

画法几何方法及其应用

Н. Ф. 切特維魯新主編

高等教育出版社



画法几何方法及其应用

Н. Ф. 切特維魯新主編

武汉水利学院画法几何及制图教研組

清华大学画法几何及工程画教研組

譯

高等教育出版社

本书系根据苏联国立技术理论书籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版、切特維魯新 (Н. Ф. Четверухин) 主編的“画法几何方法及其应用”(Методы начертательной геометрии и её приложения) 一书 1955 年版譯出。

本书系一論文集, 其中共包括論文 22 篇。依性質相同而分为五部分。第一部分为画法几何中的几何变换, 有論文六篇。第二部分为多維画法几何, 有論文四篇。第三部分是画法几何的特殊方法, 有論文五篇。第四部分是罗巴切夫斯基空間的画法几何, 包括論文兩篇。第五部分是画法几何作图的机械化, 有論文五篇。

本书可供高等学校画法几何教师在进行教学及科学研究时参考之用, 同时也可供科学技术人員进修之用。

本书前四部分由武汉水利学院画法几何及制图教研組翻譯, 最后一部分由清华大学画法几何及工程画教研組翻譯, 最后由武汉水利学院画法几何及制图教研組校閱。

画法几何方法及其应用

Н. Ф. 切特維魯新主編

武汉水利学院画法几何及制图教研組

清华大学画法几何及工程画教研組

高等教育出版社出版 北京宣武門內榮恩寺 7 号

(北京市书刊出版业营业許可證出字第 054 号)

京华印书局印刷 新华书店发行

統一書号 15010·731 開本 787×1092¹/₁₆ 印張 19⁴/₈ 插頁 2

字數 433,000 印數 0001—6,500 定價 (8) 洋 2.50

1959 年 4 月第 1 版 1959 年 4 月北京第 1 次印刷

序

本論文集的目的是：要將目前已獲得的画法几何方法的進展，及其在各種實際問題上的應用，介紹給廣大的工程技術人員及高等學校教師們。

在画法几何方面科學研究題目是極為眾多的。為了便於閱讀，特將本文集的論文分為五部分，各部分的標題說明了歸入各該部分中論文的特性。

在題為“画法几何中的几何變換”的第一部分里，刊載了下列各篇文章。

И. И. 科托夫所寫的論文，題目是“画法几何中的組合圖及對偶原則”。論文作者討論了他所提出的“組合圖”法的特性，“組合圖”也就是雙重圖，這種圖形的獲得，一方面是利用了原物在圖象平面上的投影，另一方面是由于作出了原物上綫性元素在該圖象平面上的迹。作者利用透射變換和組合圖法，作出了形體的所謂“復組合圖”。其次，在論文中證明了在空間對偶的形體，其復組合圖在圖象平面上也是對偶的。

在這篇文章里，討論了對實踐有用的作復組合圖的特殊情形後，作者談到在復圖上（在兩個平面上的正投影）特殊的量度對偶性原則。這就有可能按一定形式在復圖上去解決對偶的問題，而復圖是已經在實踐中這樣地得到了推廣的。

И. И. 科托夫的文章最後一節研究了在復圖上點、直綫和平面運動的對偶性問題。必須指出，И. И. 科托夫的論文，假定讀者已有射影幾何的知識。在 Н. А. 格拉哥列夫 1936 年的“射影幾何學”的教本，或 Н. В. 耶菲莫夫 1953 年的“高等幾何學”中，可以找到必需的參考資料。

在 И. С. 札帕里茲的“空間的幾何變換及其在画法几何中的應用”一文中研究了將空間的透視仿射（類屬）變換作為画法几何的解題方法。作者取垂直於投影平面的“類屬平面”，並得到可能將空間的類屬變換歸結為投影平面上點場的類屬對應。將空間類屬變換應用到關於二階曲面的問題，作者就將這種問題化為一種特殊情形，即二階曲面是旋轉曲面的情形，這就使許多問題大為簡化。

在這篇論文中還說明了射影的透射變換在某些画法几何問題上的應用。

И. М. 別斯金在他的論文“計算的作圖方法”中，提出用坐標法來作平行投影（以及中心投影）的圖象。如果 (x, y, z) 是點 M 在空間原有的笛卡兒直角坐標，而 (ξ, η) 是該點在投影平面的平行投影 M' 的笛卡兒直角坐標，就有公式

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} \\ \eta &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

給出四個點在空間一般位置的坐標，以及它們在投影面上的圖象的坐標，我們就定出變換公式(1)的系數。特別是給出尺度四面體（Польке 四面體）的圖象。論文詳細討論了應用計算法去作“Вивьяни 曲綫”（即球面與圓柱面的相交之綫）的一個例題。作者指出了他所提出的作圖方法在繪形體的投影時所具有的優點，特別是當原形的形狀比較複雜時，優點尤著。

以下接着的两篇論文(仍属于第一部分)討論了中心軸測投影,其中第一篇为И. С. 札帕里茲所写,論文对中心軸測投影的基本定理給出了射影綜合証明,該定理是H. M. 別斯金所提議的(参考H. Ф. 切特維魯新所編論文集“現代画法几何学中的問題”,国立技术理論書籍出版社1947年版)。

第二篇文章中(H. Ф. 切特維魯新:“軸測投影的基本定理及中心投影中軸測系統的作法”)研究了下列三个問題:

- (1)將已知原形投射成为已知的投影(独立給定的投影)的可能性,
- (2)这个可能性的必要和充分的条件,
- (3)在中心投影中軸測系統的作法,以及这种投影的要素任意选择的可能性。

第一部分最后一篇論文是“利用几何变换在軸測投影中繪制曲面的交綫”,为H. M. 哈耳迭耶夫所写。文中提出了关于应用几何变换(射影的以及拓扑的)在軸測投影中解决求两曲面交綫的問題。本文最后举了一些航空技术方面的实际例子。

本論文集第一部分所收集的論文,指明了几何变换(仿射的、射影的、拓扑的),在画法几何中的应用,得到日益扩大的推广。下面指出特别有意义的一点,最近苏联的科学工作者所提出的学位論文中,应用拓扑变换以解决画法几何的問題(H. K. 格魯申斯卡娅 1949年,И. M. 哈耳迭耶夫和H. A. 馬拉霍夫 1954年),是成功的。

