu_{yz}}{E_z} = \frac{\nu_{zy}}{E_y}$$

$$\frac{1}{G_{xy}} = 2\left(\frac{1}{E_x} + \frac{\nu_{xy}}{E_y}\right), \quad \frac{1}{G_{yz}} = 2\left(\frac{1}{E_y} + \frac{\nu_{yz}}{E_z}\right),$$

$$\frac{1}{G_{zx}} = 2\left(\frac{1}{E_x} + \frac{\nu_{zx}}{E_z}\right)$$

(3) 在一个平面内可视为各向同性体的物体

类似沉积土和沉积岩石这样的物体，在沉积面内具有各向同性的力学性质，而在平面以外方向则是不同的。现令在 xy 平面内是各向同性的，则在前项 (2) 的各公式中，将下角标 x 、 y 互换也应得到同样的应力和应变关系。据此，各弹性模量之间的关系如下

$$E_{11} = E_{22}, \quad E_{13} = E_{23}, \quad E_{55} = E_{66}$$

另外，研究坐标系绕 Z 轴旋转任意角度得到新坐标系 (x' 、 y' 、 z') 的剪应力 $\tau_{x'y'}$ 。即在 $\tau_{x'y'} = E_{44}\gamma_{x'y'}$ 时，由于把应变的坐标变换式代入 $\gamma_{x'y'}$ 中得到的结果和根据应力的坐标变换式