

研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

# 非线性振动

*Nonlinear Vibrations*

陈予恕

高等教育出版社

425

U322  
C49a1

**研究生教学用书**

教育部研究生工作办公室推荐

# 非线性振动

Nonlinear Vibrations

陈予恕



A1032110

高等教育出版社

## 内容提要

本书为 2000—2001 年度教育部研究生工作办公室推荐的研究生教学用书。

本书全面系统地介绍了分析单自由度和多自由度非线性振动系统定常解(周期解)和非定常解的各种研究方法、各种非线性因素对系统动态行为产生的影响和其典型的非线性现象,并简述了近 20 年来新发展的周期解分岔理论的主要成果,以及以上理论在工程中应用的典型实例。本书的特色是理论联系工程实际,只用数学高等分析的方法(避免用抽象数学方法)揭示复杂动力学现象的本质,并着重于物理概念的介绍。全书除绪论外,共分十一章,包括对非线性振动特点和研究方法的叙述;单自由度和多自由度系统的相平面法、渐近法、平均法、多尺度法、小参数法、分岔理论的基本概念、非线性振动系统周期解分岔理论方法,以及计算机的应用和实验研究问题等。

本书可作为理工科高等学校研究生非线性振动课程的教材,也可供机械、航空航天、自动控制、交通车辆、电子学、化工、复杂结构动力学的高年级学生,以及从事与时间有关的动力学过程研究的工程技术人员和研究人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

非线性振动/陈予恕. —北京:高等教育出版社,

2002

ISBN 7-04-011594-8

I. 非... II. 陈... III. 非线性振动 IV. 0322

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 084367 号

---

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
传 真	010-64014048		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
经 销	新华书店北京发行所		
排 版	高等教育出版社照排中心		
印 刷	中国青年出版社印刷厂		
开 本	787×960 1/16	版 次	2002 年 12 月第 1 版
印 张	25	印 次	2002 年 12 月第 1 次印刷
字 数	420 000	定 价	34.20 元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

**版权所有 侵权必究**

# 前 言

在各种不同的非线性动力学系统(物理的、力学的、化学的、生态学的、工程技术的、经济学的)中,除周期和概周期振动之外,无规律振动运动的发现是当代科学的重大成就之一。从1963年到现在,在许多杰出科学家研究成果的基础上已经形成了一门新的学科——混沌动力学(或非线性科学)。非线性振动力学是非线性科学的重要组成部分之一,随着非线性科学的发展,由研究其周期解和概周期解的经典理论,发展到研究周期解的分岔理论和混沌理论。

但是在近代物理学和工程科学中,寻求非线性系统周期解、概周期解,并保证其稳定运行的问题仍然大量地存在,有些工程动态失稳问题仍然十分突出。另外,非线性系统无规律振动往往是从有规律振动发展演变而来,了解它们之间相互转化的规律和联系,乃是非线性动力学设计和智能控制需要了解的重要内容之一。因此,无论是非线性振动系统周期解的理论,或是求周期解的分岔的理论都是迫切需要的。

本书是在我们1983年出版《非线性振动》(天津科学技术出版社)和1993年出版《非线性振动系统的分岔和混沌理论》(高等教育出版社)的基础上,总结了多年教学实践经验,为满足研究生的教学需要而写的。在叙述理论方法时,我们根据理论联系工程实际的思路,从工程实际的应用问题出发,应用理工科大学的高等数学知识进行分析,深入地介绍非线性振动周期解和周期解分岔的物理概念,以及理论分析结果在解决工程问题中的应用,因此,本书也可作为从事非线性动力学问题研究的高年级大学生、研究工作者和工程技术人员的参考书。

本书除绪论外共分十一章。

在绪论中简单介绍了非线性振动研究的任务和发展概况,非线性系统的一般特点和研究步骤,并介绍了机械系统中常见的各种非线性力函数。

第一章到第八章分别介绍了渐近法、平均法、多尺度法、小参数法等经典的非线性振动理论方法,以及从理论上阐明了非线性弹性力、非线性阻尼力、参数激励力、自激振动系统的一些较线性系统来说新的物理现象,并对某些单自由度和多自由度的工程非线性振动问题作了详细分析。

