力学问题中的正投影法

Г. Д. 安納罗夫 著

建筑工程出版社

力学問題中的正投影法

曾大民 譯

建筑工程出版社出版

·1959·

內容提要 本書系根据苏联国立技术理論書籍出版社1948年版譯出的。

本書应用了画法几何学中的正投影法对空間力学問題提出了一系列新的解法。这些解法可以大大地节省解題的时間和劳动力。

本書供技术人員以及高等学校学生專修理論力学、画法几何学、机械原理、建筑机械等时參考之用。

原本說明

書　名	МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ
著　者	Г. Д. Ананов
出版者	Государственное издательство технико-теоретической литературы
出版地点及年份	Москва—1948

力学問題中的正投影法

曾大民 譯

*

1959年1月第1版　1959年1月第1次印刷　2,560册

850×1168・1/32・100千字・印張 5½・定价 (10) 0.90元

建筑工程出版社印刷厂印刷・新华書店发行・書号：805

建筑工程出版社出版（北京市西郊百万庄）

（北京市書刊出版业营业許可証出字第052号）

目　录

緒　論

随着苏維埃社会主义的建筑与技术底發展，提出了有关改进空間力学問題的解法这一命題。这些解法又务能解算复杂的桥梁和起重机等机械和結構上的空間桁架。

所有解算空間力学問題的圖解法可分为兩大类：第一类，基于应用蒙日（Монж）的正投影法来圖示矢量，第二类則以应用各种不同方法將空間矢量圖示于一个平面上作为基础。

有关第一类方法的作者如：院士 И. И. 阿尔托波列夫斯基（Артоболевский），教授 Г. Г. 巴拉諾夫（Баранов），别依也尔（Бейер），院士 Н. Г. 布魯也維奇（Бруевич），格涅别尔格（Геннеберг），庫里曼（Кульман），教授 Н. И. 梅尔查洛夫（Мерцалов），教授 Я. Б. 蕭尔（Шор）。

有关第二类方法的作者如：教授 Б. Н. 果尔布諾夫（Горбунов）和教授 А. А. 烏曼斯基（Уманский），教授 Ф. М. 季美特貝尔格（Диментберг），馬依奥尔（Майор），米捷斯（Мизес），普拉格尔（Прагер），費傑尔戈費尔（Федергофер）。

用不着深入到各个方法的細节中，也可以看出，当其他条件相等时，就应該采用以正投影法作为基础的方法。因为絕大多数的工程圖都是用正投影表示的。因而，当应用以正投影法为基础的圖解法时，原始的資料旣可以直接取自施工圖，而且还可以把圖解的結果直接移回施工圖上。此外，必須指出，正投影法是所有工程师所熟識的，而且用正投影法又可以足够明显地表示出空間的形狀。

在某些时候是采用基于应用各种不同方法將矢量圖示于一个平面上的圖解法，（例如，馬依奥尔-米捷斯法）。这是因为，应用以正投影作为基础的方法去解算空間力学問題的最簡易的方法，大

家还不知道。

作者提出一个圖解空間力学問題的新方法，这个新方法以正投影法作为基础，并自始至終地运用了投影面变更法。

在第一章中介紹了圖解作圖中最常遇見的矢量基本运算——自兩个矢量的加法直至二重矢量积和矢量数性积。兩矢量的数性积和矢量积之値的圖解法显示出作者所提出的方法底基本特征。在第一章之末，引出了別依也尔的基本作圖法，以便將所提出的方法与別依也尔法作一比較。