論文集的第二部分討論多維画法几何的問題。

第一篇是B. H. 彼尔維科娃的論文。文中給出在 n 維空間中的中心射影的必要知識,并証明一个定理,这定理是 n 維空間內中心軸測基本定理的概括。

这部分的第二篇論文是З. И. 朴里亚尼什尼科娃所写的“E. C. 霍多罗夫投影的推广”。文中提出四維空間几何形体在平面上表示的新方法。該方法保存了E. C. 霍多罗夫投影对三維空間的优越性。文中闡明了用这个方法解决位置問題的办法及其实际应用。

И. И. 科托夫的一篇不长的論文,用来証明他所提出的原則,即每个有不完整系数为 k 的不完整图,可以看作是完整图,只要將原形归入 $k+3$ 維空間中。証明的根据是H. Ф. 切特維魯新所写的两个定理(見E. A. 格拉祖諾夫和H. Ф. 切特維魯新合著的“軸測投影学”,苏联国立技术理論書籍出版社1953年版,79頁,此书已有中譯本,由高等教育出版社出版)。

第二部分最后的一篇論文是H. B. 納烏莫維奇所写的“应用多維画法几何去証明平面几何和立体几何的一些定理。”在这篇文章中推广了Д. Д. 莫尔杜哈伊-博耳托夫斯基的方法,該方法是利用画法几何的构图,証明关于两完全五点形的定理。作者利用多維画法几何,得出平面几何和立体几何一系列的新的定理。H. B. 納烏莫維奇这篇文章的結果充分証明了研究多維画法几何的实际价值。

閱讀第二部分的其他論文,必然会得到同样的結論。在最近,多維画法几何成功地用于物理化学分析中作多組分系統的状态图。我們指出,在本論文集第三部分中T. B. 克龙查克有一篇文章討論到应用画法几何来图示三元和四元系統的問題。在这篇文章中,作者根据所提出的問題,只討論了三維画法几何的应用。

“文集”的第三部分的标题是“画法几何中的特殊方法”。

这部分第一篇文章是 Л. И. 拉列亭的論文, “重迹法”, 文章說明了其中一种特殊图示法的基本概念。作者闡明如何利用重迹法来解决初等几何問題, 并給出一些将重迹法用于矢量代数及力学的例题。

Р. С. 沙法列維奇的論文, “用图解法去作与五个給定螺旋相关的螺旋”, 从螺旋理論的观点分析了摩奥尔的图示法。其次討論有关螺旋和柱面的作图步驟, 以及解决了几个彼此相关的螺旋和柱面的例题。作者指出了解决各式各样技术問題时图解法的价值。

在 А. Д. 波斯符揚斯基的文章“曲面上的正投影及其在空間齒輪嚙合面的几何問題中的应用”里, 叙述了一种特殊的射影方法, 这时投射綫是用綫复形的射綫。特別是用这种方法将直綫投射到曲面上。論文說明了如何将上述特殊的射影方法用来解决空間齒輪嚙合的問題。

Т. В. 克龙查克在論文“Е. С. 霍多罗夫的方法及其在化学图作法上的应用”里, 給讀者介紹了 Е. С. 霍多罗夫的矢量投影方法 (确切的說是帶有高度綫段的投影), 最近这种投影被称为“霍多罗夫投影”。作者列举了許多在这种投影图中解决几何問題的例子, 并将这种投影用来作三元和四元系統的化学状态图。

А. Р. 茲延巾在他的文章“Е. С. 霍多罗夫方法在矿山事业上的应用”里, 討論了将霍多罗夫投影用于矿山事业。

討論画法几何中的特殊方法的这一部分, 就包括这几篇論文。这部分所載的文章給出一些关于画法几何的各种应用的介紹。Р. С. 沙法列維奇的論文及 Л. И. 拉列亭的論文的一部分, 都涉及到前一本論文集“現代画法几何的問題”(1947)中所提出的問題 (Я. В. 朔尔的論文“画法几何中的矢量方法及其在力学中的应用”)。Т. В. 克龙查克和 А. Р. 茲延巾的論文則談到“霍多罗夫投影及其在物理化学分析和矿山事业中的应用”。值得指出, 霍多罗夫方法的这些应用最近在苏联已得到蓬勃的发展。

第四部分是“罗巴切夫斯基空間的画法几何”, 它包括两篇論文。

第一篇是已故教授 Л. Д. 莫尔杜哈伊-博耳托夫斯基所写。文中对于在罗巴切夫斯基空間中在两个投影平面上的正投射 (亦即类似于蒙日法) 的可能性, 提供了概念。指出这种方法的特性和討論一些最簡單的問題, 以及旋轉法和重合法。

應該指出, 关于罗巴切夫斯基几何本身更詳細的知識, 讀者可以从 З. А. 史哥柏茲的論文中获得。

З. А. 史哥柏茲的論文, “罗巴切夫斯基空間的画法几何原理”, 是特別有用的, 它提供了在通常的欧几里得平面上, 用投影表示罗巴切夫斯基空間的方法。因此发现在欧几里得平面上, 可以实现罗巴切夫斯基空間画法几何的作图。作者先給讀者介紹罗巴切夫斯基几何的基本概念, 然后实现了罗巴切夫斯基空間在极限球面上的投影映象。其次再談到极限球面在經過用一个无穷远点增补的欧几里得平面 (茂比烏斯平面) 上的映象, 作者利用它所得到的罗巴切夫斯基空間在欧几里得平面上的映象, 分析了許多位置問題及量度問題。

論文的最后一部分, 第五部分的标题是“画法几何作图的机械化”。

这部分首先是 C. A. 斯米尔諾夫的論文“根据射影变换繪制图形的一般方法”。作者說明怎样利用最简单的仪器就可以在图上进行相似变换、类属变换及透射变换。这就可以利用他自己設計的仪器去作空間对象的透視和軸測图, 以及进行图的相似放大。