第九章介绍了分岔理论基础:动力系统的概念,分岔定义和平面向量

场分岔的分类,隐函数定理,稳定流形定理,中心流形定理,正规形理论和霍普分岔定理。

第十章讨论了非线性振动系统周期解的分岔理论。其中介绍了李雅普诺夫—施密特方法,奇异性理论,和非线性参激系统主参数共振分岔理论方法及其工程应用。

第十一章介绍了计算机的应用和实验研究,其中讨论了非线性振动系统周期解和周期分岔解的数值计算方法,符号积分方法,模拟计算机的应用,以及实验研究问题。

在编写过程中,梁以德(Andrew Y. T. Leung)教授和我们研究组的同志们给予了很多帮助,作者对他们表示感谢。同时对陆启韶教授等各位专家在审稿过程中,所提的十分有益的意见表示衷心的感谢。

本书的主要研究工作得到了国家自然科学基金重大项目 No. 19990510 和国家重点基础研究专项经费项目 No. G19980203 的资助,作者谨表示衷心的感谢。限于水平,书中的错误和不当之处恳请批评指正。

陈予恕

2001年12月

## 主要符号表

$x, y, z$	振动位移
$x', y', z'(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$	振动速度
$x'', y'', z''(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$	振动加速
$a$	振幅
$\omega, \nu$	振动角频率
$\varphi, \psi$	相位
$T$	周期运动的周期
$T_n$	第 $n$ 阶尺度的时间变量
$k$	线性刚度系数
$\varepsilon, \mu$	小参数
$\mathbf{R}$	实数集
$\mathbf{C}$	复数集
$\mathbf{Z}$	整数集
$\mathbf{R}^n$	$n$ 维线性空间
$\forall$	对所有给定
$\exists$	存在
$a \in A$	集 $A$ 的元素 $a$
$A \subset B$	集 $B$ 的子集 $A$
$A \oplus B$	集合 $A$ 和 $B$ 的直和
$A$	在零点计算的雅可比矩阵
$f: A \rightarrow B$	$A$ 到 $B$ 内的映射 $f$
$\dim V$	空间 $V$ 的维数
$\text{codim } V_1$	子空间 $V_1$ 的余维数
$E^c, E^s, E^u$	中心子空间, 稳定子空间, 不稳定子空间
$W^c(x_0), W^s(x_0), W^u(x_0)$	平衡点的中心流形, 稳定流形, 不稳定流形
$\mathbf{g}, \mathbf{f}$	芽
$\mathcal{E}_{x,\lambda}, \mathbf{E}_{x,\lambda}$	芽空间
$\mathbf{RT}(\mathbf{f})$	$\mathbf{f}$ 的限制切空间
$\mathbf{T}(\mathbf{g})$	$\mathbf{g}$ 的切空间
$x  \rightarrow f(x)$	$x$ 点映到 $f(x)$ 点

# 目 录

主要符号表 .....	1
绪论 .....	1
§ 0.1 非线性振动研究及其任务 .....	1
§ 0.2 机械系统中常见的几种非线性力 .....	2
§ 0.3 非线性振动的特点 .....	11
§ 0.4 研究非线性振动问题的方法 .....	12
§ 0.5 实际工程振动系统的建模简化 .....	15
§ 0.6 非线性振动应用问题的研究步骤 .....	16
<b>第一章 非线性系统的自由振动</b> .....	<b>17</b>
§ 1.1 渐近法——三级数法 .....	17
§ 1.2 保守系统 .....	24
§ 1.3 非线性阻尼的影响 .....	30
§ 1.4 平均法 .....	35
§ 1.5 自激振动系统 .....	40
§ 1.6 定常解 .....	44
§ 1.7 等效线性化 .....	47
§ 1.8 谐波平衡法 .....	53
习题 .....	57
<b>第二章 相平面法</b> .....	<b>62</b>
§ 2.1 相平面 相迹 .....	62
§ 2.2 奇点分析 .....	64
§ 2.3 保守系统相迹的性质 .....	70
§ 2.4 非保守系统相迹的性质 .....	81
§ 2.5 自激振动系统相迹的性质 .....	90
习题 .....	95
<b>第三章 一个自由度非线性系统的受迫振动</b> .....	<b>99</b>
§ 3.1 非共振情况的平均法 .....	99
§ 3.2 共振情况的平均法 .....	104
§ 3.3 具有分段线性的非线性系统的受迫振动 分段弹簧间隙对 系统的影响 .....	109
§ 3.4 线性非理想系统 .....	116
习题 .....	125

