

初级科学技术丛书

代数基础知识

周伯堃編著

江苏人民出版社

科学 技术 丛书
代 数 基 础 知 識

周伯燮編著

*

江苏省书刊出版业营业许可証出〇〇一號

江 苏 人 民 出 版 社 出 版

南 京 湖 南 路 十 一 号

江苏省新华书店发行 江苏新华印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印張 8 字數 178,000

一九五八年十月第一版

一九五八年十月南京第一次印刷

印數 1-50,600

統一書號：T 13100·83

定 价：(6)六角五分

序 言

数学是向科学技术进军的重要工具之一。在工农业生产中，常常要用到数学。在人造卫星上天、原子能的和平利用，以及许多近代科学所要解决的问题上，都离不开数学。我们要向科学技术进军，就必须学习数学。

代数是数学中的一部分。它是在算术的基础上发展起来的，比算术有更多的计算方法。掌握了代数，可以解决一些算术上难于解决的问题。

我国在代数方面的发展是很早的，例如代数中正负数的计算以及联立一次方程，在汉朝以前就已经有了。公元263年，三国时刘徽注的一本古代的数学书叫做九章算术，内容已有正负数的概念与代数方程的计算。中国古代的数学书周髀算经(年代不可考)和孙子算经(公元一世纪左右)等，也都讨论了这些代数问题。其后，南北朝时张邱建，宋时秦九韶、杨辉，元朝朱世杰等，对于代数都有很大的贡献。

代数并不是什么难懂的东西。学过了算术的人，就可以接着学习代数。这本代数基础知识，是供初中程度的干部、工人和农民自学用的。

希望读者在自学这本书时，按照编排的次序，逐章逐节耐心地学习下去。不但要懂得怎样运算，而且要经常思考，为什么要用这样的运算方法，为什么能得出这样的结论。只有这样弄通了道理，才能掌握代数的法则，灵活运用，来解决生产技术上的计算问题。

学习数学,不但要懂,而且要熟練运算。希望讀者在自学这本书时,对每一个練習題,都加以运算,作出正确的答案,不要把它輕輕放过。只有这样,才能学会代数。这本书中有各种类型的例題,讀者可以从这些例題中学习一些解習題的方法。但是在解習題时,不可局限于运用例題的方法,应当灵活运用代数的法則来解决各种計算問題。事实上,生产技术上的計算問題往往是錯綜复杂,决不是依靠几个呆板的方法能解决一切計算問題的。这本书中所列举的解題步驟也不过是供給讀者参考而已,并不是一成不变的,讀者在稍稍熟練解題方法以后,就可不必拘守这些步驟。为了帮助讀者演算習題起見,对于較难的習題都作了提示,还有些習題附有答案,以供参考。

周 伯 勳

目 录

序 言

第一章 正 負 数	1
§1. 数与量	1
§2. 正負数的大小与绝对值	6
§3. 数轴	9
§4. 正負数的加法	13
§5. 正負数的减法	18
§6. 有关加法与减法的规律	20
§7. 正負数的乘法	24
§8. 正負数的除法	28
§9. 正負数的四则联合运算	31
第二章 整 式	34
§1. 用文字来代表数	34
§2. 单项式	38
§3. 单项式的乘法与除法	42
§4. 多项式、多项式的加法与减法	51
§5. 多项式的乘法	58
§6. 乘法公式(一)	62
§7. 乘法公式(二)	72
§8. 一元多项式的除法	76
第三章 开 方	81
§1. 数字的平方根	81
§2. 有余数的情况	86
§3. 积与商的平方根	90
§4. 单项式的方根	93
第四章 因式分解	96
§1. 提取公因式法	96
§2. 二次三项式的因式	101
§3. 平方差的因式分解	104
§4. 三次四项式的因式	109