T. B. 瓦里次的論文“制图过程机械化的某些問題”里, 对作投影图的作图器械构造, 作了簡短評述。作者叙述了他自己設計的一些仪器, 这些仪器經過实际試驗, 并証明效果良好(橢圓規、仿射規)。

T. A. 烏沙科夫的論文“在仿射投影和軸測投影中矿区坑道直观图的作图机械”, 叙述了作者本人提出的及其他人提出的一些仪器, 根据正投影中的复图, 可以画“仿射”图及軸測图。文中又討論在“仿射”投影中如何解决量度問題, 并叙述了作者为此目的所設計的仪器(“仿射尺”)。

A. A. 波斯符揚斯基的論文, 討論关于在正投影图中的复图上, 用画法几何的作图法, 解三項式的問題。作者提出的图解定根法, 无论对于确定方程的实根和虛根, 都是有用的。

第五部分的最后一篇論文, 也就是論文集的最后一篇論文, 是 H. A. 馬拉霍夫和 B. H. 米罗什尼禪克所写的。論文題目是“制图工作机械化的問題”。作者在該文中概略地說明了为減輕和加速在平面及空間中(尤其是在金属上划綫)进行制图工作的仪器。此外, 还叙述了一些用于各种度量工作(确定弦长、等分綫段等等)的仪器。

从第五部分的情况看来, 应该指出, 在制图工作的机械化方面还只是迈开了第一步, 并且在实践上得到应用的創議, 为数极少。但是这个問題的迫切性是不容忽視的, 今后在这方面的科学力量和設計力量的加强, 应该得到充分的支持。

由以上所作的本論文集的內容介紹, 充分說明了画法几何及其在解决实际問題方面的应用, 在近代得到了相当广泛的发展, 并且有繼續发展的趋势。在苏联制图学科方面的科学研究工作, 正在画法几何及制图教研組中进行, 同时也在科学研究院中进行。可以預料, 本論文集的出版, 对于所有对画法几何以及对画法几何中科学发展的各个方面感兴趣的讀者, 都有益处。

論文集中某些論文的校閱, 曾得到 B. O. 高尔頓、C. A. 斯米尔諾夫及 A. M. 帖夫林的参加。

H. 切特維魯新

1954年6月27日于莫斯科

目 录

序	vii
---	-----

第一部分 画法几何中的几何变换

画法几何中的组合图及对偶原则(И. И. 科托夫)	1
引言	1
§ 1. 组合图的复投影图	2
§ 2. 组合图的复投影图是射影空间的模象	9
§ 3. 欧几里得空间的复组合图	15
§ 4. 复投影图上运动的对偶性原则	23
参考书刊	31
空间的几何变换及其在画法几何中的应用(И. С. 札帕里兹)	32
引言	32
§ 1. 空间的类属(透视仿射)变换	33
§ 2. 类属空间投射方向的选择	35
§ 3. 在正投影中类属空间的图象	38
§ 4. 一般形式的二阶曲面及其在旋转曲面中的变换	40
§ 5. 二阶曲面的截面	43
§ 6. 两个二阶曲面的交线	45
§ 7. 椭圆曲面	45
§ 8. 类属对应的立体的体积之间的关系	47
§ 9. 一般的空间射影透射	49
参考书刊	51
计算的作图方法(Н. М. 别斯金)	52
§ 1. 方法的描述	52
§ 2. 例题	53
§ 3. 计算方法的优点	62
附录	64
Н. М. 别斯金定理的射影综合证明(И. С. 札帕里兹)	66
参考书刊	69
轴测投影的基本定理及中心投影中轴测系统的作法(Н. Ф. 切特维鲁新)	70
参考书刊	74
利用几何变换在轴测投影中绘制曲面的交线(И. М. 哈耳迭耶夫)	75
引言	75
第一章 在轴测图中应用射影几何求曲面的交线	77
第二章 曲面变换及其在作交线上的应用	88
结论	95
参考书刊	95

第二部分 多维画法几何

n 维空间中的中心轴测基本定理的概述(В. Н. 彼尔维科娃)	97
引言	97

§ 1. 关于 n 維空間內平面上的中心投影	97
§ 2. 相关系統的选定	101
§ 3. n 維空間中心軸測的基本定理	105
参考书刊	107
E. C. 霍多罗夫投影的推广 (З. И. 朴里亚尼什尼科娃)	108
引言	108
§ 1. 四維空間中基本几何形体的图象	108
§ 2. Π^4 中基本的位置問題	111
§ 3. 平行綫段法在解綫性方程組中的应用	119
§ 4. 平行綫段法在确定类质同晶化合物成分上的应用	120
§ 5. 平行綫段法在确定两五合金混合物成分时的应用	121
§ 6. 平行綫段法用来确定結晶物質的固相成分	123
参考书刊	124
从多維几何观点来看的不完整图 (И. И. 科托夫)	125
参考书刊	128
应用多維画法几何去証明平面几何和立体几何的一些定理 (Н. В. 納烏莫維奇)	129
§ 1. 应用画法几何証明关于两完全四边形对应边相交的定理	129
§ 2. 利用四維空間的画法几何証明关于两完全五点形对应边相交的定理	130
§ 3. 应用五維空間的画法几何証明关于两完全六点形对应边相交的定理	131
§ 4. 应用六維空間的画法几何去証明关于两完全七点形对应边相交的定理	133
§ 5. 上述結果在 n 維空間中的推广	133
§ 6. 利用多維構形的射影而得到的平面几何及立体几何的一些定理	134
§ 7. 关于多維的完全多点形对应边相交的定理	136
参考书刊	137
第三部分 画法几何中的特殊方法	
重迹法 (Л. И. 拉列寧)	138
引言	138
§ 1. 方法的基本原理	139
§ 2. 基本問題的解答	143
§ 3. 多面体	149
§ 4. 直紋曲面	151
§ 5. 在矢量代数和力学上的某些应用	154
参考书刊	159
用图解法去作与五个给定螺旋相关的螺旋 (Р. С. 沙法列維奇)	160
参考书刊	167
表面上的正投影及其在空間齿輪嚙合面的几何問題中的应用 (А. А. 波斯符揚斯基)	168
§ 1. 投射概念的推广	168
§ 2. 用退化綫复形的射綫將直綫投射到各种表面上的正投影的作法	170
§ 3. 用一般綫复形的射綫將直綫投射到各种表面上的正投影的作法	173
§ 4. 在空間齿輪嚙合面的几何問題上的应用	176
参考书刊	181
E. C. 霍多罗夫的方法及其在化学图作法上的应用 (Т. Б. 克龙查克)	182
引言	182
§ 1. 矢量投影法的实质	182
§ 2. 在矢量投影中解决画法几何問題的示例	185