<b>第四章 多自由度非线性系统的受迫振动</b> .....	130
§ 4.1 多自由度系统的受迫振动 .....	130
§ 4.2 两自由度分段线性系统 .....	144
§ 4.3 多自由度非线性系统实例 .....	159
§ 4.4 具有任意个准循环坐标非线性系统的概周期解 .....	181
习题 .....	191
<b>第五章 带有慢变参数的非线性系统</b> .....	196
§ 5.1 一个自由度系统非定常解的渐近法 .....	196
§ 5.2 求非定常解的平均法 .....	204
§ 5.3 具有任意个准循环坐标的多自由度系统的非定常解 .....	207
§ 5.4 近似方程的数值积分法 .....	215
习题 .....	217
<b>第六章 参数激励系统</b> .....	218
§ 6.1 工程实例 .....	218
§ 6.2 马休方程稳定理论 .....	222
§ 6.3 马休方程的稳定边界 .....	225
§ 6.4 平均法求解马休系统 .....	229
§ 6.5 非线性马休方程 .....	231
习题 .....	234
<b>第七章 多尺度法</b> .....	237
§ 7.1 保守系统 .....	238
§ 7.2 非保守系统 .....	239
§ 7.3 受迫振动 .....	241
§ 7.4 非定常振动 .....	245
§ 7.5 参激系统 .....	247
§ 7.6 多自由度受迫振动系统 .....	250
习题 .....	254
<b>第八章 非线性振动系统的摄动法——小参数法</b> .....	259
§ 8.1 摄动法的思想 小参数 .....	259
§ 8.2 非自治系统的非共振情况 .....	260
§ 8.3 非自治系统的共振情况 .....	263
§ 8.4 自治系统 .....	267
习题 .....	270
<b>第九章 分岔理论基础</b> .....	272
§ 9.1 动力系统的概念 .....	273
§ 9.2 分岔的基本概念和平面向量场的分类 .....	276
§ 9.3 隐函数定理 .....	281
§ 9.4 稳定流形定理 .....	284



§ 9.5 中心流形定理 .....	288
§ 9.6 向量场正规形 .....	297
§ 9.7 霍普夫分岔定理 .....	304
习题 .....	310
<b>第十章 非线性振动系统的分岔 .....</b>	<b>312</b>
§ 10.1 李雅普诺夫—施密特方法 .....	312
§ 10.2 奇异性理论方法简介 .....	316
§ 10.3 非线性参数激励振动系统的 $1/2$ 亚谐分岔解法—CL 方法 .....	328
§ 10.4 混沌简介 .....	339
习题 .....	346
<b>第十一章 计算机的应用和模型实验 .....</b>	<b>347</b>
§ 11.1 数值解法 .....	347
§ 11.2 计算机代数语言解法 .....	350
§ 11.3 模拟计算机的应用 .....	359
§ 11.4 非线性振动的实验研究问题 .....	360
<b>参考文献 .....</b>	<b>374</b>
<b>索引 .....</b>	<b>380</b>
<b>外国人名译名对照表 .....</b>	<b>384</b>
<b>英文内容提要 .....</b>	<b>385</b>
<b>英文目录 .....</b>	<b>388</b>
<b>作者简介 .....</b>	<b>391</b>

# 绪 论

## § 0.1 非线性振动研究及其任务

振动是物理学、技术科学中广泛存在的物理现象。如建筑物和机器的振动,无线电技术和光学中的电磁振动,控制系统和跟踪系统中的自激振动,声波振动,同步加速器中的束流振动和其结构共振,火箭发动机燃烧时所引起的振动,化学反应中的复杂振动等等。这样一些表面上看起来极不相同的现象,都可以通过振动方程统一到振动理论中来。振动是机械运动的一种形式,在技术领域中,经常出现的振动是周期振动。