§5.	立方和与立方差的因式分解	112
§6.	因式分解的一般步骤	114
§7.	最高公因式与最低公倍式	118
§8.	利用因式分解要求整式的积和商	123
第五章	分 式	127
§1.	约分	127
§2.	分式的加法与减法	133
§3.	分式的乘法	138
§4.	分式的除法	141
第六章	一次方程	148
§1.	恒等式与方程	148
§2.	一元一次方程	154
§3.	一元一次方程的应用问题	160
§4.	文字方程	165
§5.	二元一次联立方程	168
§6.	二元一次联立方程的补充知识	177
§7.	三元一次联立方程	180
§8.	应用问题	184
第七章	一元二次方程与分式方程	189
§1.	二次方程	189
§2.	二次方程的公式	194
§3.	分式方程	196
§4.	应用问题	203
第八章	恒等式与不等式	210
§1.	恒等式及其证明	210
§2.	不等式	215
§3.	一元一次不等式	218
第九章	比例和图表	221
§1.	比例	221
§2.	变量与统计图表	227
§3.	成比例关系的变量	231
§4.	二元一次方程的图形	234
习 题 答 案		240

第一章 正負數

§1. 數與量 我們在日常生活中常會碰到一些量，例如三個人，五尺二寸布，攝氏廿二度等等。這些量都表達一些客觀事物。我們學數學不只是要認識這些量，而是要研究這些量的某種規律。例如，三個人添上五個人就是八個人，三個蘋果加上五個蘋果就是八個蘋果；換句話說，三個東西加上五個同樣的東西必是八個這樣的東西，不管這裡的“東西”是指人還是指蘋果。這就是一種規律，我們可以寫成：

三個加五個等於八個。

這裡的“個”也可以取消。因為，三斤米加上五斤米也是八斤米；所以，我們可以進一步得出：

$$3 + 5 = 8$$

這是古代數學的一個大進步，它是由具體的事物走向抽象的概念的第一步。本來，三個人加五個人是八個人，不過是人數的一個規律，它並不表示三斤米加五斤米等於八斤米這個事實。但是， $3 + 5 = 8$ 這個規律所能表達的事實就廣泛得多了。這裡的 3、5、8 是一些數，它們在不同的場合表達不同的量。事實上，3、5、8 這些數本身並不是具體的事物，任何人都拿不出一個具體的事物叫作 3、5、8。脫離了“量”這個具體事物，任何人都無法解釋什麼是 3、5、8 這些數。因此，

數是量的抽象概念，它是代表量的。

這就是說，數的性質是由量的性質來決定的，也就是說，量的規律決定數的規律。

任何两个同类量之間总有一些相对的关系。它們或者相等或者不相等。不相等的两个量必有一大一小，或者是一多一少的关系。例如，5 斤米比 3 斤米多，5 尺布比 3 尺布长，5 亩田比 3 亩田大等等。这些“大小”、“多少”、“重輕”、“长短”的关系，可以統一用“大小”的关系来表达。即不相等的同类項中总有一个量比較大些。由于量的規律决定数的規律，所以我們說：

大的量所决定的数也大些，小的量所决定的数也小些。

例如，脱离“5 个人比 3 个人多”这个事实，或者类似的事实，能不能說明 5 为什么比 3 大呢？当然不能，因为 3、5 这些数本身并没有什么意义，只当它們表示具体的量时才有具体的含义。

最后，我們來說明一种很特殊的量。上面所說的“一个人”、“三尺布”等等，都是一些具体实在的事物。但是“沒有人”、“沒有錢”、“沒有布”，是不是一种量呢？当然，从上面的說法，“沒有人”、“沒有錢”、“沒有布”都不是具体的实物，但是它們也都表达一些客觀实在。所以我們也算它为一个量，这个量叫做“零”，或者叫做“沒有”。在数字上，我們以符号“0”来表示零。換句話說，“0”就是“沒有”这个量的抽象数字。

从下面的例子中，我們能看到，有些量比 0 还要小。

例1. 假定到了月底，甲的工資还用剩 5 元，乙还用剩 3 元，丙 1 元也不剩，但不欠債，丁不但不剩而且还欠 2 元的債，戊也不但不剩而且还欠 4 元的債。現在要問，他們五人中，誰用剩的工資最多？当然是甲，这是沒有疑問的。如果要問，誰用剩的工資最少，大家就会有一些不同的答案了。有人認為丙、丁、戊三人都未剩錢，可見他們三人都只剩下 0 元，換句話說，他們三人剩下的錢一樣多。不过，仔細一想，这是不够正

