研究生
入学考试指导

高等数学

山东科学技术出版社

研究生入学考试指导

高 等 数 学

同 济 大 学

宣耀焕　邹保康　齐绍朴
吴廷芳　闵华玲　王永安　编

山东科学技术出版社

内 容 提 要

本书是为报考工科硕士研究生的学生编写的。它不是教科书，也不是一本单纯的题解，而是一本能帮助读者在较短时间内进行全面复习的指南。本书也可作为在校的工科大学生、自学者和教师的教学参考用书。

本书共分三部分：高等数学、线性代数和概率论。书中对各部分的重要概念、基本理论和计算公式作了系统扼要地复习，重点突出。对于一些常用定理的证明和公式的推导，一般从略或从简，而侧重于解题能力方面的培养。书中列举大量各种类型的例题，尽力反映历年来高校工科研究生入学试题的水平。通过典型例题启发读者的解题思路，其中部分题目一题多解，以供读者比较。

同济大学应用数学系宣耀焕（第一至五章）、邹保康（第六至九章）、齐绍朴（第十、十一章）、吴廷芳（第十二至十六章）、闵华玲（第十七至二十章）参加了编写。在选编概率论习题方面，王永安同志也做了不少工作。宣耀焕负责全书的统编工作。

研究生入学考试指导
高等数学
同济大学
宣耀焕　邹保康　齐绍朴　编
吴廷芳　闵华玲　王永安

*

山东科学技术出版社出版
山东省新华书店发行　山东新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本　20.25印张　419千字
1986年9月第1版　1986年9月第1次印刷
[illegible]印数：1—7,500
[illegible]164　　定价 4.25 元

出 版 说 明

近几年来，我国教育事业有了很大发展，报考研究生的人数大幅度增长，他们之中不但有全日制高等学校的学生，也有包括电视大学、业余大学在内的各类高校的学生，以及自学成才的青年。但目前适用于应试的参考书，在数量和种类上都远远不能满足考生的迫切愿望。为此，我们将出版一套包括数学、物理、化学、外语等各学科的《研究生入学考试指导》丛书。这套丛书概括了相应课程的主要内容，使之系统化，既可供报考理工科硕士研究生人员在复习应试时参考，又可帮助理工科学生提高分析问题的能力，熟练解决问题的技巧，检验对理论和方法的掌握程度。

参加这套丛书编写及指导工作的都是多年从事高等学校教学和科学研究的教授、讲师，他们都具有指导学生报考研究生的丰富经验，有的本身正在辛勤地培养硕士或博士研究生。借此机会，我们向他们所给予的有力合作与热情支持，表示诚挚的感谢。

1986年3月

目　录

第一部分　高等数学

第一章　函数与极限

第一节　一 元 函 数

一、函数的概念

1. 函数关系的两要素

函数关系$y=f(x)$，$x\in X$，包含三因素．

（1）定义域　自变量x的取值范围，即X；

（2）对应关系　因变量y依赖于自变量x的变化规律；

（3）值域　所有对应的y值组成的数集，记为Y．

在这三因素中，定义域和对应关系起决定作用，又称为函数关系的两要素，两者是缺一不可的。例如，在实数域中，关系式$f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-4}$不能构成函数，因为其定义域是空集．

两个函数当且仅当它们的定义域和对应关系完全相同时才恒等．例如，函数$f(x)=\ln x^2$与$g(x)=2\ln x$是两个不同的函数，前者定义域为$(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$，而后者的定义域为$(0,\ +\infty)$．

函数关系仅与其两要素有关，与自变量和因变量选用什么字母表示无关．

2.函数的定义域

如果函数关系是用公式法表示，则定义域就是使算式有意义的自变量的一切实数值组成的数集。在确定 $y=f(x)$的定义域时应非常熟悉基本初等函数的定义域。

3.函数的几种特性

单值性与多值性，有界性，单调增减性，奇偶性和周期性。

二、几种重要的函数类型

1.初等函数

由基本初等函数（幂函数，指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数）经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所构成的函数。

2.分段函数

自变量在不同的范围中取值，需要用不同的式子来表示一个函数关系，则称为分段函数。

例如　函数

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\leqslant a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a<x\leqslant b \\ 1 & x>b, \end{cases}$$

是一个分段函数。

又例如　符号函数

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases} -1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ 1 & x>0, \end{cases}$$

也是一个分段函数。

一般说来，分段函数不是初等函数。

3.积分上限函数

设函数$f(x)$在$[a,\ b]$上可积，则函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt \qquad a\leqslant x\leqslant b$$

称为积分上限函数。

4.隐函数

如果在方程$F(x,\ y)=0$中，令x在某一范围内任取一确定值，相应地总有满足这个方程的y值存在，则方程$F(x,\ y)=0$确定x与y之间的函数关系。

例如方程 $x-e^{\frac{x-y}{y}}=0$，当$x\in(0,e^{-1})\cup(e^{-1},+\infty)$时，确定了$y$是$x$的隐函数。若解出$y$得显函数 $y=\dfrac{x}{1+\ln x}$，这过程叫做隐函数的显化，隐函数的显化有时是困难的，甚至是不可能的。

5.参数方程

$$\text{由}\quad \begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \qquad \alpha<t<\beta$$

可以确定y为x的函数。

三、函数的运算

1.函数的四则运算

一般初等函数的四则运算较简单，但要注意定义域的改变。分段函数的四则运算过程比较复杂，一般应列成表格来

表示运算过程。

2. 函数的复合运算

设 $y=f(u)$，定义域 U_1，而 $u=\varphi(x)$，值域 U_2，如果 $U_1\cap U_2$ 不是空集，则变量 y 通过中间变量 u 的联系而成为 x 的函数，称为复合函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$。这种过程称为函数的复合运算。