因振动是机械运动的一种形式,所以其规律  $x(t)$  决定于作用在系统上各种力的性质,即为下列方程所决定

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (\text{a})$$

其中  $m$  为振动质量,  $x$  为  $m$  的振动位移,  $c\dot{x}$  为阻尼力,  $kx$  为弹性恢复力,  $f(t)$  为周期干扰力。因弹性力和阻尼力都是线性函数,所以方程(a)是二阶线性非齐次微分方程,这样的系统称为线性振动系统。如果弹性力和阻尼力二者之一或二者都是非线性函数  $f_2(x)$  和  $f_1(\dot{x})$ , 则振动方程成为非线性微分方程

$$m\ddot{x} + f_1(\dot{x}) + f_2(x) = f(t) \quad (\text{b})$$

此时系统称为非线性振动系统。

非线性振动理论的主要任务是,研究各种不同振动系统的周期振动规律(振幅、频率、相位的变化规律,这三个参数称为振动三要素)或求周期解,以及研究周期解的稳定条件,从工程技术角度来说,其任务是研究为减小系统的振动或有效利用振动,使系统具有合理的结构形式和参数。

一般来说,  $n$  个自由度非线性振动系统就有  $n$  个相互耦合的二阶微分方程或在状态空间中有  $2n$  个一阶微分方程。

在非线性振动中,振幅、频率、相位等术语的定义和线性振动中完全相同。

自然界和工程技术中的动力学现象本质上都是非线性的,非线性因素可以来自系统的几何、物理、结构、耗散、运动、耦合等诸方面。为便于建立非线性振动力学模型,特列举机械系统中常见的几种非线性力。

## § 0.2 机械系统中常见的几种非线性力

在对一个振动系统进行研究时,其阻尼力和弹性力有时可线性化,有时则必须考虑其非线性性质(何时需考虑力的非线性特性,决定于所研究问题的性质和所要求的精度),另外在工程实际中也存在着很多不能线性化的系统。

在机械系统中非线性力有非线性势力,非线性阻尼力和所谓混合型非线性力,下面介绍一些产生非线性力的实例,一方面藉以说明非线性振动问题的重要性,同时也供建立振动方程时参考。

### 1. 非线性势力

只和系统的机械位置(只和广义坐标)有关的力称为势力。它有如下几种形式:

(1) 弹性力 由于物体的弹性变形或一定数量气体的体积发生变化而引起的力;

(2) 重力;

(3) 物体的某一部分在液体中时,该物体所受到的排挤力;

(4) 磁场中的磁力。

具有非线性势力的机械振动系统及势力特性曲线示于表 0.1。

若  $F_0$  为弹性力,则  $\frac{dF_0}{dq}$  称为刚度系数。因在非线性系统中该系数和广义坐标  $q$  有关,所以  $\frac{dF_0}{dq}$  称为拟刚度系数。当  $q > 0$  时,如随着  $q$  的增加,刚度系数增大,则称此弹性力的特性为硬特性,反之,如  $q$  增加时,刚度系数减小,则称其特性为软特性。弹性力也可能在  $q$  变化的某个区间有硬特性,而在另一个区间有软特性。

以  $x, y, \psi$  表示广义坐标(系统对平衡位置的偏离),用  $F$  或  $M$  表示广义力,并规定广义力的符号和广义坐标的符号相反。在以上的例子中,只有当系统偏离平衡位置的位移较大时,势力才可能出现非线性变化,而在小位移的情况下可认为系统是线性的。

有时尽管位移很小,也必须考虑势力的非线性特性,这样的例子如表 0.2 所示。

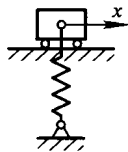
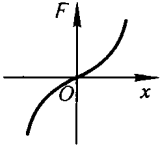
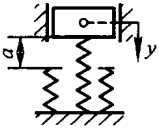
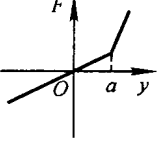
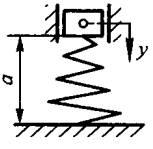
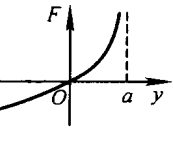
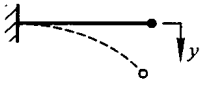
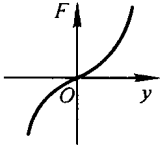
### 2. 非线性阻尼力

当系统振动时,如其中只与机械系统的速度有关的力的功率不恒等于零,则该力称为阻尼力(或简称阻尼)。而陀螺力(与速度有关),因其功

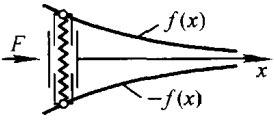
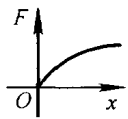
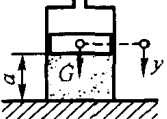
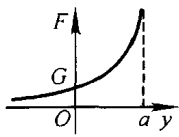