§ 3. 画法几何的辅助方法	188
§ 4. 曲线和曲面	190
§ 5. 矢量投影法在作三元和四元系统的化学状态图时的应用	197
§ 6. 四元系统的空间图的作法举例	201
参考书刊	207
E. C. 霍多罗夫方法在矿山事业上的应用(A. P. 兹延巾)	209
导言	209
§ 1. 图示法的实质	210
§ 2. 层状矿床矿层要素的确定	211
§ 3. 折皱形状的表示	212
§ 4. 断层要素的确定	214
§ 5. 矿山坑道图的作法	215
§ 6. 露天施工和地形面的图象	217
结论	219
参考书刊	220

第四部分 罗巴切夫斯基空间的画法几何

罗巴切夫斯基空间的画法几何(A. A. 莫尔杜哈伊——博耳托夫斯基)	221
罗巴切夫斯基空间的画法几何原理(3. A. 史哥伯兹)	226
I. 导言	226
§ 1. 罗巴切夫斯基的公设·平行直线及其特性	226
§ 2. 罗巴切夫斯基平面上两直线的相互位置·线束	228
§ 3. 圆周·极限圆·等距曲线	229
§ 4. 罗巴切夫斯基空间中直线与平面的位置	230
§ 5. 空间直线把·球面·极限球面·等距曲面	231
II. 罗巴切夫斯基空间在极限球面上的映象	232
§ 6. 直线、平面及点的映象	232
§ 7. 两平面、直线与平面及两直线的相互位置	235
§ 8. 直线与平面的交点·三个平面的交点·椭圆型平面把	238
§ 9. 两平面间的夹角	239
§ 10. 相交两直线间的夹角和两点之间的距离	239
§ 11. 直线与平面的夹角、直线与平面之间的距离	243
§ 12. 点至直线和点至平面的距离	245
§ 13. 两倾斜直线的公截线	246
§ 14. 两倾斜直线的公垂线	247
§ 15. 两分散平面的公垂线	248
§ 16. 平面上的几何作图	250
§ 17. 双曲线型和抛物型平面束和平面把	252
III. 应用	254
§ 18. 有固有顶点和理想顶点的圆锥	254
§ 19. 关于平面和关于点的对称	256
§ 20. 罗巴切夫斯基空间的运动	257
§ 21. 圆锥曲线	258
§ 22. 巡回曲线	263
参考书刊	267

第五部分 画法几何作图的机械化

根据射影变换绘制图形的一般方法(C. A. 斯米尔诺夫)	268
------------------------------	-----

§ 1. 概述.....	268
§ 2. 透視圖形的作法.....	270
§ 3. 軸測圖形的繪制.....	274
§ 4. 圖樣的放大和縮小.....	276
制圖過程機械化的某些問題(Г. Б. 瓦里次).....	278
參考書刊.....	280
在仿射投影和軸測投影中矿区坑道直觀圖的作圖機械(Г. А. 烏沙科夫).....	281
§ 1. 繪制仿射圖的儀器.....	281
§ 2. 仿射投影中某些度量問題的解法.....	284
§ 3. 解答仿射投影中度量問題的儀器.....	285
參考書刊.....	287
用圖法幾何的方法解三項式方程(А. А. 波斯符揚斯基).....	288
參考書刊.....	292
制圖工作機械化的問題(Н. А. 馬拉霍夫及Б. Я. 米羅什尼禪克).....	293
§ 1. 在曲面上求交綫的儀器.....	293
§ 2. 在金屬面上繪制平面圖形的刻綫儀.....	294
§ 3. 度量儀.....	297
中俄人名對照表.....	299
中俄名詞對照表.....	301

第一部分 画法几何中的几何变换

画法几何中的组合图及对偶原则

И. И. 科托夫

导 言

两投影法(两图法)是现行图示法中的一种,其实质可概述如下。

在空间取三个一般位置的平面 π 、 π_1 、 π_2 作为图象平面,并取三个点 P 、 P_1 、 P_2 作为投射中心。

以平面 π 上的点偶 A_1 、 A_2 作为点 (A) 的图象,点 A_1 、 A_2 的作法如下:

1. 在平面 π_1 上作出点 $(A)_1$,即以 P_1 为中心时点 (A) 的投影。
2. 在平面 π_2 上作出点 $(A)_2$,即以 P_2 为中心时点 (A) 的投影。
3. 以 P 为中心,将所得的点 (A) 的两个图象 $(A)_1$ 和 $(A)_2$,投射成平面 π 上的点 A_1 和 A_2 。

有时要考虑这个方法的特殊情形,即在同一条直线上取中心 P 、 P_1 、 P_2 而使平面 π_1 或 π_2 与平面 π 重合。

在更普通的情形之下,使平面 π_1 上的投影场 $(A)_1$ 与平面 π 上的场 A_1 共线,而使平面 π_2 上的投影场 $(A)_2$ 与平面 π 上的场 A_2 共线,这样一来,“投影”场 A_1 和 A_2 是共线场[1]①。

如果认为直线是点列的承载,而平面是点场的承载,我们就以相应的点形体(即点列和点场)的图象,作为直线和平面的图象。

蒙日的投影图(复图)是两图法中的一种特殊情形(图1)。

取互相垂直的平面 π_1 和 π_2 ;而以平面 π_1 作为平面 π ;以与平面 π_1 和 π_2 正共轭对应的无穷远点 $P_{1,\infty}$ 和 $P_{2,\infty}$ 作为投射中心 P_1 和 P_2 ;以与平面 σ 正共轭对应的无穷远点 P_∞ 作为投射中心 P ,这里的平面 σ 是平面 π_1 和 π_2 所构成的偶数象限的平分角平面。

以 $P_{1,\infty}$ 和 $P_{2,\infty}$ 为中心,将点 (A) 投射到平面 π_1 和 π_2 上,就得到点 $(A)_1$ 和 $(A)_2$ 。以 P_∞ 为中心将点 $(A)_1$ 和 $(A)_2$ 投射到 π 上,就得到点 $A_1 \equiv (A)_1$ 和 A_2 。

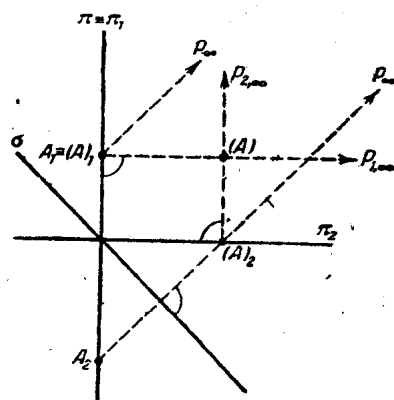


图 1.