在第二章中应用了作者所提出的方法去解算空間靜力学問題以及介紹了建筑力学中空間桿件系統底基本問題的新解法，使复杂的空間桁架的計算得以大大地简化。

在第三章中介紹了空間运动学問題的新圖解法。

在第四章中应用作者所提出的方法去解算矢量方程式。

作者对他的老师阿納托利伊•伊薩科維奇•盧里雅（Анатолию Исааковичу Лурье）教授表示深深的感謝，在作者写作草稿的过程中所給予的宝貴指示。

作者对列宁格勒精密力学光学研究所管理处在作者写稿的工作过程中所給予的組織上的帮助表示謝忱。

1947年12月

第一章　矢量的基本运算

第一节　矢量的圖示法

矢量表示一个数量和空間的一个方向，該数量是以一定的量度單位在矢量本身量度之。簡單地說，矢量可称为用一定比例尺度量的有向綫段。

矢量可分为三种形式:

1)約束矢量(вектор связанный)。要确定約束矢量，必須給出其大小、方向和矢量始点在空間的位置。

2)滑动矢量(вектор скользящий)。要确定滑动矢量，必須給出其大小、方向以及矢量在空間所在的直綫。

3)自由矢量(вектор свободный)。矢量本身的大小和方向确定后，空間任意一点都可作为自由矢量的始点。

矢量的运算是以自由矢量这个概念为基础的。以后，除非特别声明，所有的矢量都看作是自由矢量。

在画法几何学中，有各种不同的方法表示空間的一个直綫綫段。

用正投影法可以表示出一个直綫綫段在两个互相垂直的投影面內的位置。假如給綫段的一端加上矢头，则用正投影不但能够表示直綫綫段在空間的位置，而且还能够表示其方向。由此可見，正投影可以表示矢量，只要配上已知的矢量比例尺。

圖 1 是用正投影表示矢量 $\boldsymbol{a}$；a—矢量 $\boldsymbol{a}$ 的横面投影 (горизонтальная проекция)；a'—矢量 $\boldsymbol{a}$ 的縱面投影 (вертикальная проекция)。

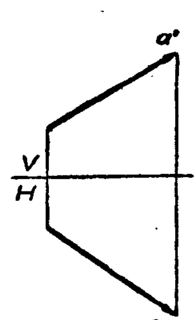

圖 1

假如采用一种以長度單位表示矢量大小單位的固定比例尺，則根据矢量的投影，就可以决定給出的矢量的大小。

正投影加上比例尺，不但可以确定自由矢量，而且还可以确定滑动矢量，甚至約束矢量。要表示滑动矢量和約束矢量时，只要加以特别的标記，就很明显，如果是說及滑动矢量，則正投影所表示的矢量只能沿着它的作用綫运动，而如果指明是約束矢量，則它在空間再不能有所移动。

用正投影还可以足够簡單地来进行所有矢量的基本运算，以及解决与矢量运算有关的問題。正投影之所以能够解决空間几何的量度問題，也在于此。

不过，在某些場合下，假如需要將空間的矢量底形象表示得更清晰，則可采用一种最合理的軸測圖，例如斜角二測投影圖（正面

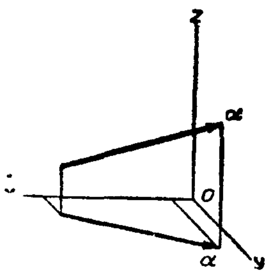

圖 2

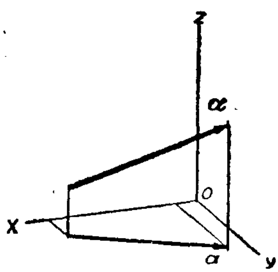

圖 3

投影——圖 2）(косоугольная диметрическая аксонометрия）或直角二測投影圖（二測投影——圖 3）(прямоугольная диметрическаяаксонометрия)。

矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在空間的位置可以由它的一个軸測投影 $\boldsymbol{\alpha}$ 以及它的一个次投影(вторичных проскций)，例如次横面投影 α 所决定。

第二节　矢量加法

兩个矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 之和可得第三个矢量 $\boldsymbol{\gamma}$，可用下面的方法确定之：从空間的任意点 A 作矢量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\alpha}$，从它的終点作矢量 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{\beta}$，將第一个矢量的始点与第二个矢量的終点联起来，就得

