初等极值问题

程 龙

CHUDENG
JIZHI
WENTI

海教育出版社

中学生文库

初等极值问题

程龙

上海教育出版社

中学生文库　　**初等极值问题**

程　　龙　　上海教育出版社出版
（上海永福路123号）

江苏启东印刷厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本 787×1092 1/32　印张 4.75　字数 99,000

1984年7月第1版　1986年8月第3次印刷

印数 59,101—99,100本

统一书号：7150·3145　　定价：0.56元

目录 ZHONG XUE SHENG WENKU

一、什么是“极值问题”

相传古代 Tyre 的 Phoeinicíau 城的公主 Dido，离开了自己的家园来到北非的地中海沿岸．她和当地的部落商议：付给一笔固定的金额，以换取一张公牛皮能围住的土地，准备定居在那里．一块公牛皮能围住多大的土地呢？于是，当地部落答应了．聪明的 Dido 想出了一个巧妙的办法，她把公牛皮切成很细很细的条，再把这些细条结成一条长长的细牛皮条，就用这根牛皮条在海岸边围出了意想不到的大块土地．相传这片土地是一个半圆形，其直径在海岸线（近似可看作直线），不需用牛皮条来围；牛皮条的总长就是这个半圆的弧长．

数学中，可以证明：在这种情况下，依照 Dido 的办法围得的土地，可算是面积最大的了（参见本书第 74 页）．

上述希腊神话，说的是求一个使面积达到最大的图形．另外，诸如给出一定材料，造一个容器，使之容积最大；完成一项工程，使全部花费最小，等等，可以想象，此类问题在生活以及生产上是很多的，且是有意义的．这些问题经过数学抽象，就归结为一定条件下求一个量的极大或极小问题，这就是数学中的所谓极值问题，它在整个数学中占了相当重要的一席位子．

这里所说的求一个量的极大或是极小，这个量可以是通

过一个公式用其他量来表示的，例如函数的极值；也可以是几何的量，其中甚至还可以是没有用到度量而只凭几何公理来比较大小的(例如三角形的二边之和大于第三边)．下面以函数极值为例，来介绍一下极值问题的表述形式以及分类.

对于一元实函数 $y=f(x)$，设 x_0 是它的定义域中的一个点，如果存在一个正数 δ，使点 x_0 的 δ 邻域(即开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$)仍在其定义域中，当对这一邻域中的一切 x，均有

$$f(x)\geqslant f(x_0), \quad 其中\ x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$$

则称 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的一个极小值，x_0 称为 $f(x)$ 的一个极小点。

完全同样地，如果有

$$f(x)\leqslant f(x_0), \quad 其中\ x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$$

则称 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的一个极大值，x_0 称为 $f(x)$ 的一个极大点。

极大值和极小值统称极值，极大点和极小点统称极值点。

如果结合函数的图象来考察，由极值的定义不难理解，在函数的极小(极大)点处，必相应于图象上的波谷(波峰).

上述定义中，由于不等号只是在 x_0 的一个邻域里成立，从而函数的极小(大)值只是在 x_0 附近的一个局部范围内函数 $f(x)$ 的最小(大)值，函数 $f(x)$ 在其定义域里完全可能存在多个极值，也可能某个极大值小于某一极小值(从函数的图象上也可看出这一点)．因此，这里所说的极值，又叫做局部极值，或叫做相对极值.

对于定义在区间 $[a, b]$ 上的一元实函数 $y=f(x)$，设 $x_0\in[a, b]$，当对一切 $x\in[a, b]$ 均有

$$f(x) \geqslant f(x_0)$$

时，就称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值，记作 $f_{\min}$.

完全同样地，如果有

$$f(x) \leqslant f(x_0),$$

就称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值，记作 $f_{\max}$.

这里，函数 $f(x)$ 在其定义域 $[a, b]$ 上的最小(大)值，是在整个区间上函数值中的最小(大)者，因而又把最小(大)值称作全局极值，或绝对极值(有时也简称为极值).