① 方括弧 [] 内的数字是参考书刊的序号——编者注。

在画法几何中,除两图法之外,还采用两迹法。下面就概述这个方法。

和两图法一样,我們在空間选定三个平面 π, π_1, π_2 和一个投射中心 P 。以直綫作为空間的基本元素。要在平面上得到直綫 (a) 的“图象”,可进行如下:

1. 作直綫 (a) 在平面 π_1 上的迹点 $(a)_{\pi_1}$ 。
2. 作直綫 (a) 在平面 π_2 上的迹点 $(a)_{\pi_2}$ 。
3. 以点 P 为中心,将所得的直綫 (a) 的两个迹点,投射到平面 π 上成为点 a_{π_1} 和 a_{π_2} 。

这样作出来的点 a_{π_1} 和 a_{π_2} , 唯一地确定直綫 (a) 在空間的位置, 我們就将这样的点 a_{π_1} 和 a_{π_2} 作为直綫的“图象”的元素[2]。

有时为了簡便, 我們取无穷远平面来作为平面 π_2 。这时, 平面和点就看作是場和直綫束的承載; 平面和点的“图象”則相应地以場和束的“图象”来表示, 場的“图象”是一个直綫偶, 束的“图象”是一个平面的点場偶。

上述作图方法之所以得到发展, 是因为在画法几何中利用它就实现了空間平模象的作图, 在該模象中反映着空間的位置性和量度性。

例如, 蒙日的复投影图正是欧几里得空間的模象。但利用蒙日的复图法, 我們不可能作出射影空間的模象, 而使得空間的对偶形体对应于模象中画平面上的对偶图象。

其原因将在下文中找到。

两图法不适用于空間平面, 两迹法也不适用于空間点。

本文打算再定义和研究这样的一种图示法, 这种方法使得从空間形体 (F) 和 (Φ) 的射影对偶性中, 会得出这些形体在投影图画平面上的图象 F 和 Φ 之間的射影对偶性。

§1. 組合图的复投影图

試將射影空間 R_3 作对合的透射变换 Γ , 該变换以某点 (Ω) 为透射中心, 而以 ω 为其双重平面[3]。

空間 R_3 被变换为与它自身重合的空間 R'_3 。这时, 空間 R_3 中每点 (A) 及关联于 (A) 的平面 α 都将与空間 R'_3 中的一点 $(A)'$ 及关联于 $(A)'$ 的平面 $(\alpha)'$ 相互对应。

在透射变换 Γ 中对应的点 (A) 和 $(A)'$ 与透射中心 (Ω) 共綫, 并且与点 (Ω) 和 $A_{(\Omega), \omega}$ (即直綫 $(A)_{(\Omega)}$ 在双重平面 ω 上的迹点) 构成調和四点(图 2)。

在透射变换 Γ 中对应的平面 (α) 和 $(\alpha)'$ 相交于平面 ω 上的一直綫 $(\alpha)_{\omega}$, 并且平面 (α) 和 $(\alpha)'$ 与平面 ω 和 $\alpha_{\omega, (\Omega)}$ (即把 (Ω) 中直綫 $(\alpha)_{\omega}$ 的迹平面) 构成調和四平面。

在透射变换 Γ 中, 对应的直綫 (a) 和 $(a)'$ 相交

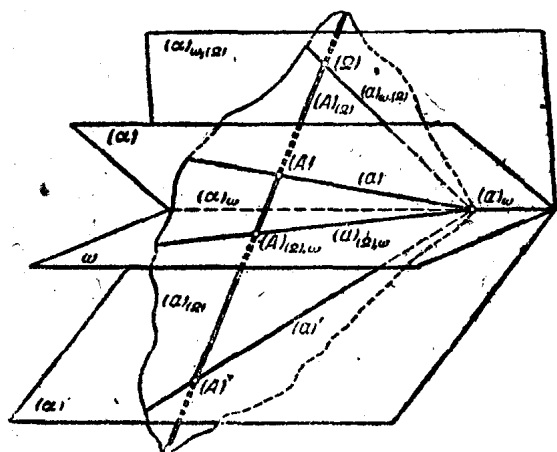


图 2.

于平面 ω 上的一点 $(a)_{\omega}$, 并且直线 (a) 和 $(a)'$ 都在属于把 (Ω) 的平面 $(a)_{(\Omega)}$ 上。同时, 直线 (a) 和 $(a)'$ 与直线 $(a)_{(\Omega), \omega}$ 和 $(a)_{\omega, (\Omega)}$ 构成调和群。

直线 $(A)_{(\Omega)}$ 将称为点 (A) 、 (A) 的连通直线; 直线 $(a)_{\omega}$ 将称为平面 (a) 、 $(a)'$ 的连通直线; 点 $(a)_{\omega}$ 和平面 $(a)_{(\Omega)}$ 将称为直线 (a) 、 $(a)'$ 的连通组。

在空间 R_3 中取任意平面 π , 并以该平面 π 为画平面; 再取空间 R_3 中的某点 P 作为投射中心。

空间 R_3 中形体 (F) 的图象将按下列程序而作出。

1. 在透射变换 Γ 中, 作对应于形体 (F) 的形体 $(F)'$ 。
2. 将形体 $(F)'$ 及在透射变换中形体 (F) 和 $(F)'$ 的所有对应点、直线及平面的连通元素一齐嵌入形体 (F) 中, 使形体 (F) 扩展为形体 (F, F') 。

