高等学校试用教材

理论力学

下册

同济大学理论力学教研室编

人民教育出版社

高等学校试用教材

理　论　力　学

下　　册

同济大学理论力学教研室编

人民教育出版社

本书分上、下两册，上册包括静力学和运动学，下册为动力学。为了便于教学，各章配有思考题、习题和习题答案。书中带“*”号的内容(包括习题)，可根据专业的需要决定取舍。

本书可作为高等学校工科土建、水利类各专业的试用教材或教学参考书。

高等学校试用教材

理 论 力 学

下 册

同济大学理论力学教研室编

*

人民教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

上海新华印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 13 6/16 字数 322,000

1980 年 4 月第 1 版 1980 年 10 月第 1 次印刷

印数 1—12,000

书号 15012·0250 定价 1.10 元

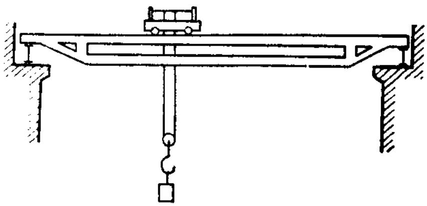
下 册 目 录

第三篇 动 力 学

第三篇　动　力　学

绪　论

在静力学中，研究了作用于物体上力系的简化与平衡条件，而没有研究力系在不满足平衡条件下物体将如何运动。运动学是从几何角度来研究物体在空间的位置随时间变化的规律，即研究物体的运动规律、速度和加速度等，而未涉及物体本身的质量和它所受的力。但是，物体运动状态的改变与它所受的力是紧密相关的。例如，图三-1 所示桥式起重机，小车在铅垂提升重物时，如重物吊在空间不动，则重物受一平衡力系作用。如欲使重物加速上升，则必须增大钢丝绳对重物的拉力，使其大于重物的重量。显然，随着钢丝绳拉力的变化，重物的运动状态也随着改变。这说明作用在物体上的力与物体的运动状态有着密切的关系。动力学就是研究物体的运动与其所受力之间的关系。


图三-1

研究动力学，不仅为了解自然界的力学现象提供必要的基础知识，而且还是许多后继课程中有关内容的基础。

随着科学技术的发展，在很多工程实际问题中，都需要动力学的知识。例如，各种机器、仪表的设计，机械振动的研究，汽车转弯时侧向稳定性的分析，以及火箭、人造卫星的发射与运行等，都与

动力学密切相关。在土建、水利工程中，提出的动力学问题也越来越多，例如，动力基础的隔振与减振，厂房结构、桥梁和水坝在动荷载作用下的振动，以及各类建筑物的抗震等。因此，掌握动力学的基本理论及其应用，对于解决工程实际问题具有十分重要的意义。

第十二章　动力学的基本定律及质点的运动微分方程

§12-1　动力学的基本定律

在动力学中，当物体的大小和形状对所研究的问题不起显著作用时，往往将物体抽象为一质点。所谓质点是指大小可以略去不计，但仍具有一定质量的物体。例如，研究地球绕太阳的运行而不涉及地球自转时，由于地球半径远小于太阳到地球的距离，可将地球当作质点。如果所研究的对象是一个物体或由几个物体组成的系统而不能抽象为一质点时，则应将该物体或物体系统视为质点系来研究。所谓质点系是指有限个或无限个质点的组合，其中各质点的位置或运动都与其他质点的位置或运动相联系。刚体是一种特殊的质点系——不变的质点系，即质点系中任意两点之间的距离保持不变。质点系的含义十分广泛，它不仅包括一个物体或物体系统，也包括变形体和流体，以至太阳系也都是质点系。质点系有时也称为机械系统，或简称系统。

从研究的对象来看，动力学可分为质点动力学和质点系动力学。我们在掌握质点动力学的规律及其研究方法的基础上，就有可能进一步地去研究质点系动力学问题。

动力学的全部理论都是以动力学的基本定律为基础的。这些定律是建立在人们长期的生产实践基础上，先后由伽利略、牛顿提出，并由牛顿综合总结而成的，所以一般称为牛顿运动定律。

（一）第一定律——惯性定律

任何质点都保持静止或匀速直线运动的状态，直到其他物体

所作用的力迫使它改变运动状态为止。

这定律表明了任何质点都有保持其静止或匀速直线运动状态的属性，这种属性称为惯性。它是物体在机械运动中的一种内在的基本属性。所以第一定律也叫做惯性定律。而质点作匀速直线运动称为惯性运动。

惯性在人们的生活和生产实践中是经常会遇到的。例如，运行的公共汽车突然刹车，站立在车厢中的人如果对扶手拉得不牢，就可能朝汽车运行的方向摔倒，这是由于惯性的缘故。又如，榔头柄松了，人们常常握住榔头柄，在工作台上铅垂向下敲几下就紧了，这是由于榔头柄突然不动，而榔头由于惯性，仍继续向下运动，于是就可以装紧了。