如果 $f(x)$ 是定义在闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数，可以证明，$f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最小(大)值可能是某一局部极值，也可能是在端点的函数值. 从而有

$$f_{\min} = \min[f(a), f(b), f(x_1), \cdots, f(x_n)],$$
$$f_{\max} = \max[f(a), f(b), f(x_1), \cdots, f(x_n)],$$

其中 x_1、x_2、$\cdots$、x_n 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的所有极值点.

上述关于一元函数极值的概念，可以类似地推广到多元函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的情形：对于定义在区域 D 上的函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，设 $X_0 \in D$，如存在 X_0 的一个 $\delta > 0$ 的邻域 $O(X_0, \delta)$，当对一切 $X \in O(X_0, \delta)$ 均有

$$f(X) \geqslant f(X_0) \quad (f(X) \leqslant f(X_0))$$

时，就称 $f(X_0)$ 是 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的一个极小(大)值，点 X_0 称为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的一个极小(大)点.

如对一切 $X \in D$，均有

$$f(X) \geqslant f(X_0) \quad (f(X) \leqslant f(X_0))$$

时，就称 $f(X_0)$ 是 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在 D 上的最小(大)值.

进一步，还讨论在 x_1、x_2、$\cdots$、x_n 满足条件

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0, \\ \vdots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0 \end{cases} \tag{1}$$

下，求出变量 x_i(这里 $i=1, 2, \cdots, n$)的一组值，使函数

$$L=f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{2}$$

取得最小值或最大值．也就是说，如果 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 满足条件(1)，且对满足条件(1)的一切$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，均有

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geqslant f(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0),$$

或是

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leqslant f(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0),$$

则分别称 $f(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 为函数 $L=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在条件 (1) 下的极小值和极大值．这种极值称为条件极值，条件(1)中的等号也可以部分或全部改为不等号，并称为约束条件，而函数式(2)则称为目标函数．

除了上述有关函数的极值外，还有几何中的极值，泛函的极值，等等．在形形式式的极值问题中，有的只须运用初等几何知识就可解决，有的要用到代数的知识，有的要用到微积分知识，还有的则是变分法、规划论、组合数学中的课题．本书主要介绍初等极值问题，即仅限于使用初等数学以及初等微积分的知识所能解决的那些极值问题，以作为广大中学生学习数学的一种补充．

极值问题的研究，有着悠久的历史．早在古希腊时，就研究了等周问题．在欧几里得的名著《几何原本》中，实际上已证明了如下的极值问题：具有相同周长的矩形中，以正方形的面积为最大．据传亚历山大城的 Zenodorus(约公元前 200

～100 年之间)曾写过一本关于等周图形的书，书中证明了如下定理：

1．周长相等的 n 边形中，以正 n 边形面积最大；

2．周长相等的正多边形中，边数愈多的正多边形的面积愈大；

3．圆的面积比同样周长的正多边形的面积大；

4．表面积相等的所有立体中，以球的体积为最大．

就几乎在出现函数概念的同时，函数极值的问题就被提出来了．运用微分的方法寻求一个函数的最大值或是最小值，这是德国人开普勒开创的．1615 年，开普勒在测量酒桶体积的问题时，证明了内接于球面的具有正方形底面的平行六面体中，以立方体的容积最大．1638 年，法国人费马用微分的方法证明了在周长一定的矩形中，以正方形的面积为最大．

1630 年，意大利人伽利略提出了著名的最速降线问题：设 A、B 是不在同一铅直线上的两个点，一质点 M 在重力作用下以最短的时间自 A 点运动到达 B 点，质点所通过的路径该是什么曲线？伽利略在 1638 年时得出了一个错误的解答，他误认为应是圆弧．到了 1696 年，著名数学家约翰·伯努利重新提出最速降线问题，并得出正确的解答应是从 A 到 B 的一段上凹的旋轮线(参见本书第 134 页)．这一问题导致了变分学的发展，使人们开始了对泛函极值的研究．