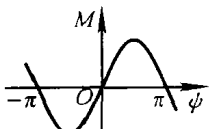

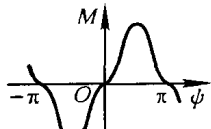

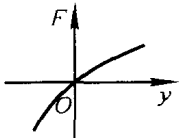
率恒等于零,不是阻尼力。一般情况下,当力和速度的方向相反的时候,则称该力为阻尼。

阻尼包括:有相对运动的零件之间产生的摩擦力,用铆钉、螺栓和压力连接的结构,当受动载荷作用时,在接触面之间产生的结构摩擦力,系统构件材料的内摩擦力,系统在气体或液体中振动而产生的介质阻力(迎面阻尼;机翼旋转阻力矩)等等。


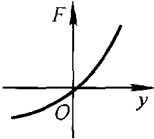

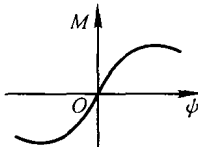
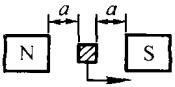
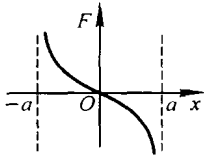
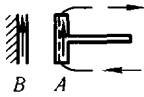
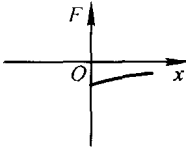
表 0.1

编号	系统类别	力的特性曲线
1	以弹簧压于平面上的重物(I) 	
2	置于分段弹簧上的重物(I) 	
3	置于堆形弹簧上的重物(I) 	
4	柔性弹性梁(I) 	

续表

编号	系统类别	力的特性曲线
5	在收缩管道中的弹性活塞(I) 	 $F = 4c \int_0^x (f')^2 dx$ 其中 $c$ ——线性弹簧的刚度系数
6	置于封闭容器中的 气体上的重物(I) 	
7	具有固定悬挂点的单摆(II) 	 $M = mgl \sin \psi$
8	悬挂轴旋转的单摆(II) 	 $M = mgl \sin \psi - m\Omega^2 l^2 \sin \psi \cos \psi$
9	连通器中的液体(II) 	


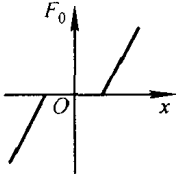

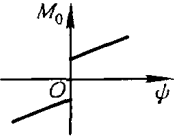
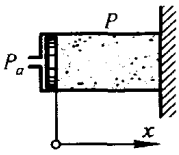
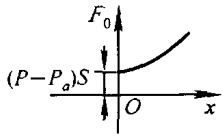
续表

编号	系统类别	力的特性曲线
10	曲面船(浮桥船,浮船) 垂直偏离平衡位置(Ⅲ) 	
11	同上,绕平衡位置转动(Ⅲ) 	
12	磁场中的电枢(Ⅳ) 	
13	轮箍 A 在通过固定导线 B 所产生的磁场中(Ⅳ) 	

注:括号中罗马数字表示势力的形式

阻尼常常是速度的非线性函数,但在计算时,一般都将它线性化,即认为它是线性粘滞阻尼。阻尼的线性化,不因它是弱非线性(实际上它是强非线性),而是因为阻尼对振动规律的影响很小。例如,在计算系统的固有频率和非共振情况的振幅时,阻尼即可线性化,甚至可以完全忽略。

表 0.2

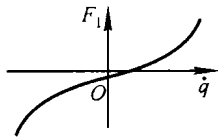
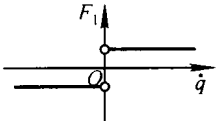
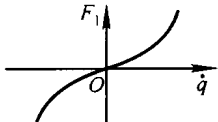
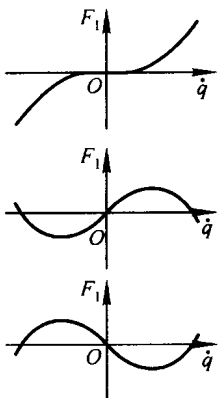
编号	系统类别	力的特性曲线
1	具有间隙的系统(I) 	
2	具有纵向槽的重型半圆柱体(II) 	
3	由内部压力压向底部的活塞(I) 	 <p data-bbox="667 955 1026 1028"> <math>P, P_a</math>——表示内部和大气压力;  <math>S</math>——气缸横断面积         </p>

