21世纪信息通信系列教材

现代信号处理导论

XIANDAI XINHAO CHULI DAOLUN

陆传赉 编著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

现代信号处理导论

陆传赉　编著

北京邮电大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本书内容包括信号的参数估计理论、波形估计(即维纳滤波与卡尔曼滤波)、现代功率谱估计、自适应滤波、非平稳信号分析初步、小波分析初步及信号的统计性能分析初步等.

本书可作为通信与电子系统、信号与信息处理、信息科学与信息工程、生物医学工程以及应用数学等专业的研究生教材或主要参考书,也可作为大学高年级选修课的教材以及广大科研、工程人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

现代信号处理导论/陆传赉编著 . —北京:北京邮电大学出版社,2002

ISBN 7-5635-0588-1

Ⅰ. 现...　Ⅱ. 陆...　Ⅲ. 信号处理　Ⅳ. TN911.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 106625 号

出 版 者: 北京邮电大学出版社(北京市海淀区西土城路 10 号)邮编:100876
发行部电话/传真:(010)62282185/62283578

经　　销: 各地新华书店

印　　刷: 北京源海印刷有限责任公司

开　　本: 850 mm × 1 168 mm　1/32

印　　张: 11

字　　数: 283 千字

印　　数: 1—3 000 册

版　　次: 2003 年 2 月第 1 版　2003 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 7-5635-0588-1/O·36　　定价:18.00 元

如有印装质量问题请与北京邮电大学出版社发行部联系

前　言

目前,国内已有多部关于现代信号处理的论著出版,有的是作者十几年甚至几十年科研、教学之结晶,内容很详尽,也很先进,但专业性较强,使初学者望而生畏;有的侧重点不同,不同专业的学生学习时对某些章节感到很困难.本人在多年讲授随机信号处理课程的基础上,结合学生的感受并与之交流,萌生出一个想法——编写一部较为浅显并精练的教材以适合研究生或本科高年级中初学者的需求,使得读者只要具备高等代数、概率论和信号处理等先行知识就能自学.幸好,这个想法得到北京邮电大学信息工程学院院长郭军教授的大力支持,并且得到学院的资助;同时也得到北京邮电大学出版社的帮助,使得本书得以顺利出版.在此,谨向支持本书出版的郭军教授以及信息工程学院的其他领导、出版社的领导及责任编辑表示深深的谢意.

本书内容包括信号的参数估计理论、波形估计(即维纳滤波与卡尔曼滤波)、现代功率谱估计、自适应滤波、非平稳信号分析初步、小波分析初步以及信号的统计性能分析初步等.

本书取材精练,概念清晰,叙述由浅入深,循序渐进,充分反映了现代先进的信号处理技术与理论.书中前四章内容比较丰富,不仅有许多例题印证所述理论,且附有大量习题供学生练习,后几章则简练些,是为拓宽学生的知识面而编写的.

本书可作为通信与电子系统、信号与信息处理、信息科学与信息工程、生物医学工程、自动控制,以及应用数学等专业的研究生

教材或教学参考书,也可作为本科高年级选修课的教材以及广大科研、工程技术人员的参考书.

限于作者水平,难免有疏漏与不当之处,恳请广大读者提出批评和建议,以便更正.

作　者

2002年于北京邮电大学

目　　录

第1章　信号的参数估计

1.1　估计量及其性质

设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)$，其中 x 是随机变量 X 的观测值；θ 为未知参数，$\theta\in\Omega$；此处 Ω 称为参数空间．例如，随机变量 $X\sim b(n,p)$，参数 $p\in\Omega=(0,1)$；若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中，μ,σ 均为参数，而 $\Omega=\{(\mu,\sigma):-\infty<\mu<+\infty,0<\sigma<+\infty\}$．

