



研究生

入学考试指导

高等数学

山东科学技术出版社

研究生入学考试指导

高等数学

同 济 大 学

宣耀焕 邹保康 齐绍朴 编
吴廷芳 闵华玲 王永安

山东科学技术出版社

内 容 提 要

本书是为报考工科硕士研究生的学生编写的。它不是教科书，也不是一本单纯的题解，而是一本能帮助读者在较短时间内进行全面复习的指南。本书也可作为在校的工科大学生、自学者和教师的教学参考用书。

本书共分三部分：高等数学、线性代数和概率论。书中对各部分的重要概念、基本理论和计算公式作了系统扼要地复习，重点突出。对于一些常用定理的证明和公式的推导，一般从略或从简，而侧重于解题能力方面的培养。书中列举大量各种类型的例题，尽力反映近年来高校工科研究生入学试题的水平。通过典型例题启发读者的解题思路，其中部分题目一题多解，以供读者比较。

同济大学应用数学系宣耀焕（第一至五章）、邹保康（第六至九章）、齐绍朴（第十、十一章）、吴廷芳（第十二至十六章）、闵华玲（第十七至二十章）参加了编写。在选编概率论习题方面，王永安同志也做了不少工作。宣耀焕负责全书的统编工作。

研究生入学考试指导

高 等 数 学

同济大学

宣耀焕 邹保康 齐绍朴 编
吴廷芳 闵华玲 王永安

*

山东科学技术出版社出版

山东省新华书店发行 山东新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 20.25印张 419千字

1986年9月第1版 1986年9月第1次印刷

印数：1—7,500

1105·164

定价 4.25 元

出版说明

近几年来,我国教育事业有了很大发展,报考研究生的人数大幅度增长,他们之中不但有全日制高等学校的学生,也有包括电视大学、业余大学在内的各类高校的学生,以及自学成才的青年。但目前适用于应试的参考书,在数量和种类上都远远不能满足考生的迫切愿望。为此,我们将出版一套包括数学、物理、化学、外语等各学科的《研究生入学考试指导》丛书。这套丛书概括了相应课程的主要内容,使之系统化,既可供报考理工科硕士研究生人员在复习应试时参考,又可帮助理工科学生提高分析问题的能力,熟练解决问题的技巧,检验对理论和方法的掌握程度。

参加这套丛书编写及指导工作的都是多年从事高等学校教学和科学研究的教授、讲师,他们都具有指导学生报考研究生的丰富经验,有的本身正在辛勤地培养硕士或博士研究生。借此机会,我们向他们所给予的有力合作与热情支持,表示诚挚的感谢。

1986年3月

目 录

第一部分 高等数学	(1)
第一章 函数与极限	(1)
第一节 一元函数	(1)
一、函数的概念 (1) 二、几种重要的函数类型 (2)	
三、函数的运算 (3) 四、举例 (4)	
第二节 极 限	(9)
一、极限的概念 (9) 二、计算极限的方法及举例 (12)	
三、函数序列与极限函数 (25)	
第三节 函数的连续性	(29)
一、函数的连续性 (29) 二、连续函数及其性质 (30)	
三、举例 (31)	
习题一	(38)
第二章 导数与微分	(44)
第一节 导 数	(44)
一、导数的概念 (44) 二、初等函数的求导公式 (46)	
三、求导问题的几种类型 (48)	
第二节 函数的微分	(65)
一、微分的基本概念 (65) 二、举例 (67)	
习题二	(68)
第三章 中值定理与导数的应用	(72)
第一节 中值定理	(72)
一、三个重要定理 (72) 二、举例 (74)	

第二节 泰勒公式.....(81)

一、泰勒公式(81) 二、五个基本函数的麦克劳林公式(82)

三、举例(84)

第三节 用导数来研究函数变化的性态.....(90)

一、函数的单调增减性(90) 二、函数的极值与最值(90)

三、曲线的凹凸性与拐点(92) 四、举例(93)

习题三.....(104)

第四章 不定积分.....(109)

一、不定积分的概念(109) 二、不定积分的计算法(111)

三、举例(113) 四、几种特殊类型的函数的积分(125)

习题四.....(138)

第五章 定积分与广义积分.....(142)

第一节 定积分.....(142)

一、定积分的概念及性质(142) 二、定积分的计算法(145)

三、举例(146)

第二节 定积分的应用.....(161)

一、元素法(161) 二、举例(163)

第三节 广义积分.....(168)

一、广义积分的概念(168) 二、广义积分的审敛法(170)

三、举例(171)

习题五.....(176)

第六章 空间解析几何与向量代数.....(182)

第一节 向量代数.....(182)

一、基本概念(182) 二、举例(184)

