稳定性的数学理论及应用

WDXDSXLLJYY

第二版

廖晓昕 著

华中师范大学出版社
HZSFDXCBS

(鄂)新登字11号

图书在版编目(CIP)数据
稳定性的数学理论及应用/廖晓昕著.—2版.
-武汉:华中师范大学出版社,2001.2
ISBN 7-5622-1118-3/O·132

Ⅰ.稳…
Ⅱ.廖…
Ⅲ.稳定性(数学)
Ⅳ.O175.10

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第04458号

稳定性的数学理论及应用
第二版
©廖晓昕 著

华中师范大学出版社出版发行
(武昌桂子山 电话:027-87876240 邮编430079)
新华书店湖北发行所经销 湖北省新华印刷厂印刷

责任编辑:杨发明 封面设计:罗明波
责任校对:张 钟 督 印:朱 虹

开本:850×1168 1/32 印张:22.375 字数:590千字
版次:2001年2月第2版 2001年2月第1次印刷
印数:1—1 500 定价:40.00元

Abstract

Liao Xiaoxin

The book, as its title indicates, concerns the mathematical theory of stability of systems and details its application in science and technology. It is divided into twelve chapters. The first chapter is an introduction to the concept of stability of differential equations and the tools used throughout the book. Chapters 2 and 3 review the basic theories of stability of linear systems as well as Lyapunov's classic theory of stability and his direct method. In Chapter 4, the author sums up scholars' generalizations and extensions of Lyapunov's theory and method. In Chapter 5, the author introduces his new method of analyzing systems' stability. Chapters 6 and 7 concern the global stability for nonlinear systems with separated variables and the partial stability of general nonlinear systems, while Chapter 8 analyzes absolute stability of nonlinear control systems as well as the famous Lurie problem. Chapters 9 and 10 are a discussion of stabilty of large-scale systems and ecosystems, while Chapters 11 and 12, study of robust stability of interval dynamic systems and the artificial neural networks of the Hopfield's type.

The book treats the basic concepts and techniques of systems' stability in a progressively arranged way. It is mainly intended to be a textbook for graduate students of mathematics and some other majors. In the book, readers will find it an enlightening experience to chew over many of the new ideas and generalizations the anthor offers as his research results. Therefore it can also be used as a reference work for teachers and researchers in the fields of mathematics, mechanics, cybernetics, automation and radio.

第一版序言

运动稳定性问题的重要性是众所周知的。任何一个实际系统（如控制系统、电力系统、生态系统、化工系统等等），总是在各种偶然的或持续的干扰下运动或工作的。承受这种干扰之后，系统能否稳妥地保持预定的运动或工作状况，这是首先要考虑的性能，这就是稳定性。何况，严格地说，描述系统的数学模型，大部分都是近似的，这或者由于测量误差和计算的舍入误差所致，或者为使问题理想化，不得不忽略某些次要因素。近似的数学模型能否如实地反映客观实际的动态，在某种意义上说，也是一个稳定性的问题。

上世纪俄国数学力学家李雅普诺夫院士首创的运动稳定性的一般理论，越来越吸引着全世界数学家的注意和工程师们的广泛赞赏，特别是力学、控制、信息、系统等方面的学者对李雅普诺夫稳定性理论和方法更感兴趣。稳定性理论和方法不断在发展，尤其是本世纪 30 年代以来，由于科学技术的日新月异，特别是自动控制、空间技术、大系统理论、生物数学等等的出现，使稳定性理论发展更快，新的课题、方法不断涌现。常微分方程中的李雅普诺夫稳定性理论业已推广到了用差分方程、微分差分方程、微分积分方程、泛函微分方程、随机微分方程、偏微分方程、微分包含等数学模型描述的各种动力系统。国际上不仅是一些重要的纯粹数学学术刊物，而且许多权威性的力学、控制论、网络系统、生物数学、信息科学、计算机科学方面的学术刊物及国际会议论文集也常常刊载稳定性方面的优秀论文。