定义 1.1.1　设总体 X 的分布函数 $F(x;\theta)$ 中参数 θ 未知，$\theta\in\Omega$；又 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的 n 个样本，若某个不含未知参数 θ 且是 n 个样本的函数 $T(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 可用来估计参数 θ，则称该样本函数 $T(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 θ 的一个估计量，记为 $\hat{\theta}=T(X_1,X_2,\cdots,X_n)$．若 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 n 个样本的一次观测值（或实现），则称 $T(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 θ 的一个估计值．用 $\hat{\theta}$ 去估计参数 θ 的方法称为点估计．

一般地，参数 θ 的估计量 $\hat{\theta}$ 具有下述性质．

1. 无偏性

定义 1.1.2　若对一切 n 及 $\theta\in\Omega$，$\hat{\theta}=T(X_1,\cdots,X_n)$ 是参数 θ 的一个估计量，且

$$E\hat{\theta}=\theta \tag{1.1.1}$$

成立，则称 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的一个无偏估计量．

一般地，称

$$E\hat{\theta}-\theta=b(n) \tag{1.1.2}$$

为估计量 $\hat{\theta}$ 与 θ 的平均偏差．当 $b(n)\neq0$ 时，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的有偏估

计量.如果

$$\lim_{n\to\infty} b(n)=0 \tag{1.1.3}$$

则称$\hat{\theta}$为θ的渐近无偏估计量.

对于参数θ的任一实值函数$g(\theta)$,如果存在$g(\theta)$的一个无偏估计量$T \overset{\text{def}}{=} T(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,使得

$$ET=g(\theta) \tag{1.1.4}$$

则称$g(\theta)$是一个可估计函数.

例 1.1.1 设总体X的方差$DX=\sigma^2<\infty$,显然$EX<\infty$.若样本均值$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$是参数$\mu=EX$的一个估计量,则因$E\overline{X}=EX=\mu$,故$\overline{X}$是$\mu$的一个无偏估计量.

再考察样本的方差$S^{*2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$.设它是参数$\sigma^2$的一个估计量,则因

$$\begin{aligned}ES^{*2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E[(X_i-\mu)+(\mu-\overline{X})]^2=\\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)^2-E(\overline{X}-\mu)^2=\\ \sigma^2-D\overline{X}=\sigma^2-\frac{\sigma^2}{n}=\frac{n-1}{n}\sigma^2\neq\sigma^2\end{aligned} \tag{1.1.5}$$

所以,S^{*2}不是总体方差σ^2的无偏估计量.但是它恰是σ^2的一个渐近无偏估计量.若记

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{n}{n-1}S^{*2} \tag{1.1.6}$$

则必有

$$ES^2=\sigma^2 \tag{1.1.7}$$

故S^2是σ^2的一个无偏估计量.

由上例可见,当$E\hat{\theta}=\theta$时(例中$\hat{\theta}=\overline{X}$,$\theta=EX$),不一定有$E[g(\hat{\theta})]=g(\theta)$,即当$\hat{\theta}$是$\theta$的无偏估计量时,$g(\hat{\theta})$不一定是$g(\theta)$的无偏估计量.

已知 $\overline{X}$ 是 $\theta = EX$ 的一个无偏估计量，现令 $\alpha_i > 0, 1 \leqslant i \leqslant n$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$，则易证估计量 $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ 也是 $\theta = EX$ 的一个无偏估计量. 那么，这两个 θ 的无偏估计量哪一个更好一些呢？于是可引入下述的概念.

2. 有效性(或优效性)

定义 1.1.3 设 $T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是可估计函数 $g(\theta)$ 的无偏估计量，若对 $g(\theta)$ 的任一无偏估计量 $T'(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 均有

$$D_\theta(T) \leqslant D_\theta(T'), \qquad \text{对一切 } \theta \in \Omega \tag{1.1.8}$$

则称 $T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 $g(\theta)$ 的最小方差无偏估计量，并简称为最有(优)效无偏估计量. 令

$$H = \{ T \mid E_\theta T = \theta, D_\theta T < \infty, \text{对一切 } \theta \in \Omega \} \tag{1.1.9}$$

即 H 为方差有限的参数 θ 的无偏估计量全体的集合. 并记

$$H_0 = \{ T_0 \mid E_\theta(T_0) = 0, D_\theta(T_0) < \infty, \text{对一切 } \theta \in \Omega \} \tag{1.1.10}$$

即 H_0 为具有零均值、有限方差的参数 θ 的估计量全体的集合. 下面不加证明地介绍它们的若干性质.