本世纪四十年代以来，又开始了运筹、规划和管理等方面的研究，出现了规划论、对策论等崭新形式的极值问题，所用到的方法已远远超出代数、几何和初等微积分，这些已不属本书的课题了．

二、无约束的代数极值问题

1. 适用于二次函数的方法

确定二次函数 $y=ax^2+bx+c$（其中 $a\neq 0$）的最大值与最小值，有一般方法可循．即有下述结论：

定理1 对于定义在$(-\infty,\infty)$上的二次函数 $y=ax^2+bx+c$（其中 $a\neq 0$）．如果 $a>0$，则当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，有最小值 $y_{\min}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，但这函数没有最大值；如果 $a<0$，则当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，有最大值 $y_{\max}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，但这函数没有最小值．

证明 对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$，运用配方法，有

$$y=a\left[x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

如果 $a>0$，由于 $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ 对任何 x 值恒不小于零，即有 $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\geqslant 0$，当且仅当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时 $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ 才等于零，所以这时 y 达到最小值，且 $y_{\min}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$．同时，当 x 的绝对值无限增大时，函数值也无限增大，因此这时函数没有最大值．

如果 $a<0$，这时有 $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\leqslant 0$，因此当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时函数达到最大值，即 $y_{\max}=\frac{4ac-b^2}{4a}$. 显然，这时函数没有最小值.

结合二次函数的图象，可以对定理 1 有一个直观的认识. 事实上，二次函数 $y=ax^2+bx+c$（其中 $a\neq 0$）的图象是一条抛物线，其顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. 当 $a>0$ 时，抛物线张口向上（图 2-1(i)），抛物线的顶点就是整个曲线的最低点，所以顶点的纵坐标就是函数的最小值，而抛物线向上无限延伸，显然函数没有最大值；当 $a<0$ 时，抛物线张口向下（图 2-1(ii)），抛物线的顶点就是曲线的最高点，所以顶点纵坐标就是函数的最大值，而抛物线向下无限延伸，所以函数没有最小值.

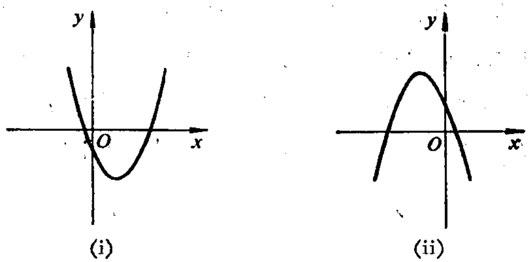

图 2-1

定理 1 给解决二次函数的极值问题提供了一个十分有效的方法.

[例 1] 试确定函数 $y=x^2-4x+5$ 的最大值与最小值.

解 由于这里 $a=1>0$，根据定理 1 可知函数有最小值而没有最大值. 且当 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2}=2$ 时，有最小值：

$$y_{min}=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\cdot 1.5-(-4)^2}{4\cdot 1}=1.$$

进而，我们来讨论定义在某一个闭区间 $[p, q]$ 上的二次函数的极值.

这和定理1讨论的情况略有不同. 例如，求例1的二次函数 $y=x^2-4x+5$ 分别在闭区间 $[0, 3]$ 以及闭区间 $[-1, 1]$ 内的最大值和最小值. 为了说明这类问题的一般解法，我们来作出它的图象.

i. 在闭区间 $[0, 3]$ 内的 $y=x^2-4x+5$ 的图象，是图 2-2(i) 中抛物线的实线部分. 不难看出，图象的最低点是抛物线的顶点，最高点是抛物线段的一个端点. 因此得到：当 $x=-\frac{b}{2a}=2$ 时，有 $y_{min}=1$；当 $x=0$ 时，有 $y_{max}=5$.

ii. 在闭区间 $[-1, 1]$ 内的 $y=x^2-4x+5$ 的图象是图 2-2(ii) 中抛物线的实线部分. 这时抛物线的顶点不在区间 $[-1, 1]$ 内，而这时图象的最高点是端点 A，最低点是端点 B. 因此，当 $x=1$ 时有 $y_{min}=2$；当 $x=-1$ 时有 $y_{max}=10$.