第二节 空间解析几何.....(186)

一、平面与直线(186) 二、曲面及其方程(191) 三、空间曲线及其方程(192) 四、举例(193)

习题六	(199)
第七章 多元函数微分法及其应用	(202)
第一节 多元函数的基本概念	(202)
一、基本概念 (202) 二、偏导数与全微分 (204) 三、多元函数连续、偏导数存在及可微等概念之间的关系 (206) 四、举例 (207)	
第二节 多元函数微分法	(210)
一、基本方法 (210) 二、举例 (212)	
第三节 多元函数微分学的应用	(220)
一、几何上的应用 (220) 二、多元函数的泰勒公式 (222) 三、多元函数的极值 (224) 四、举例 (225)	
习题七	(232)
第八章 重积分	(235)
第一节 二重积分的概念与计算法	(235)
一、基本概念与方法 (235) 二、二重积分的应用 (237) 三、举例 (238)	
第二节 三重积分的概念与计算法	(244)
一、基本概念与方法 (244) 二、三重积分的应用 (246) 三、举例 (248)	
第三节 含参变量的积分	(256)
一、含参变量常义积分的概念 (256) 二、含参变量广义积分的概念 (257) 三、 Γ -函数 (259) 四、举例 (260)	
习题八	(266)
第九章 曲线积分与曲面积分·场论初步	(272)
第一节 两类曲线积分	(272)
一、基本概念与方法 (272) 二、曲线积分的应用 (276) 三、举例 (277)	

第二节 两类曲面积分.....	(281)
一、基本概念与方法 (281) 二、曲面积分的应用 (284)	
三、举例 (285)	
第三节 三个重要公式.....	(292)
一、三个公式的条件与结论 (292) 二、举例 (295)	
第四节 场论初步.....	(301)
一、基本概念 (301) 二、举例 (305)	
习题九.....	(312)
第十章 无穷级数.....	(317)
第一节 常数项级数.....	(317)
一、常数项级数的概念和性质 (317) 二、常数项级数的审敛法 (318) 三、级数审敛的一般步骤 (320) 四、举例 (321)	
第二节 函数项级数.....	(333)
一、函数项级数的一般概念 (333) 二、函数项级数的一致收敛性 (334) 三、举例 (335)	
第三节 幂级数.....	(338)
一、幂级数及其收敛区间 (338) 二、幂级数的性质 (339)	
三、函数展开成幂级数 (341) 四、举例 (343)	
第四节 傅立叶级数.....	(351)
一、函数展开成傅立叶级数 (351) 二、举例 (354)	
习题十.....	(362)
第十一章 微分方程.....	(366)
第一节 微分方程的基本概念与几种特殊类型的	
一阶方程.....	(366)
一、基本概念 (366) 二、几种特殊类型的一阶微分方程 (367)	
三、举例 (370)	
第二节 高阶微分方程.....	(376)

一、可降阶的高阶微分方程 (376)	二、高阶线性微分方程 (377)	三、举例 (379)
第三节 高阶常系数线性微分方程.....(383)		
一、常系数线性齐次微分方程 (383)	二、常系数线性非齐次微分方程 (385)	三、欧拉方程 (394)
第四节 常系数线性微分方程组.....(396)		
习题十一.....(400)		
第二部分 线性代数.....(404)		
第十二章 行列式.....(404)		
一、行列式的概念及性质 (404)	二、行列式的计算方法 (406)	三、举例 (408)
习题十二.....(426)		
第十三章 矩 阵.....(431)		
一、矩阵的运算 (431)	二、逆矩阵 (433)	三、几种特殊方阵 (435)
四、分块矩阵 (439)	五、举例 (443)	
习题十三.....(457)		
第十四章 向量组的线性相关性.....(460)		
一、线性相关性 (460)	二、向量组的秩 (462)	三、矩阵的秩 (464)
四、举例 (464)		
习题十四.....(470)		
第十五章 线性方程组.....(474)		
一、线性方程组 (474)	二、举例 (477)	
习题十五.....(485)		
第十六章 矩阵的等价、合同与相似关系及二次型.....(488)		
一、方阵的特征值与特征向量 (488)	二、矩阵的等价、合同与相似关系 (489)	三、矩阵的相似对角形 (491)
四、实二		

次型 (492) 五、正定二次型 (494) 六、举例 (495)

习题十六 (506)

第三部分 概率论 (511)

第十七章 随机事件及其概率 (511)

一、基本概念 (511) 二、概率的计算 (512) 三、举例 (514)

习题十七 (525)

第十八章 随机变量及其分布 (528)

一、基本概念 (528) 二、常用分布 (531) 三、边缘分布·条件分布·独立性 (534) 四、举例 (536)