我是从 1978 年科学的春天到来以后，才开始系统地学习稳定

性理论的。非常感谢很多前辈专家和同行朋友，给予我长期的教益与鼓励；也非常感谢华中师范大学领导，让我有幸在这个方向稳定地、持续地工作近十年，先后担任过两届高等学校微分方程教师进修班稳定性理论课的讲授，并招收研究生。从而有机会了解这个领域的动态和进展，接触前沿信息，和他们一起开展一些研究工作。

本书是根据我为研究生上课的部分讲稿及我们自己的一些研究工作而写成的。全书共分为12章。第1～4章，通过实例和几何图形详尽地介绍了各种稳定性的定义及蕴涵关系，利用 K 类函数、Dini导数等近代工具，介绍了Lyapunov稳定性的基本定理、逆定理及各种推广；以Cauchy矩阵为纲，介绍了线性方程组稳定性的基本理论。这四章是基本内容。可作为数学系本科生选修课教材及常微分方程专业的研究生前阶段教材。

定常线性系统的稳定性，理论上可化为代数中的矩阵问题而彻底解决，但计算冗繁。对于实用的简便判据，力学、工程及控制论工作者更感兴趣。因此，在第5章，我们详尽地介绍了矩阵、线性控制系统稳定性的代数、几何判据。

第6～7章分别介绍了稳定性的迭代分析及分离变量的非线性系统的全局稳定性，绝大部分是介绍我们自己的工作。

第8章介绍了部分变元的稳定性的基本理论，绝大部分取材于苏联近期的工作。

第9章讨论了Lurie直接、间接系统绝对稳定性，除了经典的Popov方法、二次型加积分项的V函数外，还叙述了我们关于绝对稳定的充要条件及各种新的充分条件。

第10～11章先后阐述了大系统、生态系统的稳定性及关联稳定性的基本理论和方法。

最后一章介绍了目前国际上刚刚开始但讨论很热烈的区间动力系统的稳定性。

本书的出版，得到了华中师范大学校领导、出版社许多同志的

鼓励和帮助。卞松元同志为本书绘图;研究生肖会敏、吴卫华、张维、黄志刚、王鹏国、肖冬梅、刘碧玉、阮仕贵、肖殿荒等同学在阅读本书的手稿时,分别提出宝贵建议,并在我出国期间代为做了校对工作,在此一并致意。

限于作者知识水平和能力,加之时间仓促,对本书中必然存在的缺点和错误,衷心地希望和欢迎读者批评指正。

廖晓昕

1988年3月于武昌桂子山

第二版序言

本书第一版于1988年出版。衷心感谢许多高校及科研院所、工程技术部门的同志采用此书作教材或参考书。他们在使用中提出了不少宝贵意见,并希望出修订本。1996年至今,我以此书的基本内容为主,为华中理工大学自动控制系、电力系等系的博士、硕士研究生们讲授“系统稳定性理论”,同学们都希望此书重版。10年过去了,重温此书第一版,深感无论从内容到排版质量都有更新的必要。蒙华中师范大学出版社自始至终、满腔热情地支持此书的再版。

第二版与第一版内容不同之处如下:

一、增加了神经网络稳定性一章。近10年来,人工神经网络的理论和应用成了全球热门话题,其中稳定性扮演了重要的角色。增加这一章非常必要。

二、改写了非线性控制系统的绝对稳定性一章,重写了区间动力系统的Robust稳定性一章。这两章都删去了一些次要内容,或冗繁的证法,增加了新内容。

三、增加了M矩阵、Hurwitz判据、Sylvester准则的统一简化形式;线性系统部分变元稳定性、有界性的充要条件;大系统稳定性的分块估值比较法;大系统与孤立子系统的渐近等价性;一般生态与神经网络的稳定性、耗散性、有界性,这些都是作者近期发表的内容。

四、将第一版中的四、五两章合为一章,且调到第二章,以期循序渐进,从易到难。删去了第一版第五章中较多的次要内容。

五、修正了第一版中的一些错误,给出了全书的数学符号说

明表。

我衷心地感谢国家自然科学基金(批准号 69874016,69674008,19371032,1890422,84 科基 115 号),高等学校博士学科点专项科研基金(批准号 97088722),国家重点基础研究专项经费资助项目(G1998020319)和国家“95”攀登项目(PD9521907)的子课题及香港王宽诚教育基金会的资助。

限于作者的知识水平和能力,对本书仍然存在的缺点和错误,如蒙读者不吝批评指正,将不胜感激。

廖晓昕

1998 年 3 月于华中理工大学

控制科学与工程系

数学符号说明

$:=$　为定义等号，与 $\triangleq$，$\stackrel{\text{def}}{=\!=}$ 意义相同.