确的。事实上，丁、戊二人不但没有剩钱，而且还欠了债。因此，他们两个人这个月不是收支相抵，而是支出超过了收入。假定丙、丁、戊三人的这个月的工资都是 50 元，丙用去 50 元，丁用去 52 元，戊用去 54 元。显然，他们收入一样多，而丁、戊用去的钱比丙用去的钱多，这样怎能说他们剩的钱一样多呢？我们应该认为丙剩下 0 元，丁剩下一笔 2 元的债，而戊却剩下一笔 4 元的债。既然没有钱比欠债要富有些，所以我们说丁、戊所剩的工资比零还要小。

例2. 我们计算各地的高度是以“海拔”为标准的。所谓某地的“海拔”，是从这地作一根与海面平行的线到海面上，如果这线在海平面上 200 公尺，我们就说这地的高度是“海拔”200 公尺。图 1 中甲地的高度是 200 公尺，乙地是 100 公尺，丙地是 0 公尺，丁、戊两地比海平面还要低。当然我们不能说丁、戊两地没有高度，不过它们的高度比 0 还要小。

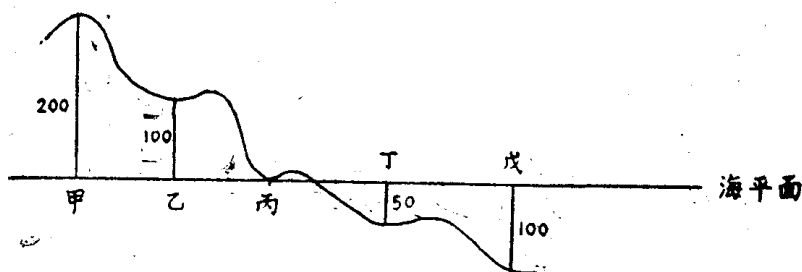
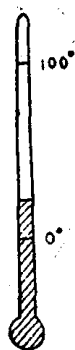


图 1

例3. 我们再以温度为例如。测量温度时要使用温度计，如图 2。如果某一天，上海的温度是 3 度，南京是零度，天津是零下 2 度，北京是零下 5 度。先说一下什么叫做零度，什么叫做 3 度。所谓零度不是没有温度。我们以海平面上纯水结冰时的温度即冰点，叫做零度；把纯水沸腾时的温度即沸点；



叫做一百度。利用水銀熱漲冷縮的道理，可以把結冰時的溫度與沸騰時的溫度等分成一百份，每份就叫做一度。所謂零度就是與純水在海面上結冰時的溫度一樣。所謂3度，就是說這時的溫度比冰點高出3度。這樣一來，上面所說的天津與北京那天的溫度，不但沒有比結冰時的溫度高，而且还比結冰時溫度低幾度。這也就是說，天津和北京的溫度比零度還要低。

圖2

表達比零還小的量可以用負數。比零大的量叫正量，比零小的量叫負量。例如，在第一個例子中，我們可以說，到了月底甲用剩工資正5元，乙用剩工資正3元，丙還剩0元，丁還“剩”負2元，而戊還“剩”負4元。這裡所謂還剩負2元與負4元，是指不但不剩，而且还欠2元、4元的債的意思。在圖1中，甲地的高度是海拔正200公尺，乙地是正100公尺，丙地是0公尺，丁地是負50公尺，戊地是負100公尺。同樣，在例3中，上海在那一天的溫度是正3度，南京是0度，天津是負2度，北京是負5度。

這三個例子都表達了一種事實，在常用的數量中，有許多量是表示相反意義的。例如，盈餘與虧損，收入與支出，比海平面高與比海平面低，有錢與負債，向上與向下，若干秒鐘以前與若干秒鐘以後，向東與向西，等等。在算術中所學過的數是不能很好地表達這些量的意義的。例如，某公司盈餘了1,000元，而另一公司虧損了1,000元，雖然同是1,000元，可是經濟意義大不相同。再如，某機關工作較少，可以調出5個幹部，而另一機關工作較多，需要調進5個幹部，雖然同樣是5個幹部，其實意義也不是相同的。更明顯的例子是溫度，如果溫度升高3度，那麼溫度計中水銀面就上升3格，而當溫度