由惯性定律可知，如果质点运动状态发生了改变，即有了加速度，则质点必定受到不平衡力的作用。因此力是质点运动状态改变的原因。至于力和加速度之间的关系则在第二定律中阐明。

（二）第二定律——力与加速度的关系定律

质点受一力作用时所获得的加速度的大小与力的大小成正比，而与质点的质量成反比；加速度的方向与力的方向相同。

如以 $\boldsymbol{F}$ 表示作用在质点上的力，m 表示质点的质量，$\boldsymbol{a}$ 表示质点的加速度。我们只要选用适当的单位，则第二定律可用矢量式表示为

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F} \tag{12-1}$$

对于上述定律的补充，可表示为下列定律。

（三）第三定律——力的作用互不相关定律

如一质点同时受有几个力作用，则这个质点的加速度等于每个力单独作用于该质点时所获得的加速度的矢量和。

如以 m 表示质点的质量，$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、…、$\boldsymbol{F}_n$ 表示作用于该质点上的 n 个力，$\boldsymbol{a}$ 表示该质点的加速度，而 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、…、$\boldsymbol{a}_n$ 分别表示

每个力单独作用时该质点所获得的加速度，则上述定律可表示为如下的关系

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n \tag{12-2}$$

将上式两端各乘以m，则

$$m\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{a}_1+m\boldsymbol{a}_2+\cdots+m\boldsymbol{a}_n$$

而 $\boldsymbol{F}_1=m\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{F}_2=m\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{F}_n=m\boldsymbol{a}_n$，代入上式可得

$$m\boldsymbol{a}=\Sigma\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{F} \tag{12-3}$$

可见，如一质点同时受有几个力的作用，则式(12-1)中的力 $\boldsymbol{F}$ 应理解为这些力的合力，而加速度 $\boldsymbol{a}$ 应理解为这些力共同作用下质点所获得的加速度。也就是说，质点加速度的方向总是与合力的方向相同。

式(12-3)建立了质点的质量、作用于质点上的力及加速度三者之间的关系，通常称为质点动力学的基本方程。由式(12-3)可知，在一定力的作用下，质量越大的质点，加速度越小，改变它的运动状态越难，即它的惯性越大；反之，质量越小的质点，它的加速度越大，改变它的运动状态越易，即它的惯性越小。因此，质点的质量，反映了质点运动状态改变难易的内在因素，是质点惯性的度量。在古典力学中，对一定的质点来说，质量被认为是不变的量。根据相对论力学，质点的质量是随着质点的速度而改变的，但质点以普通速度运动时，把质量视为常量仍是足够准确的，只有当速度接近于光速(3×10^5km/s)时，才会有较大的差异。

若将式(12-3)写成数量形式，则

$$m=\frac{F}{a}$$

即质点的质量等于作用于该质点上合力的大小与其加速度大小之比值。

当质量为m的质点在近地面处的真空中自由下落时（图

12-1)，该质点只受重力 $\boldsymbol{W}$ 作用，而质点的加速度就是重力加速度 $\boldsymbol{g}$（g 的数值一般取为 9.80m/s²，且视为常量。实际上在不同的地区有不同的 g 值。关于 g 随纬度改变的关系可见第十八章）。根据 $m=\dfrac{F}{a}$，可得

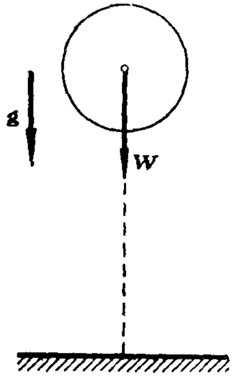


图 12-1

$$m=\frac{W}{g} \tag{12-4}$$

可见，质点的质量等于质点的重量除以重力加速度的大小。由于质点的重量容易测定，所以常根据式(12-4)从重量来计算质量。但决不应该把质量和重量这两个不同的概念混淆起来。质量是质点惯性的度量，而重量是质点所受重力的大小。在地面上不同之处，重力加速度的大小 g 并不相同，相应地同一质点在地面上不同之处的重量 W 也不相等。但同一质点的重量与就地重力加速度大小的比值则不变，即质点的质量是一个常量。

在力学中有许多物理量，各个物理量之间一般都有一定的联系。为了以适当的单位来度量每个物理量，我们选定几个物理量作为基本量，它们相应的单位即为基本单位；而其他各物理量可根据定义或定律从基本量导出，称为导出量，其相应的单位即为导出单位。