$\|x\|$　向量 x 的范数.

$\Rightarrow$　蕴涵.

$\forall$　逻辑量词，任意一个.

$\exists$　逻辑量词，存在一个.

$\subset$　包含于.

$\in$　属于.

$\mathbf{R}^n$　n 维实空间.

$[a]$　a 的最大整数部分.

(a)　a 的小数部分.

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置.

$\otimes$　Kronecker 积.

$\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$　$\boldsymbol{A}$ 的拉直运算.

$\cup$　集合之并.

$\Delta\boldsymbol{A}$　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的改变量.

$\overline{\lim}$　上极限.

$\underline{\lim}$　下极限.

$\rho(\boldsymbol{A})$　方阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径.

$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$　$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 之积.

$\det\boldsymbol{A}$　方阵 $\boldsymbol{A}$ 对应的行列式.

$\left.\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}$　表示函数 V 沿某方程(1)的解的导数.

$\prod_M$　表示集合 M 在某空间的投影.

max　最大值.

min　最小值.

sup　上确界.

inf　下确界.

$N[\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}]$　区间矩阵.

$C[\mathbf{R}^n,\mathbf{R}]$　定义域为 $\mathbf{R}^n$，值域为 $\mathbf{R}$ 的连续函数全体.

$C^1[\mathbf{R}^n,\mathbf{R}]$　定义域为 $\mathbf{R}^n$，值域为 $\mathbf{R}$ 的连续可微函数全体.

$\boldsymbol{A}(a_{ij})_{n\times m}$　元素为 a_{ij} 的 n 行 m 列实矩阵.

$\mathrm{Re}\lambda(\boldsymbol{A})$　方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 的实部.

$\mathrm{Im}\lambda(\boldsymbol{A})$　方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 的虚部.

$\Delta\arg f_n(\lambda)$　$f_n(\lambda)$ 的幅角的变化.

$\mathbf{grad}\,V$　函数 V 的梯度.

$I[\underline{a},\overline{a}]$　区间多项式.

$I:=[0,+\infty)$　非负实数全体.

$\mathbf{R}_+ := (0, +\infty)$ 正实数全体.

$\boldsymbol{A}^{-1}(a_{ij})_{n\times n}$ 矩阵 $\boldsymbol{A}(a_{ij})_{n\times n}$的逆矩阵.

$\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 过初始值 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ 的解.

$\mathrm{D}^+, \mathrm{D}_+, \mathrm{D}^-, \mathrm{D}_-$ 分别为 Dini 右上、右下、左上、左下导数.

$\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) \xrightarrow{\text{关于}t_0} 0$ 当 $t \to +\infty$, $\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$关于 t_0 一致地趋于 0.

$\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) \xrightarrow{\text{关于}t_0, \boldsymbol{x}_0} 0$ 当 $t \to +\infty$, $\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$关于 $t_0, \boldsymbol{x}_0$ 同时一致地趋于 0.

$G_H := \{\boldsymbol{x} \mid \|\boldsymbol{x}\| < H\}$ 满足 $\|\boldsymbol{x}\| < H$ 的 $\boldsymbol{x}$ 的集合.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ \sigma & i \neq j \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

$$\mathrm{col}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{A} > 0, \boldsymbol{A} < 0, \boldsymbol{A} \geqslant 0, \boldsymbol{A} \leqslant 0$ 分别表示实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定、负定、半正定、半负定.

$\boldsymbol{F}_i = \mathrm{col}(f_1^{(i)}, \cdots, f_{n_i}^{(i)})$ 表示第 i 组向量的第 1 至第 n_i 个分量组成的向量.