到矢量 $\overrightarrow{AC}$，即矢量和γ(вектор–сумма)。

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC} \text{ 或 } \alpha+\beta=\gamma。$$

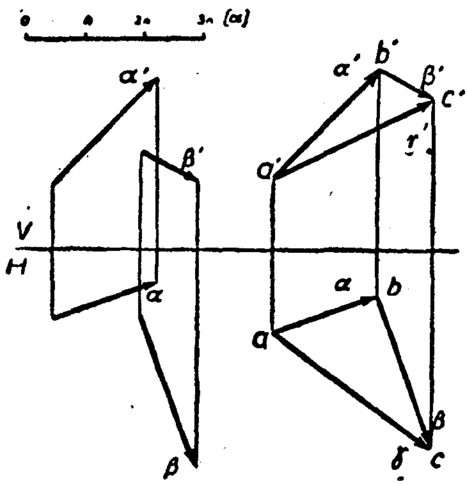

圖 4

在圖 4 中，給出兩个矢量 α和 β 的正投影和公共的比例尺。矢量α 的因次$[\alpha]$必須等于矢量 β 的因次$[\beta]$。在空間选取一任意点 A（以其正投影表示），然后按照定义上所規定的程序作圖。这时，我們要考慮到只要兩个矢量的同名投影是相等的，又是互相平行的，而且具有相同的方向，則这兩个矢量是相等的。

在軸測投影圖中可用同样的方法作圖，例如作出兩个矢量α，β和它們的矢量和γ 的二測投影，如圖 5 所示。

如果需要作出兩个矢量 α 和 β 的矢量差 δ(вектор–разность)，可以把矢量 α 和矢量 $-\beta$ 相加起来。矢量 $-\beta$与矢量β 方向相反，而大小相等。

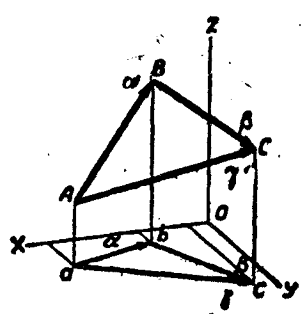

圖 5

用求出两个矢量的矢量和 γ 相类似的方法，我們可以求出空間任意数量的矢量的矢量和 σ。

第三节　矢量与数量的乘法

矢量 α 与数量 λ 的积是一个新的矢量，它的大小等于 $|\lambda||\alpha|$，方向則与矢量 α 的方向相同或者相反，这視 $\lambda>0$ 抑或 $\lambda<0$ 而定。

要作出已知矢量 α 和数量 λ 的矢量积 $\lambda\alpha$(вектор-произведение)，应該变更矢量 α 的長度和方向，長度和方向的变更这是与上述定义相适用的。

众所周知，假如空間的直綫綫段变更了自己的長度，則它的投影的長度也按直綫比例变更。反过来說也同样正确。由此可得矢量与数量相乘的作法。

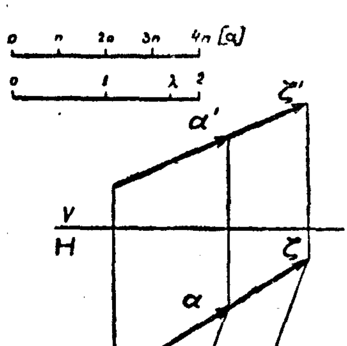

圖 6

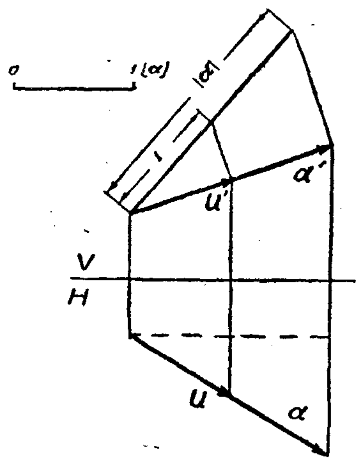

圖 7

在圖 6 中，給出矢量 α 的正投影及比例尺。在給出的第二个比例尺的标綫上截取一綫段，以表示数量 λ。

为要作出 $\zeta=\lambda\alpha$ 的正投影，我們可以根据 $\frac{\zeta}{\lambda}=\frac{\alpha}{1}$ 这一条件，例如先作出它的横面投影，这可用簡單的比例法作出。根据矢量 ζ 的横面投影 ζ，作出它的縱面投影 ζ'。这时，我們要考虑到矢量 α