3. 在平面 π 上, 以 P 为中心作形体 (F, F') 的组合图 $\Phi F, F'$ 。

这样作出的图形 F, F' 就叫做形体 (F) 的复组合图。

平面 π 上的投影图, 如果它实现了作复组合图, 就叫做复投影图。

现在我们就更详细地来研究复投影图, 先从研究它的对偶性入手。以下分作两栏, 并行列出这些对偶性质, 并且把成对偶的两条, 分别冠以同一号码而带不同的字母 a 和 b 。

- | | |
|---|---|
| <p>1a. 容易看出, 透射变换 Γ 的中心 (Ω) 的复组合图是一点 $(\Omega)_{P, \pi}$, 即投射中心为 P 时 (Ω) 在 π 上的投影。</p> | <p>1b. 容易看出, 透射变换 Γ 的双重平面 ω 的复组合图, 是 ω 在平面 π 上的一条迹线 ω_{π}。</p> |
|---|---|

点 $(\Omega)_{P, \pi}$ 将以 Ω 来表示, 并称为图的中心。

直线 ω_{π} 将称为图的轴。

2a. 把 (Ω) 中的每条直线 $(A)_{(\Omega)}$ 是透射变换 Γ 中的双重直线, 所以它的复组合图是直线 $A_{(\Omega)P, \pi}$ (即投射中心为 P 时直线 $(A)_{(\Omega)}$ 在 π 上的投影) 和点 $(A)_{(\Omega), \pi}$ (即直线 $(A)_{(\Omega)}$ 在平面 π 上的迹点)。

2b. 场 ω 中的每条直线 $(a)_{\omega}$ 是透射变换 Γ 中的双重直线, 所以它的复组合图, 是点 $(a)_{\omega, \pi}$ (即直线 $(a)_{\omega}$ 在平面 π 上的迹点) 和直线 $(a)_{\omega, P, \pi}$ (即投射中心为 P 时直线 $(a)_{\omega}$ 在 π 上的投影)。这直线 $(a)_{\omega, P, \pi}$ 将以 a_{π} 来表示。

我们以 A_{Ω} 来表示直线 $A_{(\Omega)P, \pi}$, 显然, A_{Ω} 通过投影图的中心 Ω 。

显然, 点 $(a)_{\omega, \pi}$ 将在投影图的轴 ω_{π} 上。

3a. 把 (Ω) 中的每个平面 $(a)_{(\Omega)}$ 都是透射变换 Γ 中的双重平面, 所以, 它的复组合图是一直线 $(a)_{(\Omega), \pi}$ (即平面 $(a)_{(\Omega)}$ 在场 π 中的迹线)。

3b. 场 ω 中的每个点 $(a)_{\omega}$ 都是透射变换 Γ 中的双重点, 所以它的复组合图是一个点 $(a)_{\omega, P, \pi}$ (即投射中心为 P 时点 $(a)_{\omega}$ 在 π 上的投影), 这点我们将以 a_{ω} 来表示。

4a. 容易看出, $A_{(\Omega)}$ 的复组合图 $A_{(\Omega), \pi}$ 单值地决定把 (Ω) 中直线 $(A)_{(\Omega)}$ 的位置, 因为直

4b. 容易看出, a_{ω} 的复组合图 $(a)_{\omega, \pi}$ 单值地决定场 ω 中直线 $(a)_{\omega}$ 的位置, 因为直线 $(a)_{\omega}$

① 形体的组合图是形体的基本元素在画平面的投影和迹所组成。关于这种图的特性, 详见 И. И. Котов, Комбинированные изображения, изд. МАН. 1951.

线 $(A)_{(\Omega)}$ 的位置是由点偶 $(A)_{(\Omega),\pi}$ 和 (Ω) 来决定的。
 定的。

5a. 同样可以说, 组合图 $(a)_{(\Omega),\pi}$ 单值地决定把 (Ω) 中平面 $(a)_{(\Omega)}$ 的位置, 因为这个位置就是直线 $(a)_{(\Omega),\pi}$ 和点 (Ω) 所决定的平面。

6a. 试提出求作一般位置点 (A) 的复组合图的问题。

按照本节开始所述的作法程序, 我们先作透射变换 Γ 中与点 (A) 对应的点 $(A)'$, 再作出形体 (A, A') 的组合图。这里的形体 (A, A') 由点 (A) 、 $(A)'$ 及直线 $(A)_{(\Omega)}$ 组成。

显然, 形体 (A, A') 的组合图是由点 $(A)_{P,\pi}$ 和 $(A)'_{P,\pi}$ (即投射中心为 P 时点 (A) 和 $(A)'$ 在 π 上的投影), 直线 $(A)_{(\Omega),P,\pi}$ (即投射中心为 P 时直线 $(A)_{(\Omega)}$ 在 π 上的投影) 及点 $(A)_{(\Omega),\pi}$ (即直线 $(A)_{(\Omega)}$ 在 π 上的迹点) 所组成 (图 3a)。这时, 我们以 A 和 A' 来表示点 $(A)_{P,\pi}$ 和点 $(A)'_{P,\pi}$, 点 A 和 A' 将与中心 (Ω) 在同一直线 $(A)_{(\Omega),P,\pi}$ 上, 这直线我们以 $A_{(\Omega)}$ 来表示。点 $(A)_{(\Omega),\pi}$ 也在直线 $A_{(\Omega)}$ 上。

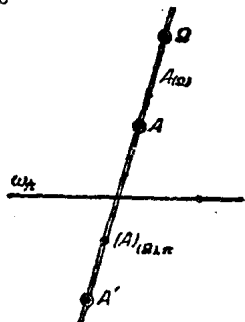


图 3a.