导出量都可用几个基本量按某种组合表示出来。一个物理量如何以基本量表示的式子称为量纲。不同的单位制所选取的基本量是不同的。在国际单位制(SI)中，取质量、长度和时间作为基本量，它们的基本单位分别为千克(kg)、米(m)和秒(s)。如以 $[M]$、$[L]$、$[T]$ 依次表示质量、长度、时间这三个基本量的量纲，则由式(12-1)可知力（导出量）的量纲为

$$[力]=[质量][加速度]=[M][L][T]^{-2}$$

其单位为千克·米/秒^2(kg·m/s^2)。力的这种单位称为牛顿(N)，即质量为 1kg 的质点，产生 1m/s^2 的加速度所需作用力的大小就是 1N。据此，不难得出质量为 1kg 的质点的重量为

$$W=mg=1\,\text{kg}\times 9.80\text{m/s}^2=9.80\,\text{N}$$

目前，在工程中，还有采用工程单位制，它是以力、长度和时间作为基本量的，基本单位分别是公斤(kg)、米(m)和秒(s)。如以$[F]$、$[L]$、$[T]$依次表示力、长度、时间这三个基本量的量纲，则由式(12-1)可知质量(导出量)的量纲为

$$质量=\frac{[力]}{[加速度]}=[F][L]^{-1}[T]^2$$

其单位为$\frac{公斤·秒^2}{米}$(kg·s^2/m)。质量的这种单位称为工程单位质量。例如，1kg 重的质点，其质量为

$$m=\frac{W}{g}=\frac{1}{9.80}=0.1020\,\text{kg·s}^2/\text{m}=0.1020\ 工程单位质量$$

工程单位制和国际单位制可以互相换算，因为 1kg 质量的物体在北纬 45°的海平面处的重量也称为 1kg，故在工程单位制中 1kg 的力，相当于国际单位制9.80N的力。关于国际单位制和工程单位制有关力学部分的换算关系，可参考本书上册附录 I。

(四) 第四定律——作用与反作用定律

两物体间相互作用的力总是大小相等，方向相反，沿同一直线，并分别作用在这两个物体上。

这个定律在静力学中已讲过，它不仅适用于平衡的物体，对于作任何运动的物体也同样是正确的。这个定律对研究质点系动力学问题具有特别重要的意义。因为第二定律只应用于单个质点，而第四定律则给出了质点系中各质点间相互作用的关系，从而使我们能将质点动力学的原理推广，用来研究质点系动力学问题。

上述动力学的基本定律，也就是古典力学的基础。

在动力学基本定律中，涉及到速度、加速度等运动学的概念，而描述运动必须确定一参考系。那么动力学基本定律(主要是第一、二、三定律)所用的是怎样的参考系呢？所谓的时间有否特殊的要求呢？

牛顿假想宇宙间存在着与物质运动无关的所谓“绝对空间”和绝对静止的坐标系，并且存在着与坐标系运动无关的所谓“绝对时间”，而基本定律是在“绝对空间”和“绝对时间”的前提下才成立的。从辩证唯物主义的观点来看，时间、空间是物质运动存在的形式，脱离物质运动的绝对时间和绝对空间是不存在的，宇宙间找不到任何绝对静止的空间，而时间是和坐标系的运动有关的。这种观点已为近代物理学的成就所证实。这样是否以基本定律为基础的古典力学就不适用了呢？事实上，这些基本定律是根据人们长期生产实践总结而成的，它反映着机械运动在一定范围内的客观规律。如果我们选定的参考坐标系中，应用基本定律所得到的结果在要求的精确范围内，符合客观实践，则认为这坐标系是“静止”的，这样的坐标系称为惯性坐标系。实践证明，在大多数工程问题中，把固结于地球或相对于地球作匀速直线运动的坐标系，作为惯性坐标系，应用基本定律所反映的客观规律是足够精确的。今后如没有特别说明，就把固结于地球上的坐标系作为惯性坐标系。在某些需要考虑地球自转影响的问题中，惯性坐标系的坐标原点可取在地心，而三轴则分别指向三个恒星。

必须指出，古典力学的适用范围不仅在于选择怎样的坐标系，而且要注意它只适用于研究速度远小于光速的宏观物体。但在一般工程问题中，所遇到的机械运动大多数是宏观物体，且其速度远小于光速，应用古典力学能足够精确地反映物质运动的规律。因此，古典力学在近代工程技术中，仍占有很重要的地位。

思 考 题

(1) 质点的运动方向(即速度方向)是否一定与作用在质点上的合力方向相同?

(2) 以方向不变的水平力 $\boldsymbol{F}$ 推一质量为 m 的小车沿水平直线轨道运行,不计任何阻力,当力 $\boldsymbol{F}$ 的大小按每隔相等的时间突然减小一半的规律而变化时,问该小车是越走越快还是越走越慢? 为什么?

(3) 质点作曲线运动时,能否不受任何力?