与 ζ 具有相同的方向。我們再在圖 7 中作出已知矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的單位矢量(орт)作为一例。

以符号 $\mathbf{u}$ 表示矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的單位矢量，則

$$\mathbf{u}=\frac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|}.$$

我們用直角三角形法确定矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的眞值 $|\boldsymbol{\alpha}|$，使直角三角形的一个直角边等于矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的縱面投影 α'，使另一直角边等于矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的兩个端点到 V 面的距离之差。在表示数值 $|\boldsymbol{\alpha}|$ 的綫段上，用量度矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的比例尺来截取一單位。將矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的縱面投影 α' 按矢量單位与 $|\boldsymbol{\alpha}|$ 之比来划分，我們就得到所求的單位矢量 $\mathbf{u}$ 的縱面投影，然后求出它的横面投影。

第四节 矢量的分解

假如三个矢量不共面（некомпланарны），則任何的第四个矢

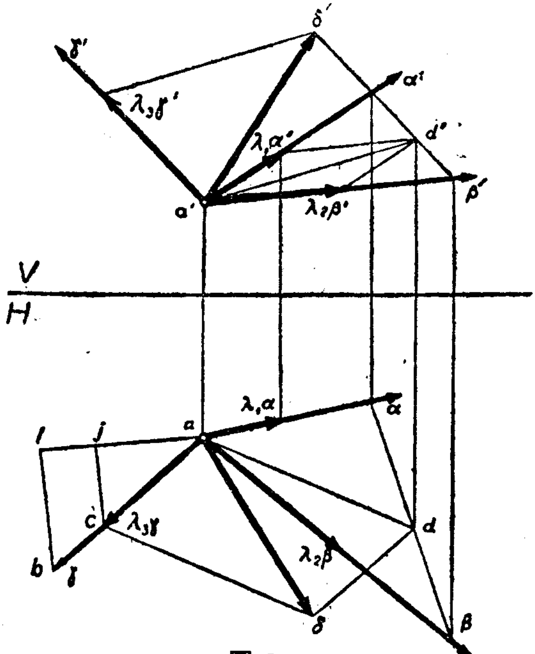

圖 8

量，可按該三个矢量的方向分解。

在圖 8 中所給出的三个矢量α、β和γ，滿足于不共面的条件，亦即不同在一个平面之上，而且相交于一个公共始点 A_9第四个已知矢量 δ 可以沿預先給出的三个矢量的方向分解，亦即可將δ 写成:

$$\delta=\lambda_1\alpha+\lambda_2\beta+\lambda_3\gamma。$$

將矢量 δ 移到預先給出的三个矢量的公共始点上。从矢量δ的終点引一直綫，平行于矢量γ。找出所作輔助綫与矢量 α 和β 所在平面的交点 D。从点 D 引直綫平行于矢量 α 并与矢量 β相交；这个交点就是矢量 δ 在矢量 β方向上的分量 $\lambda_2\beta$ 的終点。同样作出矢量 δ 在矢量 α 方向上的分量 $\lambda_1\alpha$。联結点 D 与四个矢量的公共始点，并从矢量 δ 的終点引直綫平行于 AD，使与矢量 γ 相交；就得到矢量 δ 在矢量γ 方向上的分量。