性质 1 若 H 非空，$T \in H$，则 T 为 θ 的最有效无偏估计量的充要条件是对每一个 $T_0 \in H_0$，有

$$E_\theta(T T_0) = 0, \qquad \theta \in \Omega \tag{1.1.11}$$

即 T 与 T_0 正交或 $T \perp T_0$.

性质 2 若 T_1, T_2 各为参数 θ 的可估计函数 $g_1(\theta), g_2(\theta)$ 的最有效无偏估计量，则对任意常数 α_1, α_2，$\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2$ 必是 $\alpha_1 g_1(\theta) + \alpha_2 g_2(\theta)$ 的最有效无偏估计量.

性质 3 依概率 1 保证参数 $\theta(\theta \in \Omega)$ 的最有学无偏估计量存在且惟一.

例 1.1.2 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，参数 μ, σ^2 未知，试求 μ, σ^2 的最有效无偏估计量.

解 记 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 X 的 n 个样本,已知 $\overline{X}, S^2$ 各为 μ, σ^2 的无偏估计量,那么它们是否为最有效无偏估计量? 即验证式(1.1.11)是否成立.

设 $T_0 \in H_0$,则 $ET_0 = 0$,即

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} T_0(x_1, \cdots, x_n) \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right\} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = 0 \tag{1.1.12}$$

将上式对 μ 求导,则有

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} T_0(x_1, \cdots, x_n)\left[\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)\right] \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right\} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = 0$$

上式消去非零因子,并利用(1.1.12)可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} T_0(x_1, \cdots, x_n)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right\} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = 0 \tag{1.1.13}$$

此即

$$E(T_0 \overline{X}) = 0$$

故由性质 1 可知,$\overline{X}$ 是 μ 的最有效无偏估计量.

进一步,将式(1.1.12)两边对 μ 求导两次,并利用式(1.1.12)整理得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} T_0(x_1, \cdots, x_n)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right\} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = 0 \tag{1.1.14}$$

同理,将式(1.1.12)对 σ^2 求导可得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}T_0(x_1,\cdots,x_n)\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]\cdot$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=0 \quad (1.1.15)$$

注意到

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\mu\right)^2$$

将此式代入式(1.1.15),并由式(1.1.12)~(1.1.14)可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}T_0(x_1,\cdots,x_n)\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\right]\cdot$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=0 \quad (1.1.16)$$

因为 $nS^{*2}=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是 $(n-1)\sigma^2$ 的无偏估计量,由性质1知 nS^{*2} 是 $(n-1)\sigma^2$ 的最有效无偏估计量;再由性质2知 $S^2=\frac{n}{n-1}S^{*2}$ 是参数 σ^2 的最有效无偏估计量.

定义 1.1.4 (1) 若参数 θ 的估计量 $T(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 可写为

$$T(X_1,X_2,\cdots,X_n)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iX_i$$

其中 $\alpha_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 为常数,则称 T 是样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的线性函数.

(2) 若可估计函数 $g(\theta)$ 的估计量 $T(X_1,\cdots,X_n)$ 满足如下条件:

(2.1) T 是样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的线性函数;

(2.2) $E_\theta[T(X_1,\cdots,X_n)]=g(\theta)$;

(2.3) 对满足(2.1),(2.2)的任一估计量 $T'(X_1,\cdots,X_n)$ 及对一切 $\theta\in\Omega$,均有

$$D_\theta(T)\leqslant D_\theta(T') \quad (1.1.17)$$

则称 $T(X_1,\cdots,X_n)$是 $g(\theta)$的最小方差线性无偏估计量.