降低3度时，水銀面就降低3格。

在这些相反意义的量中，我們取其中之一为正量，那么另一方向的量就叫作負量。至于到底取那一个方向为正，就看我們的习惯与主要对象了。例如，在上面的第一个例子中，我們的对象是“剩余”多少工資。既然談的是“剩余”，所以我們就以真正的剩余为正，因此我們就說甲剩正5元，而戊剩負4元。在第二个例子中，我們談的是“高度”，不是“低度”，所以我們以确实比海平面高的地方的高度为正，因而我們以比海平面低的地方的高度为負。在第三个例子中，我們談的是“溫度”，不是“冷度”，所以比冰点高的溫度为正，比冰点低的溫度为負。当然，我們測量溫度不一定用上述的溫度計，也不一定以水的冰点为起点。事实上，我們用一定浓度的盐水结冰时的溫度也可以做起点，不过我們习惯上是以水的冰点为零度，所以我們就这样定了。

假定我們把主要对象放在另一方向，那么所得的負数意义就会完全不同。例如，1958年第一季度，苏联的某些工业产品比去年同期增长了百分之十一，而美国却降低了百分之十一。我們可以說，苏联增长百分之正十一，而美国“增长”了百分之負十一。如果我們說某机关調出了正5个干部，那么它就表示这机关真正調出了5个干部。如果說，某机关調“出”了負5个干部，那么它的实际意义是，这机关調“进”了5个干部。因此，調“进”負5个干部，实际上就是調“出”了5个干部的意思。

正数的符号是在数的前面加一个“+”号。例如，+3，+5，+11%等，都表示(也讀成)正3，正5，百分之正十一(或正百分之十一)。負数的符号是在数的前面加一“-”号。例如-3，-5，-11%等，都表示(也讀成)負3，負5，百分之負

十一(或負百分之十一)。通常,除非我們特別要強調某一數是正數,我們都不寫上正數前的“+”號。例如,3, 5, 11%就表示 $+3$, $+5$, $+11\%$ 。換句話說,不帶符號的數都是正數。為免于混亂起見,我們對於負數有時用括號把負數括起來,例如 (-3) , (-5) 等等。

習 題 一

1. 說明下列各術語的實際意義:

(1) 我國吐魯番盆地中最低處的“海拔”是 -154 公尺。

(2) 飛機上升 $8,500$ 公尺後,又上升 $-3,000$ 公尺。

(3) 美國就業工人數最近增加 -600 萬人。

2. 用負數來表達下列的量:

(1) 某公司去年虧損了 $10,000$ 元。

(2) 某籃球隊在某次比賽中輸了 10 分。

§2. 正負數的大小與絕對值 我們在決定正數的大小時,是以正量的大小為根據的。例如在§1的例1中,甲剩工資 $+5$ 元,乙剩工資 $+3$ 元,丙剩工資 0 元。當然甲剩的最多,乙其次,丙又其次。所以 $+5 > +3 > 0$ 。這一個例子中的丁剩下 -2 元,即丁負債 2 元,那麼丙和丁哪一個剩得多呢,當然是丙,因為他雖不剩錢却也不負債,而丁不但不剩而且還負債。所以 $0 > -2$ 。

再看上節例2。甲地的高度是 $+200$ 公尺,乙地是 $+100$ 公尺,丙地是 0 公尺,丁地是 -50 公尺,戊地是 -100 公尺。顯然甲地高於乙地,乙地高於丙地,丙地高於丁地,丁地又高於戊地,我們所談的是“高度”,所以越高的地方“高度”越大,

因而 $+200 > +100 > 0 > -50 > -100$ 。

我們要注意，这是因为甲地高于乙地，所以甲地的高度（+200 公尺）才大于乙地的高度（+100 公尺），而不是因为 $+200 > +100$ ，才有甲地的高度大于乙地的高度。

同样，在上一节的例 3 中，因为暖和的地方温度高，寒冷的地方温度低，所以上海的温度高于南京的温度，而南京的温度又高于天津的温度，天津的温度又高于北京的温度。

因此 $+3 > 0 > -2 > -5$ 。

再举一个例子。假定通过甲市有一条东西向的铁路，如图 3 所表示的。

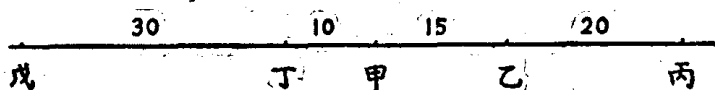


图 3

乙車站在甲市以东 15 公里，丙車站在甲市以东 35 公里，丁車站 在甲市以西 10 公里，戊車站在甲市以西 40 公里。假定以 甲市为起点，向东为正，我們就應該說甲市是 0 公里，乙是 +15 公里，戊是 -40 公里。因为丙也在甲市的东边，是 +35 公里，也就是丙更在乙的东边，所以 $+35 > +15$ 。丁在甲市的 西边，是 -10 公里，也就是丁在戊的东边，所以 $-10 > -40$ 。