(4) 在作匀速直线运动的火车车厢上,用细绳悬挂一小球,当火车的运动发生下列改变时,小球的位置将如何改变?

(a) 火车的速度增加; (b)火车的速度减小; (c)火车向左转弯。

§ 12-2 质点的运动微分方程

设质量为 m 的质点在 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$、…、$\boldsymbol{F}_n$ 等力共同作用下所获得的加速度为 $\boldsymbol{a}$。由第三定律给出了质点动力学的基本方程

$$m\boldsymbol{a} = \Sigma \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}$$

取直角坐标系 $Oxyz$ 为惯性坐标系。以 $\boldsymbol{v}$ 表示质点 M 的速度,$\boldsymbol{r}$ 表示质点对坐标原点 O 的矢径(图 12-2)。因

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$$

所以式(12-3)可写成

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \Sigma \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F} \quad (12\text{-}5)$$

这就是以矢量形式表示的质点的运动微分方程。将式(12-5)投影到直角坐标轴上,得

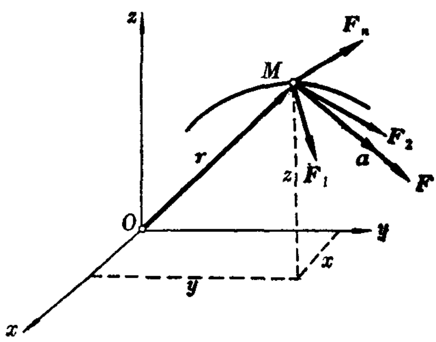


图 12-2

$$
\left.\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= \Sigma X_i = X \\
m\frac{d^2y}{dt^2} &= \Sigma Y_i = Y \\
m\frac{d^2z}{dt^2} &= \Sigma Z_i = Z
\end{aligned}\right\} \tag{12-6}
$$

这就是以直角坐标形式表示的质点的运动微分方程。式中 x、y、z 为质点M的坐标，ΣX_i、ΣY_i、ΣZ_i 分别为 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、…、$\boldsymbol{F}_n$ 各力在相应坐标轴上投影的代数和，即等于合力 $\boldsymbol{F}$ 在相应坐标轴上的投影 X、Y、Z。

如质点M作平面曲线运动，取该平面为 Oxy，则式（12-6）成为

$$
\left.\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= \Sigma X_i = X \\
m\frac{d^2y}{dt^2} &= \Sigma Y_i = Y \\
0 &= \Sigma Z_i = Z
\end{aligned}\right\} \tag{12-7}
$$

如质点M作直线运动，取 x 轴沿其运动轨迹，则式（12-6）成为

$$
\left.\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= \Sigma X_i = X \\
0 &= \Sigma Y_i = Y \\
0 &= \Sigma Z_i = Z
\end{aligned}\right\} \tag{12-8}
$$

如将式（12-5）投影到M点的自然轴系上的切线、主法线和副法线，则得

$$
\left.\begin{aligned}
ma_\tau &= \Sigma F_{i\tau} = F_\tau \\
ma_n &= \Sigma F_{in} = F_n \\
ma_b &= \Sigma F_{ib} = F_b
\end{aligned}\right\} \tag{12-9}
$$

式中，$\Sigma F_{i\tau}$、ΣF_{in}、ΣF_{ib} 分别为 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、…、$\boldsymbol{F}_n$ 各力在切线、主法

线和副法线上投影的代数和，即合力 $\boldsymbol{F}$ 在切线、主法线和副法线上的投影 F_τ、F_n、F_b。a_τ、a_n、a_b 分别为加速度 $\boldsymbol{a}$ 在切线、主法线和副法线上的投影。由运动学知

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$a_b = 0$$

代入式(12-9)，得

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2 s}{dt^2} &= \Sigma F_{i\tau} = F_\tau \\ m\frac{v^2}{\rho} &= \Sigma F_{in} = F_n \\ 0 &= \Sigma F_{ib} = F_b \end{aligned}\right\} \qquad (12\text{-}10)$$

这就是以自然坐标形式表示的质点的运动微分方程。$\Sigma F_{ib} = 0$ 表明作用在质点上的合力 $\boldsymbol{F}$ 是在动点轨迹的密切面内。

§12-3 质点动力学的两类问题

质点的运动微分方程，可用来解决质点动力学的两类基本问题：

(1) 已知质点的运动，求作用于质点上的力。

(2) 已知作用于质点上的力，求质点的运动。

此外，还有些问题是第一与第二类问题的综合。在具体解题时，式(12-6)是一般的常用形式，而式(12-10)通常用于质点运动轨迹为已知的情况。

(一) 已知运动求力

这类问题一般说来是比较简单的，因为如已知质量为m的质点的加速度 $\boldsymbol{a}$，则由式(12-3)可求出作用于该质点上的合力；如已