于是, 点 (A) 的复组合图将由点 A 、 A' 、 $(A)_{(\Omega),\pi}$ 以及点 A 和 A' 的连通直线 $A_{(\Omega)}$ 所组成。

7a. 现在我们可以说, 与图的中心 Ω 在同一直线 $A_{(\Omega)}$ 上的作为点 (A) 的组合图的两点 A 和 A' , 唯一地定出点 (A) 在空间 R_3 中的位置。

5b. 同样可以说, 组合图 a_{ω} 单值地决定场 ω 中点 $(a)_{\omega}$ 的位置, 因为这个位置就是直线 $a_{\omega,P}$ 与平面 ω 的交点。

6b. 试提出求作一般位置平面 (α) 的复组合图的问题。

按照本节开始所述的作法程序, 我们先作透射变换 Γ 中与平面 (α) 对应的平面 $(\alpha)'$, 再作出形体 (α, α') 的组合图。这里的形体 (α, α') 由平面 (α) 和 $(\alpha)'$ 及直线 $(\alpha)_{\omega}$ 组成。

显然, 形体 (α, α') 的组合图是由直线 $(\alpha)_{\pi}$ 、 $(\alpha)'_{\pi}$ (平面 (α) 和 $(\alpha)'$ 在场 π 上的迹线), 点 $(\alpha)_{\omega,\pi}$ (直线 $(\alpha)_{\omega}$ 在场 π 上的迹点) 和直线 a_{ω} (即投射中心为 P 时直线 $(\alpha)_{\omega}$ 在 π 上的投影) 所组成 (图 3b)。这时, 直线 $(\alpha)_{\pi}$ 和 $(\alpha)'_{\pi}$ 将相交于轴 ω_{π} 上的一点 $(\alpha)_{\omega,\pi}$ 。直线 a_{ω} 也通过这一点。

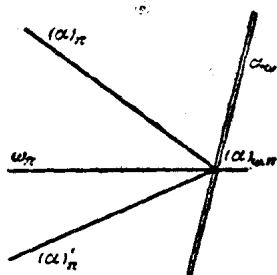


图 3b.

于是, 平面 (α) 的复组合图将由直线 $(\alpha)_{\pi}$ 、 $(\alpha)'_{\pi}$ 和点 $(\alpha)_{\omega,\pi}$ (即直线 $(\alpha)_{\pi}$ 和 $(\alpha)'_{\pi}$ 的连通点) 所组成。

7b. 现在我们可以说, 与图轴 ω_{π} 相交于同一点 $(\alpha)_{\omega,\pi}$ 的作为平面 (α) 的组合图的两直线 $(\alpha)_{\pi}$ 和 $(\alpha)'_{\pi}$, 唯一地定出平面 (α) 在空间 R_3 中的位置。

設在平面 π 中給出与图的中心在同一直线 $A_{(\Omega)}$ 上的两点 A 和 A' 。在空間引平面 $A_{(\Omega),P}$ 并將它作为画平面 (图 4)，这个画平面暂时以 μ 来表示。这时，画平面 μ 上就有直线 ω_μ ，直线 $A_{(\Omega)}$ 和点 $A, A', \Omega, P, (\Omega)$ 。

作出三点 A, A', Ω 的第四調和点 $A_{(\Omega),\omega}$ (使它与 Ω 共轭) 之后，就可以把 $A_{(\Omega),\omega}$ 作为直线 $(A)_{(\Omega)}$ 在場 π 中的迹点 $(A)_{(\Omega),\omega}$ 的投影。

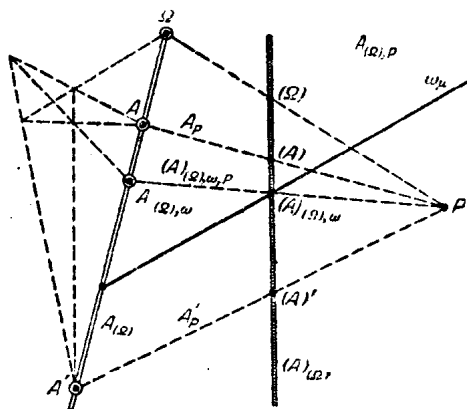


图 4.

按本节开始所述的对合透射变换的特性，这是一定可以作得出来的。

利用直线 $A_{(\Omega),\omega,P}$ ，我們在平面 ω 上，根据点 $A_{(\Omega),\omega}$ ，重定点 $(A)_{(\Omega),\omega} \equiv A_{(\Omega),\omega,P}$ 的位置，然后作出直线 $(A)_{(\Omega)} \equiv (A)_{(\Omega),\omega,(\Omega)}$ 。

容易看出，点 (A) 和 (A') 的位置唯一地由直线 $(A)_{(\Omega)}$ 、 A_P 和直线 $(A)_{(\Omega)}$ 、 A'_P 的交点而定出。

作出了点偶 (A) 和 $(A)'$ ，也就解决了根据点偶 A, A' 求作点 (A) 的基本問題。

分析上面証明的命題，我們可以看出，虽然点 (A) 的复組合图内也含有点 $(A)_{(\Omega),\pi}$ ，但点 (A) 是由給出的两点 A 和 A' 来确定的。因而，点 $(A)_{(\Omega),\pi}$ 不能够在直线 $A_{(\Omega)}$ 上任意选取；而点 $(A)_{(\Omega),\pi}$ 的位置是由給出两点 A 和 A' 来确定的。

設在平面 π 中給出与图軸 ω_π 相交于同一个点 $(\alpha)_{\omega,\pi}$ 的两直线 $(\alpha)_\pi$ 和 $(\alpha)'_\pi$ 。作出三直线 $(\alpha)_\pi, (\alpha)'_\pi, \omega_\pi$ 的第四調和直线 $(\alpha)_{\omega,(\Omega),\pi}$ (使它与 ω_π 共轭) 之后，就可以将直线 $(\alpha)_{\omega,(\Omega),\pi}$ 作为束 (Ω) 中平面 $(\alpha)_{\omega,(\Omega)}$ 的迹线。

按本节开始所述的对合透射变换的特性，这是一定可以作得出来的。

在把 (Ω) 中，根据直线 $(\alpha)_{\omega,(\Omega),\pi}$ ，重定平面 $(\alpha)_{\omega,(\Omega)}$ 的位置，然后作出直线 $\alpha_\omega \equiv (\alpha)_{\omega,(\Omega),\omega}$ 。

容易看出，平面 (α) 和 $(\alpha)'$ 的位置，唯一地由两对直线偶 $(\alpha)_\omega, (\alpha)_\pi$ 和 $(\alpha)_\omega, (\alpha)'_\pi$ 来决定。