我們可根据兩个直綫綫段投影之比等于該二直綫綫段实長之比来确定未知的比例系数 λ_1、λ_2 和 λ_3。

在圖 8 中，介紹了系数 λ_3 的圖解法。从点 a 引一任意直綫，在綫上截取一單位綫段 ai，將这綫段的終点与矢量 γ 的横面投影 γ 的終点联起来。从矢量 $\lambda_3\gamma$ 的横面投影 $\lambda_3\gamma$ 的終点引直綫 cj 平行于 bi，并使与 ai 相交。

作一比例尺，从綫段 ai 为 1 單位，用以量度綫段 aj，就得到系数 λ_3 之值。类似地也可以确定系数 λ_1 和 λ_2。

用类似于上述的沿已知不共面的三个矢量分解一矢量的方法，也可以將一矢量分解为兩个分量，其中一个具有已知的方向，而另一个則落在不平行于第一个分量的方向的已知平面上。

第五节　兩个矢量的数性积

兩个矢量的数性积（скалярное произведение）等于兩者之値的相乘积再乘以兩矢量作用綫夾角的余弦。換句話說，兩个矢量的数性积，等于其中一个矢量的値与另一矢量在第一个矢量方向上的投影之相乘积。

数性积的因次与矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的因次的相乘积相等。

为要用直綫綫段来表示数性积之値，必須引入数性积常数 k，并写上矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 之値 $|\boldsymbol{\alpha}|$ 或矢量 $\boldsymbol{\beta}$ 之値 $|\boldsymbol{\beta}|$ 的因次。

那末，可把数性积写成：

$$\alpha\cdot\beta=|\alpha|\beta_\alpha=k\eta,$$

其中 η——假数性积之値，而 β_α——矢量 $\boldsymbol{\beta}$ 在矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向上投影的数値。

在圖 9 中，給出兩个引自公共始点 A 的矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的正投影和比例尺。

作一新縱面 V_1 使平行于矢量 $\boldsymbol{\alpha}$。矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的新縱面投影 α_1' 將与該矢量之値相等。从矢量 $\boldsymbol{\beta}$ 的新縱面投影 β_1' 的終点 b_1' 引綫 $b_1'c_1'$ 垂直于矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的新縱面投影 α_1'。可把綫段 $b_1'c_1'$ 看成是在空間从矢量 $\boldsymbol{\beta}$ 的終点 B 引向矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向的垂綫的新縱面投影，因为矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 平行于新縱面 V_1。

綫段 $a_1'c_1'$ 是矢量 $\boldsymbol{\beta}$ 在矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向上的投影的新縱面投影，而

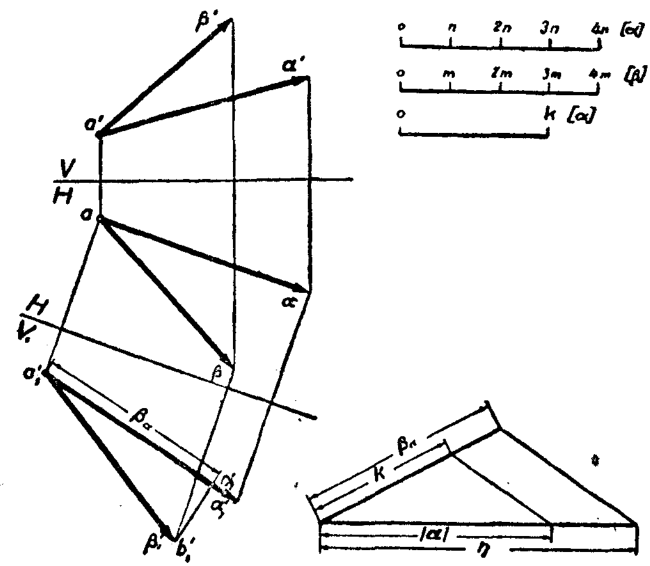

圖 9

且等于它的絕对值。

因而，$a_1' = |\alpha|$ 和 $a_1'c_1' = \beta_\alpha$。

根据圖上所求得的 $|\alpha|$、β_α 和所假定的系数值 k，就可以用簡易的相似法求出假数性积的数值 η。按几何学的說法，就是作出一个矩形（它的一个边長等于 k），使与另一个以 $|\alpha|$ 和 β_α 为边的矩形等值。