设 $T_1,T_2,\cdots,T_m$ 是可估计函数$g(\theta)$的 m 个相互独立的线性无偏估计量,且 $D_\theta(T_i)=\sigma^2<\infty\ (1\leqslant i\leqslant m)$,则 $\overline{T}=\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}T_i$ 是 $T_1,\cdots,T_m$ 的线性组合类中可估计函数$g(\theta)$ 的最小方差线性无偏估计量,并且 $D_\theta(\overline{T})=\dfrac{\sigma^2}{m}$.

事实上,记 $T=\sum\limits_{i=1}^{m}b_iT_i+b_0$,其中 $b_i(0\leqslant i\leqslant m)$为常数.下面,考察在什么条件下,$T$是$g(\theta)$的最小方差线性无偏估计量.令

$$g(\theta)=E_\theta(T)=g(\theta)\sum_{i=1}^{n}b_i+b_0$$

显然,只需要 $b_0=0$及$\sum\limits_{i=1}^{m}b_i=1$即可.再考察 T 的方差

$$D_\theta(T)=\sum_{i=1}^{m}b_i^2DT_i=\sigma^2\sum_{i=1}^{m}b_i^2$$

欲使 $D_\theta(T)$在约束条件 $\sum\limits_{i=1}^{m}b_i=1$下达到极小值,只要让函数

$$\varphi(\alpha)=\sigma^2\Big(\sum_{i=1}^{m}b_i^2\Big)-\alpha\Big(\sum_{i=1}^{m}b_i-1\Big)$$

对各 $b_i(1\leqslant i\leqslant m)$求偏导后等于零,即

$$\frac{\partial\varphi(\alpha)}{\partial b_i}=0,\qquad 1\leqslant i\leqslant m$$

可以得到

$$b_i=\frac{\alpha}{2\sigma^2},\qquad 1\leqslant i\leqslant m$$

再由约束条件$\sum\limits_{i=1}^{m}b_i=1$,可求得 $\alpha=\dfrac{2\sigma^2}{m}$,并且 $b_i=\dfrac{1}{m}$.由此可知,当 $b_i=\dfrac{1}{m}$ 时,$D_\theta(T)$ 达到极小值.故此时 $\overline{T}=\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}T_i$ 是 T_1,

$T_2, \cdots, T_m$ 的线性组合类中 $g(\theta)$ 的最小方差线性无偏估计，且 $D_\theta(\overline{T}) = \dfrac{\sigma^2}{m}$.

由上述容易验证样本均值 $\overline{X}$ 是 $\mu = EX$ 的最小方差线性无偏估计量. 人们常称最小方差线性无偏估计为最优线性无偏估计.

为了给出无偏估计类中方差的下界，下面介绍罗-克拉梅(Rao-Cramer)不等式.

命题 1.1.1 (罗-克拉梅不等式)

设总体 X 是一个连续型随机变量，其分布密度 $f(x;\theta)$ 是未知的，其中参数 $\theta \in \Omega$. 又 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 X 的 n 个样本，而 $T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是可估计函数 $g(\theta)$ 的一个无偏估计量，并且满足下述条件：

(1) $I(\theta) = E\left[\dfrac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)\right]^2 > 0$;

(2) 存在偏导数 $\dfrac{\partial}{\partial\theta}f(x;\theta)$，并且

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)\right]\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)\right]\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

(3) 存在偏导数 $\dfrac{\partial}{\partial\theta}g(\theta)$，并且

$$\frac{\partial}{\partial\theta}g(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}T(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)\right]\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

那么就有

$$D(T) \geqslant \frac{1}{nI(\theta)}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}g(\theta)\right]^2 \tag{1.1.18}$$

特别地，当 $g(\theta) = \theta$ 时，有

$$D(T) \geqslant \frac{1}{nI(\theta)} \tag{1.1.19}$$