作出了平面偶 (α) 和 $(\alpha)'$ ，也就解决了根据直线偶 $(\alpha)_\pi$ 和 $(\alpha)'_\pi$ 求作平面 (α) 的基本問題。

分析上面証明的命題，我們可以看出，虽然平面 α 的复組合图内也含有直线 α_ω ，但平面 (α) 是由給出的两直线 $(\alpha)_\pi, (\alpha)'_\pi$ 来确定的，因而，直线 α_ω 不是过 $(\alpha)_{\omega,\pi}$ 而任意引出的，而直线 α_ω 的位置是由給出的两直线 $(\alpha)_\pi$ 和 $(\alpha)'_\pi$ 来确定的。

8. 現在談到一般位置直线 (a) 的复組合图的作法。先将由直线 (a) 組成的形体扩展为形体

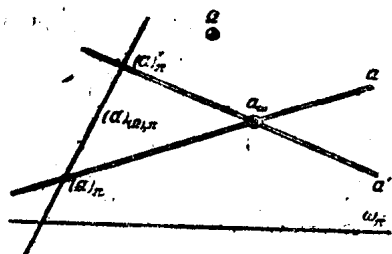


图 5.

(a, a') , 并作出形体 (a, a') 的組合图, 我們就得到直綫的复組合图, 其中包括有: 直綫偶 a, a' (即投射中心为 P 时直綫 (a) 和 (a') 在 π 上的投影); 点偶 $(a)_\pi$ 和 $(a')_\pi$ (即直綫 (a) 和 (a') 在場 π 上的迹点); 点 a_ω (即直綫 (a) 和 (a') 在場 ω 中的公有迹点 $(a)_\omega$ 的投影) 以及直綫 $(a)_{(O),\pi}$ (即平面 $(a)_{(O)}$ 的迹綫) (图 5).

虽然直綫的复組合图包括有六个元素——即三边为 $a, a', (a)_{(O),\pi}$ 的三角形 $(a)_\pi, (a')_\pi, a_\omega$, 但是容易証明, 直綫的复組合图可以由給出直綫偶 a, a' 或給出点偶 $(a)_\pi, (a')_\pi$ 来确定。

9a. 我們說, 作为直綫 (a) 的复組合图的元素的一般位置直綫 a, a' , 确定了直綫 (a) 在空間 R_3 中的位置, 并且是唯一的。

其实, 將直綫 a, a' 的交点 a_ω 看作是 P 为投射中心时点 $(a)_\omega$ 在 π 上的投影, 我們就可以將点 $(a)_\omega$ 看作是全等于点 $(a)_{\omega,P,\omega}$ 而唯一重定点 $(a)_\omega$ 的位置。

然后在直綫 a 和 a' 取与图的中心 Ω 共綫的点偶 A, A' , 我們就可以重定点 (A) 和 (A') 在空間的位置。点 $(a)_\omega, (A)$ 和点 $(a)_\omega, (A')$ 确定了直綫 (a) 和 (a') 的位置。其中第一条直綫 (a) 即所求的直綫。

如果我們在直綫 a, a' 上取点偶 B, B' 而不取点偶 A, A' , 則由于射影过程中关联性不变, 点 $(B), (B')$ 將属于直綫 $(a), (a')$ 。

今后, 点 (A) 的复組合图点 A, A' 和直綫 (a) 的复組合图直綫 a, a' , 將称为点 (A) 和直綫 (a) 的第一投影和第二投影。

直綫 $A_{(O)}$ 和点 a_ω 將称为点 (A) 和直綫 (a) 的复組合图的連通元素。

10a. 研究直綫 $(A)_{(O)}$ 上点列的复組合图, 我們可以肯定說: 直綫 $(A)_{(O)}$ 上点列的第一投影和第二投影的对应元素, 是处在双曲对合中, 对合的双重元素是点 Ω 和 $A_{(O),\omega\omega}$ 。

上述命題所依据的事实是点 A, A', Ω 和

96. 我們說, 作为直綫 (a) 的复組合图的元素的一般位置点 $(a)_\pi$ 和 $(a')_\pi$, 确定了直綫 (a) 在空間 R_3 中的位置, 并且是唯一的。

其实, 將过点 $(a)_\pi$ 和 $(a')_\pi$ 的直綫 $(a)_{(O),\pi}$ 看作是平面 $(a)_{(O)}$ 的迹綫, 我們就可以將平面 $(a)_{(O)}$ 看作是全等于平面 $(a)_{(O),\pi,\pi,(O)}$ 而唯一地重定 $(a)_{(O)}$ 在空間的位置。

然后, 过点 $(a)_\pi$ 和 $(a')_\pi$ 引直綫偶 $(a)_\pi$ 和 $(a')_\pi$, 使与軸相交于同一点, 我們就可以重定平面 (a) 和 (a') 在空間的位置。平面 $(a)_{(O)}, (a)$ 与平面 $(a)_{(O)}, (a')$ 的交綫即定出直綫 (a) 和 (a') 的位置。其中第一条直綫 (a) 即为所求的直綫。

如果我們过点 $(a)_\pi$ 和 $(a')_\pi$ 引直綫偶 $(\beta)_\pi$ 和 $(\beta')_\pi$ 而不取直綫偶 $(a)_\pi, (a')_\pi$, 則由于相交过程中关联性不变, 平面 $(\beta), (\beta')$ 將属于直綫 $(a), (a')$ 。

今后, 平面 (a) 和直綫 (a) 的复組合图直綫 $(a)_\pi, (a')_\pi$ 和点 $(a)_\pi, (a')_\pi$, 將称为平面 (a) 和直綫 (a) 的第一迹和第二迹。

点 $(a)_{\omega\pi}$ 和直綫 $(a)_{(O),\pi}$ 將称为平面 (a) 和直綫 (a) 的复組合图的連通元素。

106. 研究直綫 $(a)_\omega$ 的平面束的复組合图, 我們可以肯定說: 直綫 $(a)_\omega$ 的平面束的第一迹和第二迹的对应元素, 是处在双曲对合中, 对合的双重元素是直綫 ω_π 和点 $(a)_{\omega,(O)}$ 。

上述命題所依据的事实是直綫 $(a)_\pi, (a')_\pi$ 、