第六节　两个矢量的矢量积

两个矢量 α 和 β 的矢量积（векторное произведение）乃是垂直于矢量 α 和 β 所在平面的矢量 M；三个矢量 α、β、M 組成右手体

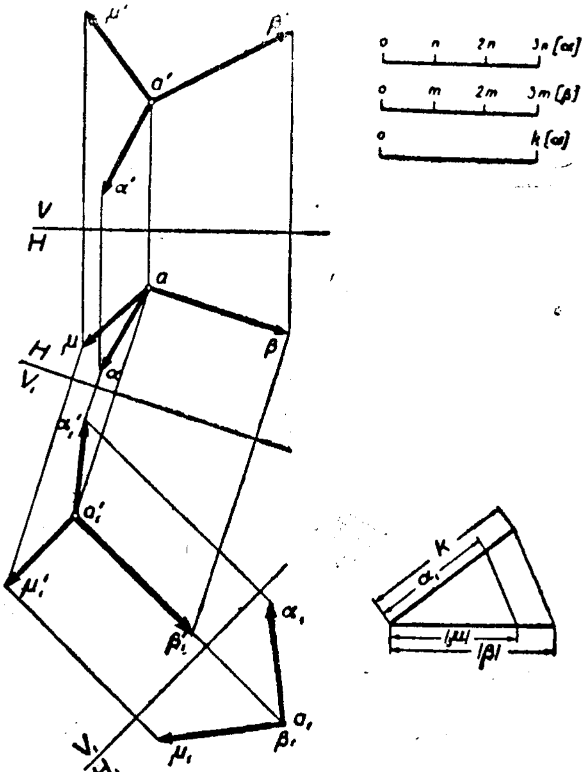

圖 10

系。矢量 M 之值等于矢量 α 和β 之值的相乘积再乘以这兩个矢量的方向所夾的角的正弦。換句話說，矢量 M 之值等于其中一个矢量的数值与另一个矢量在垂直于第一个矢量的平面上的投影的相乘积。

兩个矢量的矢量积的因次与矢量α和β的因次的相乘积相等。为要以直綫綫段去表示矢量积的大小，必須引入矢量积常数 k，并記上矢量 α 之值 $|\alpha|$ 或矢量 β 之值 $|\beta|$ 的因次。

矢量积可写成：

$$\mathbf{M}=\alpha\times\beta=k\mu,\quad \alpha_q|\beta|=k|\mu|,$$

其中 μ——假矢量积，α_q——矢量 α 在垂直于矢量β的平面上的投影。

在圖 10 中，給出引自公共始点 A 的兩个矢量 α 和β 的正投影和比例尺。

首先作新縱面 V_1，平行于矢量 β，然后再作假想新横面 H_1，垂直于矢量β。作出矢量 α 和 β在新投影面体系 H_1V_1 上的投影。

矢量β 在平面 V_1 上的投影 β_1' 表示矢量 β 之值 $|\beta|$。矢量α 在平面 H_1 上的投影 α_1 就是矢量 α在垂直于矢量β 的平面上的投影 α_q 之值。

假矢量积的数值可以由求出数值 k、$|\beta|$、α_1 的第四个比例数值而得，因为 $\alpha_1|\beta|=k|\mu|$。按几何学的說法，就是作出一个矩形(它的一个边長等于 k)，使与以 α_1 和 $|\beta|$ 为边的矩形等值。

矢量 μ 必然垂直于矢量 α 和β 所在的平面，所以它將平行于平面 H_1，并且在平面 H_1 上表現其眞值。根据上面的結論和既知矢量 μ 之值 $|\mu|$，先作出矢量 μ在投影面体系 H_1V_1 上的投影 μ_1 和 μ_1'，然后作出在投影面体系 HV 上的投影。