有人会感到非常奇怪，明明丁与甲相距只有 10 公里，而 戊与甲相距是 40 公里，当然戊距离甲远些，而丁距离甲近些， 怎么会 $-10 > -40$ 呢？这是因为我們現在所指的是以甲市 为起点，向东为正，丁車站 在戊車站的东边，所以 $-10 > -40$ 。我們要注意，“以甲市为起点，向东为正”这句话，是指着有方 向的，也就是說，我們已定了一个方向为正向。假定我們說， 甲市与丁車站的距离是 10 公里，甲市与戊車站的距离是 40

公里，那就表示我們并未定出方向，就可以根据距离来比較大小，40 公里比 10 公里大。

有許多量是沒有方向性的，也就是說，沒有相反方向的量。例如，我們說這間房子里有 5 个人，那么這句話中的量是沒有相反方向性的。因為我們無法理解“這間房子里有 -5 个人”是什麼意思。再例如，我們說自甲到丁的距离是 -10 公里，這是有方向性的（如上面例子中，已規定向東為正），但是如果說甲乙兩地之間的距离是 -10 公里，就不通了。因為這樣說法是指着沒有定出正的方向，因而這種情況的負量是沒有意義的。

在正負數中，去掉各該數的“+”“-”號所得的數（也就是所得的正數），叫做這數的絕對值。我們以這數的前後各加一豎綫來表示這數的絕對值。例如， $|-3| = 3$ ， $|+3| = 3$ ， $|-1.5| = 1.5$ ， $|+2.78| = 2.78$ 等等。換句話說，正數的絕對值就等于它自己，而負數的絕對值則是去掉負號後所得的一個沒有符號的數（也就是一個正數）。把正負數改成絕對值的意思是，我們不管原來的方向了。那也就是說，我們把各種可能的方向都作為正，當然這時就沒有負量了。例如，我們說自甲到了是 -10 公里，這是已經固定了正向的說法；如果我們說甲與丁之間的距离是 10 公里，那么我們就沒有讓任一方向為正向的意思，換句話說，在這時，丁既可能在甲市以東，也可能在甲市以西。

從上面所說的一切理由，我們對於正負數的大小得出以下的結論：

1. 正數一定大於零，而且一定大於負數；
2. 零一定大於負數；
3. 絕對值較大的正數“大於”絕對值較小的正數，例如

$|+5| > |+3|$ ，所以 $+5 > +3$ ；

4. 絕對值較大的負數“小于”絕對值較小的負數，例如 $|-5| > |-3|$ ，所以 $-5 < -3$ 。

零既不是一个正数，也不是一个負数，它的絕對值就是零自己，而 $+0$ 就是 -0 。

絕對值相等而符号相反的数，叫做**相反数**。例如 $+5$ 与 -5 是相反的数， $+1.3$ 与 -1.3 是相反的数。任給一个正数或負数，我們都可以找出一个与它相反的数，我們在这数的前面再加上一个“-”号来表示。例如 $-(+5) = -5$ ， $-(-3) = +3$ ，等等。

习 題 二

1. 把下面的数按照大小的順序排起来：

-3 ， -8.5 ， 3.1416 ， -1.414 ， 8.501 ， 2.539 。

2. 写出 $-\frac{3}{4}$ ， $\frac{1}{2}$ ， -1.5 ， 3.1416 的絕對值。

3. 与 1 ， 0 ， -2.1 ， -5.4 相反的数是什么？

§3. 数軸 在日常生活以及工业生产、科学研究中，我們常常要測量各种不同的量。測量这些量就要用量具。例如量长度要用尺，称重量可以用秤，量溫度可以用溫度計，計時間可以用鐘表。这些量具有一个共同的特性，他們都是把各种量的大小化成长度的大小来計算的。例如溫度計，是把溫度的高低化成水銀面的高低，因此由零度到水銀面的距离(向上为正，向下为負)就代表着溫度。鐘表也是这样的，不过它把時間的长短化成鐘表面上圓弧的长短而已。