从这个例子使我们看出，定义在闭区间上的二次函数既

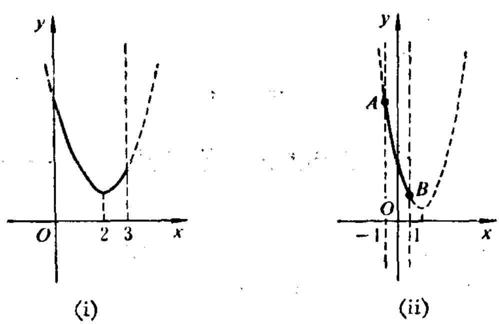

图 2-2

有最大值，也有最小值．而且它的最大值与最小值是在抛物线的顶点或端点处达到．一般说来，我们有

定理 2 定义在闭区间 $[p, q]$ 上的二次函数 $y=f(x)=ax^2+bx+c$（其中 $a\neq 0$）存在最大值与最小值．

i．当 $a>0$ 时，如果 $-\frac{b}{2a}\in[p, q]$，则当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，有 $y_{\min}=\frac{4ac-b^2}{4a}$；而 $y_{\max}=\max(f(p), f(q))$❶．

如果 $-\frac{b}{2a}\notin[p, q]$，则 $y_{\min}=\min(f(p), f(q))$；$y_{\max}=\max(f(p), f(q))$．

ii．当 $a<0$ 时，如果 $-\frac{b}{2a}\in[p, q]$，则当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，有 $y_{\max}=\frac{4ac-b^2}{4a}$；而 $y_{\min}=\min(f(p), f(q))$．

如果 $-\frac{b}{2a}\notin[p, q]$，则 $y_{\min}=\min(f(p), f(q))$；$y_{\max}=\max(f(p), f(q))$．

［例 2］ 在矩形 $ABCD$ 中，已知 $AB=16$，$BC=18$．矩形内有 $\odot O$ 与 $\odot O'$ 互相外切，且 $\odot O$ 与 AB、BC 两边相切，$\odot O'$ 与 AD、CD 两边相切（图 2-3）．试求此两圆面积和的最大值与最小值．

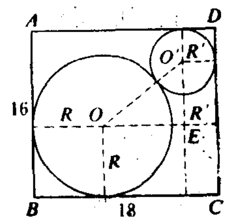

图 2-3

分析 注意到两个圆是在矩形内变化，如一个圆变大，则另一个圆就变小．当 $\odot O$ 变大时，其半径总不能大于 8（即矩形较短边 AB 的一半）；当 $\odot O$ 变小时，其半径总大于 0（因边角处总还可以

---

❶ 记号 $\max(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是表示数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中最大的那个数；记号 $\min(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是表示数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中最小的那个数．

画一个圆)．因此，要解决本问题，首先必须考察圆的半径的变化范围．

解 在图 2-3 中，由勾股定理，知

$$OO'^2=OE^2+O'E^2. \tag{1}$$

根据平面几何知识，不难看出，这里 OO' 的长是两圆半径之和，即 $OO'=R+R'$．而 $OE=18-(R+R')$、$O'E=16-(R+R')$．记 $u=OO'=R+R'$，则(1)式为

$$u^2=(18-u)^2+(16-u)^2.$$

整理，得

$$u^2-68u+580=0.$$

解之，得

$$u_1=10,$$

$$u_2=58(\text{不合题意，舍去}).$$

这就是说，两圆半径之和 $R+R'=10$．由于 $R\leqslant 8$ 及 $R'\leqslant 8$，又 $R=10-R'\geqslant 10-8=2$，所以 $R\in[2,8]$（同样，$R'\in[2,8]$）．

两圆的面积和为

$$\begin{aligned}S&=\pi R^2+\pi R'^2=\pi R^2+\pi(10-R)^2\\&=2\pi R^2-20\pi R+100\pi.\end{aligned}$$