第七节　重矢量积

三个矢量 α、β、γ 的重矢量积 (двойное векторное произведение)ξ 就是矢量 $k_1\mu=\alpha\times\beta$ 与矢量 γ 的矢量积：

$$\xi=(\alpha\times\beta)\times\gamma$$

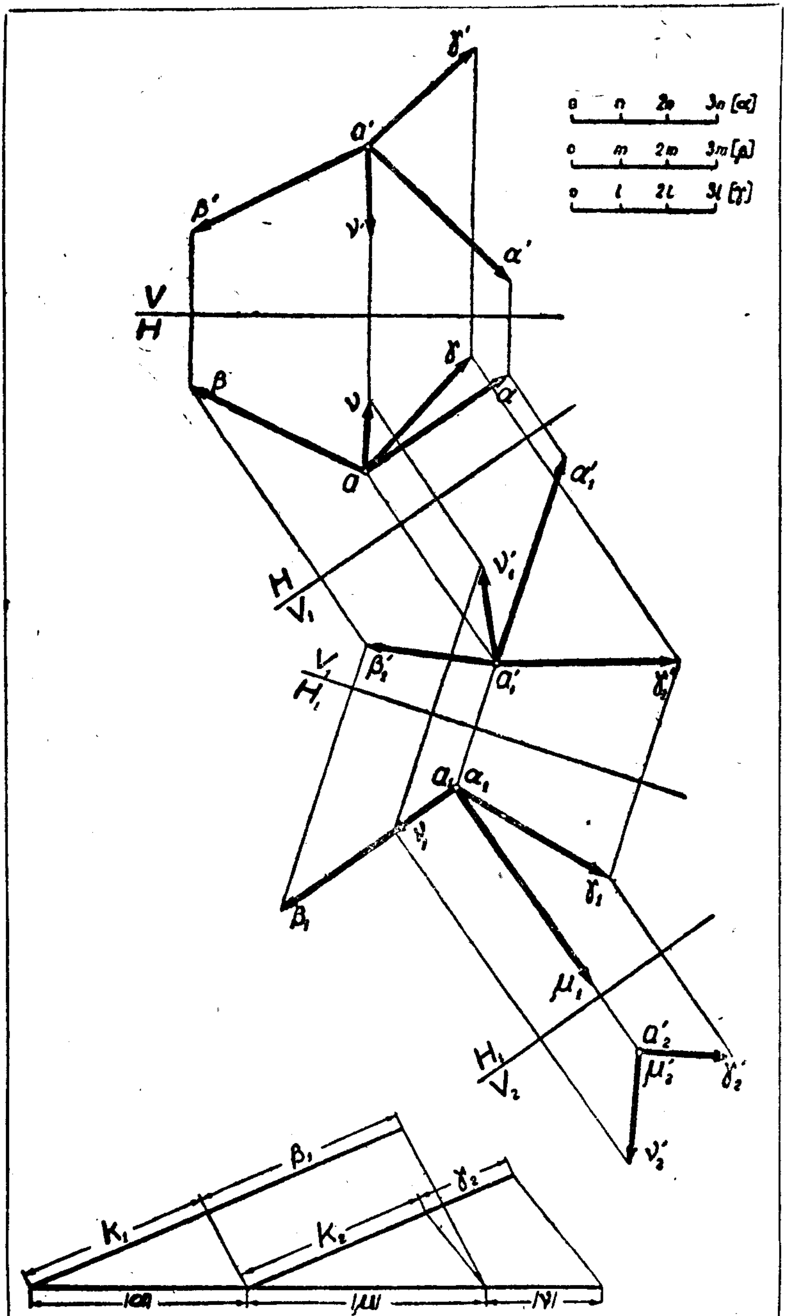

圖 11