若 $U_1\cap U_2$ 是空集，则 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 就不能复合，例如 $y=\ln x$，$u=-(x^2+1)$，则 $y=f[\varphi(x)]=\ln[-(x^2+1)]$ 没有意义。

3. 反函数

设函数 $y=f(x)$，定义域为 X，值域为 Y。如果对于每一个 $y\in Y$ 都可以从关系式 $f(x)=y$（可看作关于 x 的方程）确定出唯一的一个 $x\in X$，则可以得到一个以 y 为自变量、x 为因变量的新函数，称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=\varphi(y)$，$y\in Y$。

按通常习惯，$y=f(x)$ 的反函数可以写为 $y=\varphi(x)$，$x\in Y$。

四、举　例

〔例 1〕设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1)$，求下列函数的定义域：（1）$f\left(\frac{2}{\pi}\arcsin x\right)$；(2) $f(\sin x)+f(\ln x)$；

（3）$f(x+a)\cdot f(x-a)$，$(a>0)$。

解（1）由 $\begin{cases} 0\leqslant\frac{2}{\pi}\arcsin x<1 \\ -1\leqslant x\leqslant 1, \end{cases}$

即 $\begin{cases} 0 \leqslant \arcsin x < \dfrac{\pi}{2} \\ -1 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$

推出 $0 \leqslant x < 1$，所以函数 $f\left(\dfrac{2}{\pi}\arcsin x\right)$的定义域为$[0,1)$。

（2）由 $\begin{cases} 0 \leqslant \sin x < 1 \\ 0 \leqslant \ln x < 1 \\ x > 0, \end{cases}$

推出

$$\begin{cases} 2n\pi \leqslant x < 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}, \quad 2n\pi + \dfrac{\pi}{2} < x \leqslant (2n+1)\pi \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n\text{为整数} \\ 1 \leqslant x < e, \end{cases}$$

所以函数 $f(\sin x)+f(\ln x)$的定义域为$\left[1, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}, e\right)$.

（3）由 $\begin{cases} 0 \leqslant x+a < 1 \\ 0 \leqslant x-a < 1, \end{cases}$

推出 $\begin{cases} -a \leqslant x < 1-a \\ a \leqslant x < 1+a. \end{cases}$

当 $1-a<a$，即 $a > \dfrac{1}{2}$ 时，$[-a, 1-a) \cap [a, 1+a)$ 是空集，上述不等式组无解.

当$a \leqslant 1-a$，即 $a \leqslant \dfrac{1}{2}$时，$[-a, 1-a) \cap [a, 1+a)$ $=[a, 1-a)$，所以，当 $0 < a \leqslant \dfrac{1}{2}$时，函数 $f(x+a)f(x-a)$ 的定义域为$[a, 1-a)$。

〔例 2〕（1）已知 $f\left(\dfrac{1-x}{x}\right)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2}{2x^2-2x+1}-1$，

求$f(x)$；

（2）设$f_1(x)=a+bx$，$f_2(x)=a+bf_1(x)$，…，$f_n(x)=a+bf_{n-1}(x)$，求证$f_n(x)=a\frac{b^n-1}{b-1}+b^n x$。

解（1）令$\frac{1-x}{x}=t$，则$x=\frac{1}{t+1}$，于是

$$f(t)=(t+1)+\frac{\left(\frac{1}{t+1}\right)^2}{2\cdot\left(\frac{1}{t+1}\right)^2-2\left(\frac{1}{t+1}\right)+1}$$

$$=t+\frac{1}{t^2+1}.$$

由于函数关系与变量选用什么字母表示无关，故所求的函数为

$$f(x)=x+\frac{1}{x^2+1}.$$

（2）当$n=1$时，结论显然成立。假设当$n=k$时结论也成立，即

$$f_k(x)=a\cdot\frac{b^k-1}{b-1}+b^k x,$$

于是有

$$f_{(k+1)}(x)=a+bf_k(x)=a+ab\cdot\frac{b^k-1}{b-1}+b^{k+1}x$$

$$=a\cdot\frac{b^{k+1}-1}{b-1}+b^{k+1}x,$$

即当$n=k+1$时原结论也成立。由数学归纳法推得对任意正整数n，都有

$$f_n(x)=a\cdot\frac{b^n-1}{b-1}+b^n x.$$

〔**例 3**〕设函数

$$f(x)=\begin{cases} x & |x|<1 \\ 0 & |x|=1 \\ -x & |x|>1 \end{cases} \quad 及\ \varphi(x)=\begin{cases} x^2 & |x|<2 \\ x+1 & |x|\geqslant 2, \end{cases}$$

求和函数$F(x)=f(x)+\varphi(x)$的表达式.

解 显然和函数$F(x)$的定义域为$(-\infty, +\infty)$，用$f(x)$及$\varphi(x)$的分界点，由小到大排列，依次把$(-\infty, +\infty)$划分成若干个小区间$(-\infty, -2]$，$(-2, -1]$，$(-1, 1]$，$(1, 2]$，$(2, +\infty)$.

然后列表并进行运算：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f(x)$	$-x$	$-x$	$-x$	0	x	0	$-x$	$-x$	$-x$
$\varphi(x)$	$x+1$	$x+1$	x^2	x^2	x^2	x^2	x^2	$x+1$	$x+1$
$F(x)$	1		x^2-x	x^2	x^2+x	x^2	x^2-x	1	

于是得和函数$F(x)$的表达式为

$$F(x)=\begin{cases} x^2+x & |x|<1 \\ x^2 & |x|=1 \\ x^2-x & 1<|x|<2 \\ 1 & |x|\geqslant 2. \end{cases}$$

〔**例 4**〕设函数