习题十八 (555)

第十九章 随机变量的函数的分布 (558)

一、基本概念 (558) 二、几个重要函数的分布 (560) 三、 n 维随机变量的变换 (562) 四、举例 (565)

习题十九 (582)

第二十章 随机变量的数字特征 (586)

一、期望 (586) 二、方差·协方差 (588) 三、常用分布的期望和方差 (589) 四、相关系数·回归 (590) 五、举例 (592)

习题二十 (606)

习题答案 (610)

(101)

(114)

(281)

(811)

(114)

第一部分 高等数学

第一章 函数与极限

第一节 一元函数

一、函数的概念

1. 函数关系的两要素

函数关系 $y=f(x)$, $x \in X$, 包含三因素.

(1) 定义域 自变量 x 的取值范围, 即 X ;

(2) 对应关系 因变量 y 依赖于自变量 x 的变化规律;

(3) 值域 所有对应的 y 值组成的数集, 记为 Y .

在这三因素中, 定义域和对应关系起决定作用, 又称为函数关系的两要素, 两者是缺一不可的. 例如, 在实数域中, 关系式 $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-4}$ 不能构成函数, 因为其定义域是空集.

两个函数当且仅当它们的定义域和对应关系完全相同时才恒等. 例如, 函数 $f(x)=\ln x^2$ 与 $g(x)=2\ln x$ 是两个不同的函数, 前者定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 而后者的定义域为 $(0, +\infty)$.

函数关系仅与其两要素有关, 与自变量和因变量选用什么字母表示无关.

2. 函数的定义域

如果函数关系是用公式法表示，则定义域就是使算式有意义的自变量的一切实数值组成的数集。在确定 $y=f(x)$ 的定义域时应非常熟悉基本初等函数的定义域。

3. 函数的几种特性

单值性与多值性，有界性，单调增减性，奇偶性和周期性。

二、几种重要的函数类型

1. 初等函数

由基本初等函数（幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数）经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所构成的函数。

2. 分段函数

自变量在不同的范围中取值，需要用不同的式子来表示一个函数关系，则称为分段函数。

例如 函数

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x \leq b \\ 1 & x > b, \end{cases}$$

是一个分段函数。

又例如 符号函数

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0, \end{cases}$$

也是一个分段函数。

一般说来，分段函数不是初等函数。

3. 积分上限函数

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，则函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt \quad a \leq x \leq b$$

称为积分上限函数。

4. 隐函数

如果在方程 $F(x, y) = 0$ 中，令 x 在某一范围内任取一确定值，相应地总有满足这个方程的 y 值存在，则方程 $F(x, y) = 0$ 确定 x 与 y 之间的函数关系。

例如方程 $x - e^{\frac{x-y}{y}} = 0$ ，当 $x \in (0, e^{-1}) \cup (e^{-1}, +\infty)$

时，确定了 y 是 x 的隐函数。若解出 y 得显函数 $y = \frac{x}{1 + \ln x}$ ，

这过程叫做隐函数的显化，隐函数的显化有时是困难的，甚至是不可能的。

5. 参数方程

$$\text{由} \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad \alpha < t < \beta$$

可以确定 y 为 x 的函数。

三、函数的运算

1. 函数的四则运算

一般初等函数的四则运算较简单，但要注意定义域的改变。分段函数的四则运算过程比较复杂，一般应列成表格来

表示运算过程。

2. 函数的复合运算

设 $y=f(u)$, 定义域 U_1 , 而 $u=\varphi(x)$, 值域 U_2 , 如果 $U_1 \cap U_2$ 不是空集, 则变量 y 通过中间变量 u 的联系而成为 x 的函数, 称为复合函数, 记为 $y=f[\varphi(x)]$. 这种过程称为函数的复合运算。

若 $U_1 \cap U_2$ 是空集, 则 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 就不能复合, 例如 $y=\ln x$, $u=-(x^2+1)$, 则 $y=f[\varphi(x)]=\ln[-(x^2+1)]$ 没有意义。

3. 反函数

设函数 $y=f(x)$, 定义域为 X , 值域为 Y . 如果对于每一个 $y \in Y$ 都可以从关系式 $f(x)=y$ (可看作关于 x 的方程) 确定出唯一的一个 $x \in X$, 则可以得到一个以 y 为自变量、 x 为因变量的新函数, 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数, 记为 $x=\varphi(y)$, $y \in Y$.

按通常习惯, $y=f(x)$ 的反函数可以写为 $y=\varphi(x)$, $x \in Y$.

四、举 例

〔例1〕设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 求下列函数的定义域: (1) $f\left(\frac{2}{\pi} \arcsin x\right)$; (2) $f(\sin x) + f(\ln x)$; (3) $f(x+a) \cdot f(x-a)$, ($a > 0$).