当然不是在任何情况下,阻尼都可线性化或可完全忽略。如在分析自由衰减振动时、在计算受迫振动的共振振幅时、计算自激振动的定常解时、计算参数共振的振幅以及研究自激振动系统的过渡过程时,都需考虑阻尼的非线性特性。

若  $F_1$  为阻尼力,则满足不等式  $F_1(\dot{q})\dot{q} > 0$  的阻尼  $F_1(\dot{q})$  作负功,它消耗机械能,这样的阻尼称为耗散阻尼或称正阻尼。若  $F_1(\dot{q})\dot{q} < 0$ ,那么阻尼作正功,使机械能积蓄在系统之内,这样的阻尼称为负阻尼。如阻尼在振动位移的一个区间作负功,而在另一个区间作正功,则系统具有自激振动的性质。

某些非线性阻尼及其特性曲线示于表 0.3 中。

表 0.3

编号	阻尼型式和其函数	阻尼特性曲线
1	<p>幂函数阻尼</p> $F_1 = b_n  \dot{q} ^{n-1} \dot{q}$	
2	<p>库仑摩擦(在 1 中当 <math>n=0</math> 时)</p> $F_1 = b_0 \frac{\dot{q}}{ \dot{q} }$ <p>(<math>\dot{q} \neq 0</math>)</p>	
3	<p>平方阻尼(在 1 中当 <math>n=2</math> 时)</p> $F_1 = b_2  \dot{q}  \dot{q}$	
4	<p>线性和立方阻尼</p> <p>(a) <math>F_1 = b_1 \dot{q} + b_3 \dot{q}^3</math></p> <p>(b) <math>F_1 = b_1 \dot{q} - b_3 \dot{q}^3</math></p> <p>(c) <math>F_1 = -b_1 \dot{q} + b_3 \dot{q}^3</math></p>	



续表

编号	阻尼型式和其函数	阻尼特性曲线
5	<p style="text-align: center;">线性和库仑摩擦</p> <p>(a) <math>F_1 = b_0 \frac{\dot{q}}{ \dot{q} } + b_1 \dot{q}</math></p> <p>(b) <math>F_1 = b_0 \frac{\dot{q}}{ \dot{q} } - b_1 \dot{q}</math></p> <p>(c) <math>F_1 = -b_0 \frac{\dot{q}}{ \dot{q} } + b_2 \dot{q}</math> (<math>\dot{q} \neq 0</math>)</p>	
6	<p style="text-align: center;">干摩擦(2 和 4 的各一部分)</p> <p><math>F_1 = b_0 \frac{\dot{q}}{ \dot{q} } - b_1 \dot{q} + b_3 \dot{q}^3</math> (<math>\dot{q} \neq 0</math>)</p>	

注:  $b, b_0, \dots, b_3$  为正常数

在研究简谐振动时, 即当  $q = A \sin(\omega t + \alpha)$  时, 弹性力和阻尼力的合力为  $F_0(q) + F_1(\dot{q}) = F_0 + F_1(\pm \omega \sqrt{A^2 - q^2})$ , 此合力只为广义坐标的函数。因为振动规律已给定, 所以才能将两个变量  $q$  和  $\dot{q}$  的函数变成一个变量  $q$  的函数。但在变换之后合力为  $q$  的多值函数, 而原势力函数则是  $q$  的单值函数(见表 0.1 和表 0.2)。

对于具有线性恢复力的耗散系统(见图 0.1 的 a, 其合力特性示于图 b); 滞后回线的面积等于阻尼在一个周期中所作的功。在具有非线性恢复力的情况下, 滞后回线的骨干曲线为曲线而不是直线(图 c)。当振幅一定, 而只改变振动频率时, 则回线的骨干曲线不变, 然而回线分支之间的距离和回线所包围的面积是变化的, 其变化规律和阻尼特性有关, 但库仑摩擦和材料的内摩擦情况除外, 此时改变频率, 滞后回线不变(图 d)。

### 3. 混合型非线性力

如果一种力不能表示成只和广义坐标有关, 或只和广义速度有关, 则