$\mathrm{diag}(p_1, \cdots, p_n)$ 表示对角线为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$, 非对角线元素为零的 $n \times n$ 矩阵.

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{n\times n} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial {x_1}^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial_2 V}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_n x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_n^2}. \end{pmatrix}.$$

目　　录

第一章 稳定性概念及辅助工具

§1.1 引 言

稳定性概念,最早源于力学.一个固体或一个力学系统具有某一平衡状态,在有微小的干扰力作用下,这种平衡状态能否保持,这就是稳定性的雏型.在静力学方面,早在十七世纪出现过托里斯利(Torricelli)原理,即若物体仅受重力作用,则当其重心位置最低时,其平衡是稳定的,当重心位置最高时,其平衡是不稳定的.但当时在动力学方面,对应于稳定运动的严格的解的选择原理却未建立.

虽然,稳定性概念早已被拉普拉斯(Laplace)、拉格朗日(Lagrange)、马克斯威尔(Maxwell)、汤姆逊和德特(Thomson and Tait)、庞加莱(Poincare)等采用过,但都没有给予稳定性以精确的数学定义.达郎倍尔(D'Alambert)、拉格朗日、马克斯威尔、魏施涅格特斯基(Вышнеградский)、茹可夫斯基(Жуковский)及斯图多(Ctodola)等都曾应用第一次近似的线性方程来代替非线性方程研究稳定性,但未能从数学上证明这种代替的合理性.因此,在这之前,可以说稳定性的一般理论却迟迟没有建立起来.

李雅普诺夫(Lyapunov)院士是第一位给出运动稳定性以精确的数学定义的人,他的 1892 年的博士论文奠定了运动稳定性的一般理论.1992 年在美国佛罗里达召开的首届非线性世界大会有一个专题就是纪念李雅普诺夫的这篇博士论文发表 100 周年,足见其影响的深远和长久.

本章我们先给出李雅普诺夫意义下平衡态的各种稳定性、吸引性的定义、几何解释，然后给出几个典型的实例来说明这些稳定性、吸引性之间的蕴涵关系，以便读者加深对这些概念的理解.

“工欲善其事，必先利其器.”我们把研究稳定性的经典的、现代的工具如 Lyapunov 函数、K 类函数、Dini 导数、M 矩阵等均放在第一章集中介绍，这些工具贯穿全书的始终.

稳定性理论所研究的内容，简单通俗地说就是对于用一般或特殊的微分方程所描述的动力系统建立判别方法，以判明哪些实际运动系统受干扰与不受干扰的运动状态相差甚微；哪些则相反.特别为设计稳定的动力系统，避免不稳定的事故发生，提供一整套数学理论和方法，这就是稳定性理论这门学科的意义和内容.

§1.2 几种稳定性、吸引性的定义

考虑用微分方程组描述的一般非自治系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{y}). \tag{1.2-1}$$

记 $I:=[0,+\infty)$，$\Omega\subset\mathbf{R}^n$，$\Omega$ 为含原点的 $\mathbf{R}^n$ 空间的 n 维开子集.这里，$\boldsymbol{g}$ 在 $I\times\Omega$ 中连续，简记为 $\boldsymbol{g}\in C[I\times\Omega,\mathbf{R}^n]$，$I\times\Omega$，$\mathbf{R}^n$ 分别为 $\boldsymbol{g}$ 的定义域和值域.设方程(1.2-1)Cauchy 问题的解唯一，记

$$\boldsymbol{y}:=\mathrm{col}(y_1,y_2,\cdots,y_n),$$
$$\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{y}):=\mathrm{col}(g_1(t,\boldsymbol{y}),\cdots,g_n(t,\boldsymbol{y})).$$

设 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(t)$是(1.2-1)式的一个未受扰动的解，$\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{\varphi}(t)$是(1.2-1)式的任意一个已被扰动的解，作变换

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\varphi}(t),$$

则(1.2-1)式化为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\varphi}(t))-\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{\varphi}(t)):=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}), \tag{1.2-2}$$