以我們用的杆秤为例，如图 4 所表示的那样。乙处是挂鉤，把要称的东西放在乙处，那么秤錘丙就必需放在一个适当

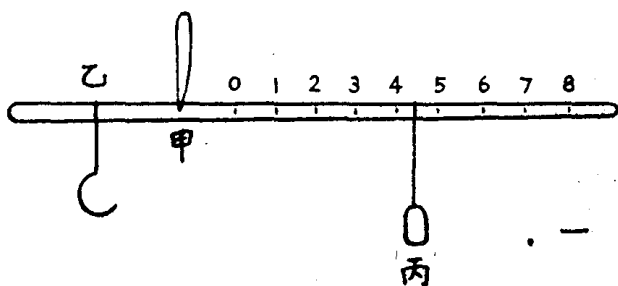


图 4

的位置才能使秤杆保持水平，因而重量就可以从秤錘的位置求出来。假定我們所造的这杆秤不但要能称重的东西，而且还要能称氢气球的上升力，那么我們就必需把这杆秤造得很长。在乙处“挂”上一个向上升的氢气球时，不論秤錘丙放在 0 的右边什么地方，这杆秤总是左边向上翘的。因此，如果要能使这杆秤成水平位置，我們就必須把秤錘向左移。如果我們以向下的重量为正，那么向上升的浮力就是負的。所以，如果某氢气球的上升力是 1 公斤(即向下的力量是 -1 公斤)，則要想保持秤杆成水平位置的話，我們必須把秤錘向左移到一个适当的位置，我們在这个位置刻上一个符号 -1 。依此类推，我們就可以把秤杆上 0 的右方刻成 1, 2, 3, ……的斤数，而且还可把秤杆上 0 的左方刻成 $-1, -2, -3, ……$ 。于是这杆秤不但可以称出重的物体的重量(正量)，而且还可以称出氢气球的上升的力量(負量)。

假定我們把这杆秤連同它上面的刻度划成一根直綫，并且在向右的方向作一个箭头，那么我們就得到如下的直綫：

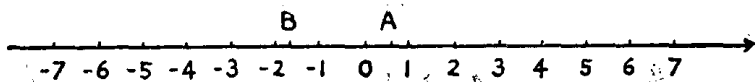


图 5

假定我們可以把这根綫向两端无限制地延长，我們就得到一根“数軸”。刻上 O 的那一点叫做数軸的原点，任何正負数都可以在这根数軸上找到一个位置。例如，給一个数 $\frac{2}{3}$ ，那么我們就可以把 $O1$ 之間分成 3 份，取其两份，得一个分点 A 。于是 OA 的长为 $+\frac{2}{3}$ ，而 A 点也叫做点 $+\frac{2}{3}$ 。再假定給一个数 $-\frac{7}{4}$ ，我們从原点向左方量，以 $O1$ 間的长为 1 个单位(例如算它为一寸)，在数軸上原点的左方找一点 B ，使 OB 这段的长为 $\frac{7}{4}$ ，因此 B 点就叫做 $-\frac{7}{4}$ ，而自 O 到 B 的距离就是 $-\frac{7}{4}$ (因为箭头方向是正向，而原点到 B 是負向)。

反过来，假定 C 是这根数軸上的一个点。如果 C 在原点的右边，且 OC 的长是 5，那么 C 就叫作 $+5$ 。同样地，如果 C 在原点的左边，那么 C 就以一个負数来表示它的名字。象这样，我們就能把数軸上的点与正負数一个对应一个。不过我們要注意，数 $+\frac{2}{3}$ 与点 $+\frac{2}{3}$ 是不同的，因为点 $+\frac{2}{3}$ 是数軸上的一个点，而数 $+\frac{2}{3}$ 却是自原点到这点的距离。

数軸在数学上有极大的用处。現在我們就可以用它来比較两个数的大小。事实上，如果 A 、 B 是数軸上的两个点，如果 A 在 B 点的右边，那么 A 点的数就大于 B 点的数。例如 $+5$