解 (1) 由 $\begin{cases} 0 \leq \frac{2}{\pi} \arcsin x < 1 \\ -1 \leq x \leq 1, \end{cases}$

即
$$\begin{cases} 0 \leq \arcsin x < \frac{\pi}{2} \\ -1 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

推出 $0 \leq x < 1$, 所以函数 $f\left(\frac{2}{\pi} \arcsin x\right)$ 的定义域为 $[0, 1)$.

(2) 由
$$\begin{cases} 0 \leq \sin x < 1 \\ 0 \leq \ln x < 1 \\ x > 0, \end{cases}$$

推出
$$\begin{cases} 2n\pi \leq x < 2n\pi + \frac{\pi}{2}, & 2n\pi + \frac{\pi}{2} < x \leq (2n+1)\pi \\ 1 \leq x < e, \end{cases} \quad n \text{ 为整数}$$

所以函数 $f(\sin x) + f(\ln x)$ 的定义域为 $\left[1, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, e\right)$.

(3) 由
$$\begin{cases} 0 \leq x+a < 1 \\ 0 \leq x-a < 1, \end{cases}$$

推出
$$\begin{cases} -a \leq x < 1-a \\ a \leq x < 1+a. \end{cases}$$

当 $1-a < a$, 即 $a > \frac{1}{2}$ 时, $[-a, 1-a) \cap [a, 1+a)$ 是空集, 上述不等式组无解.

当 $a \leq 1-a$, 即 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, $[-a, 1-a) \cap [a, 1+a) = [a, 1-a)$, 所以, 当 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x+a)f(x-a)$ 的定义域为 $[a, 1-a)$.

〔例2〕(1) 已知 $f\left(\frac{1-x}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2x^2-2x+1} - 1$,

求 $f(x)$;

(2) 设 $f_1(x) = a + bx$, $f_2(x) = a + bf_1(x)$, $\dots$, $f_n(x) = a + bf_{n-1}(x)$, 求证 $f_n(x) = a \frac{b^n - 1}{b - 1} + b^n x$.

解 (1) 令 $\frac{1-x}{x} = t$, 则 $x = \frac{1}{t+1}$, 于是

$$\begin{aligned} f(t) &= (t+1) + \frac{\left(\frac{1}{t+1}\right)^2}{2 \cdot \left(\frac{1}{t+1}\right)^2 - 2 \left(\frac{1}{t+1}\right) + 1} \\ &= t + \frac{1}{t^2 + 1}. \end{aligned}$$

由于函数关系与变量选用什么字母表示无关, 故所求的函数为

$$f(x) = x + \frac{1}{x^2 + 1}.$$

(2) 当 $n=1$ 时, 结论显然成立. 假设当 $n=k$ 时结论也成立, 即

$$f_k(x) = a \cdot \frac{b^k - 1}{b - 1} + b^k x,$$

于是有

$$\begin{aligned} f_{(k+1)}(x) &= a + bf_k(x) = a + ab \cdot \frac{b^k - 1}{b - 1} + b^{k+1} x \\ &= a \cdot \frac{b^{k+1} - 1}{b - 1} + b^{k+1} x, \end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时原结论也成立. 由数学归纳法推得对任意正整数 n , 都有

$$f_n(x) = a \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1} + b^n x.$$

〔例 3〕设函数

$$f(x) = \begin{cases} x & |x| < 1 \\ 0 & |x| = 1 \\ -x & |x| > 1 \end{cases} \quad \text{及} \quad \varphi(x) = \begin{cases} x^2 & |x| < 2 \\ x+1 & |x| \geq 2, \end{cases}$$

求和函数 $F(x) = f(x) + \varphi(x)$ 的表达式。

解 显然和函数 $F(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ，用 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 的分界点，由小到大排列，依次把 $(-\infty, +\infty)$ 划分成若干小区间 $(-\infty, -2]$, $(-2, -1]$, $(-1, 1]$, $(1, 2]$, $(2, +\infty)$ 。

然后列表并进行运算：

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f(x)$	$-x$	$-x$	$-x$	0	x	0	$-x$	$-x$	$-x$
$\varphi(x)$	$x+1$	$x+1$	x^2	x^2	x^2	x^2	x^2	$x+1$	$x+1$
$F(x)$	1	1	$x^2 - x$	x^2	$x^2 + x$	x^2	$x^2 - x$	1	1

于是得和函数 $F(x)$ 的表达式为

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + x & |x| < 1 \\ x^2 & |x| = 1 \\ x^2 - x & 1 < |x| < 2 \\ 1 & |x| \geq 2. \end{cases}$$

〔例 4〕设函数