于是，问题就变为当 $R\in[2,8]$ 时求二次函数 S 的最大值与最小值了．根据定理 2，因 $R=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-20\pi}{4\pi}=5\in[2,8]$，所以当 $R=5$ 时，有 $S_{\min}=50\pi$．

另一方面，当 $R=2$ 时 $S=68\pi$，当 $R=8$ 时 $S=68\pi$．所以，当 $R=2$ 或 $R=8$（此时 $R'=2$）时，有 $S_{\max}=68\pi$．

对于由初等函数 $t=\varphi(x)$ 和二次函数 $f(t)=at^2+bt+c$ 复合而成的函数 $y=f[\varphi(x)]$，这种复合函数的极值问题，也

可以应用二次函数的方法去求解．但是，在解题时，务必要搞清中间变量 t 的允许取值范围．

［例3］ 试确定 $y=4^x+2^{x+3}+5$ 的最大值与最小值．

分析 由于 $y=4^x+2^{x+3}+5=(2^x)^2+8\cdot2^x+5$，因此 y 可以看成 2^x 的二次函数了．

解 设 $2^x=t$，则 $0<t<\infty$，原题变形为求

$$y=t^2+8t+5$$

在开区间 $(0,\ \infty)$ 内的最大值与最小值．但 $t=-\dfrac{b}{2a}=-4\notin(0,\ \infty)$，另外 t 定义在开区间内不包含端点，因此，y 没有最大值，也没有最小值．

［例4］ 试确定函数

$$y=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+5$$

在闭区间 $[-3,\ 3]$ 上的最大值与最小值．

分析 注意到 $(x+1)(x+4)=x^2+5x+4$，$(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$，因此 y 可以看成是 x^2+5x 的二次函数．

解 由于

$$\begin{aligned}y&=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+5\\&=(x+1)(x+4)\cdot(x+2)(x+3)+5\\&=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+5,\end{aligned}$$

令 $x^2+5x=t$，原式变为

$$y=(t+4)(t+6)+5=t^2+10t+29.$$

现在必须考察 t 的取值范围．不难看出，t 的取值范围就是二次函数 $t=x^2+5x$ 在 $[-3,\ 3]$ 内的最大值与最小值所限定的范围．

由于这里 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{5}{2}\in[-3,\ 3]$，所以当 $x=-\frac{5}{2}$ 时，有 $t_{\min}=-\frac{25}{4}$；另一方面，当 $x=-3$ 时 $t=-6$，当 $x=3$ 时 $t=24$。所以，当 $x=3$ 时有 $t_{\max}=24$。这就是说，$t\in\left[-\frac{25}{4},\ 24\right]$。

原题就变成在 $\left[-\frac{25}{4}, 24\right]$ 内求二次函数 $y=t^2+10t+29$ 的最大值与最小值了。这里，$t=-\frac{b}{2a}=-5\in\left[-\frac{25}{4},\ 24\right]$，因此，当 $t=-5$ 时，有 $y_{\min}=4$。取得最小值的 x 可由求解方程 $x^2+5x=-5$ 而得到。这个方程的解为 $x_1=\frac{-5+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{-5-\sqrt{5}}{2}$。但 $\frac{-5-\sqrt{5}}{2}\notin[-3,\ 3]$。因此，当 $x=\frac{-5+\sqrt{5}}{2}$ 时，有 $y_{\min}=4$。

容易算出，当 $t=-\frac{25}{4}$ 时 $y=5\frac{9}{16}$，当 $t=24$ 时 $y=845$，且 $845>5\frac{9}{16}$。所以，当 $t=24$，即 $x=3$ 时，有 $y_{\max}=845$。

2. 判 别 式 法

二次函数的极值，除了用上节的方法来解以外，还可以借助于一元二次方程的判别式来求解。

我们知道，实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（其中 $a\neq0$），只有当其判别式 $\Delta=b^2-4ac\geqslant0$ 时，才有实根。应用这一原理，并当能取得等号时，可以求出二次函数的极值。

例如，仍讨论例 1．对二次函数 $y=x^2-4x+5$，把原式中的 y 看作参数，将原式变形为关于 x 的二次方程