

高等学校教学用书



量子力学教程习题集

В. Г. 列维奇 著

高等教育出版社

高等学校教学用书



量子力学教程习题集

B. Г. 列維奇著

李 平 譯

喀 兴 林 校

高等教育出版社

本书系根据苏联俄罗斯联邦社会主义共和国教育部教科书出版社(Учпедгиз)出版的列維奇(В. Г. Левич)著“量子力学教程习题集”(Задачи по Курсу Квантовой Механики) 1952年版譯出的。原书經俄罗斯联邦社会主义共和国教育部批准作为苏联师范学院数理系的函授教材。

本书内容包括附有詳細解答的練習題 165 則, 思考問題 207 則, 并附有量子力学的自学提綱, 所以本书不只是一本习题集, 同时又是函授生的閱讀指导书。

本书可供师范学院教师、学生以及自学的讀者参考。

量子力学教程习题集

В. Г. 列維奇 著

李 平 譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內永年街7号

(北京市书刊出版业营业許可証出字第54号)

京华印书局印刷 新华书店发行

统一书号 18010·512 开本 850×1168 1/32 印张 5 6/16

字数 127,000 印数 0001—4,000 定价(Б) ¥0.65

1955年12月第1版 1955年12月北京第1次印刷

緒 言

在物理数学系物理专业的教学大纲中的理论物理一般教程里,“量子力学”这门教程是最后的一部分,并且是份量相当大的一部分。

量子力学教程在这里可以分成三部分:绪论,量子力学本身和原子核物理。

在量子力学中特别重要的是方法论性质的问题,这一点函授生必须特别注意。

正象我们已经指出的,量子力学课程的份量是超过了理论物理教程中的其他部分。

可是当学习量子力学的时候在函授生面前所产生的主要困难,首先却是对于新概念和新思想的不习惯。

熟习这些概念和事实的比较好的办法之一就是尽可能多作大量的练习。

这本参考书的目的就是列举一些例题,以说明一般理论对于解决实际重要问题的应用。

在这本书里汇集了大约有 170 个具有详细解答的练习题。

例题的分析将能帮助函授生建立关于数量级和数值的概念,并且帮助他们学会正确地应用各种公式。

选入了一些在新大纲中出现的但并不包含在一般基础教科书中的习题(例如,电子磁角动量的测量——习题 115, 连续谱——习题 65 等等)。

最后,在一些例题里,还引用了基础教科书(Э. Б. 史包尔斯基著“原子物理学”)中的一些公式和关系式,但不加证明。

大多数习题是阐述如何应用課程中的一般理論原理去分析具体的物理問題。

最难的习题都标以星号,这些題目可作可不作。

在函授生的工作条件下,自我檢查所学的知識是很重要的。

特別是在学习象量子力学这样一門內容广泛的包括很多实际材料的学科时,更是如此。

因此,按照課程的基础部分列入了一些函授生完全可以独立解決的問題和不难的习题。

凡能够回答所有給出問題的函授生,我們可以認為他已經足够深入地掌握了基本概念,并且也相当的精通了量子力学課程中所闡述的基本事实。

用星号标出的是較難的問題,这些問題可以答也可以不答。

量子力学教学大綱是在 1950 年 7 月批准的。

由于目前沒有和此大綱十分相合的課本,因此我們向函授生推荐已經有的基本教科书中的各別章节。

我們認為,按照函授生手中現有教科书的順序来学习大綱上的材料是比較好的。

必須認為下面这些是量子力学課程的基本参考书:

1. 史包尔斯基著“原子物理学”第一卷和第二卷,苏联国立技术理論书籍出版社 1949, 1950 和 1951 年版(有中譯本,周同庆等譯,高等教育出版社)。引用的內容都是按照最近一版。

此书最接近于大綱所規定的內容,并且包括大綱中的每一部分。

此书写得非常清楚,文字通順,并且也很容易理解。除了理論性的問題以外,此书中还有一切必要的实际材料。

在推导基本公式或关系式的时候,中間的計算表述得十分詳細,並沒有刪簡,所以大大地減輕了学习此书时的独立工作。

对于基本实验事实的描写,都用图来详细说明。

由于此书篇幅过大,我们在大纲的每一部分中都推荐了必读的章节。

2. 布洛欣采夫著“量子力学原理”,苏联国立技术理论书籍出版社1949年版(有中译本,叶蕴理,金星南译,高等教育出版社)。

此书非常清楚地叙述了量子力学的基本原理。它可以被推荐作为更进一步的研究原子理论这一课程的理论部分之用。

必须在读完史包尔斯基书中所叙述的基本材料以后,才可以读此书中的相应部分。

在布洛欣采夫的书并不讲述实验事实和原子核理论,并且认为这些是读者已经知道的。

对于最有训练的并且对量子力学特别感兴趣的学生,可以推荐Л.Д.朗道和E.M.里弗席次著的“量子力学”第一卷。(苏联国立技术理论书籍出版社,1948)。

在详细学习课程的各别部分时,有些辅助教材还是非常有用的,所以也可以把它们推荐出来:

1. 西马著“原子物理学导论”。(苏联外国书籍出版社,1948)。

此书具有对原子物理实验问题的介绍。

2. 亥兹伯尔著“原子光谱及原子结构”。(苏联外国书籍出版社,1948)。

此书对于原子光谱问题作了详细而通俗的叙述,当仔细学习本课程的许多部分时,可以把它当做一本很有成效的教材。

3. 柯尔松斯基著“原子核物理”。(苏联国立技术理论书籍出版社,1950)。

此书是关于核子物理问题的一本通俗的书,它可以有成效地被用来初步熟悉原子核物理的知识。

4. 里茨列著“核子物理学导论”。(苏联外国书籍出版社,1948)。

此书是对于原子核物理实验问题的通俗介绍，当详细研究原子核物理时可以采用。

书中按照大纲的每一部分指出了最低的文献内容，这些对于解决所给的习题和回答检查问题是必需的。

次要文献是解决带星号的习题和问题时所需要的。

补充文献只供预先熟习一下这一段教材初步内容之用。

必须着重指出，这些推荐只是推荐书中所指出的那些部分或章节，并不能推广到整个的书。

在以后，我们将用下面所示的符号：

1. 普朗克量子常数表为 h 。普朗克常数被 2π 除以后表示为 $\hbar$ 。
2. 在字母上加以 $\wedge$ 号后表示算子。

目 录

緒言	v
第一部分 量子力量的实验基础	1
1. 19 世紀末到 20 世紀初物理学的危机, 列宁对它的分析	1
思考問題	
2. 原子的組成部分及原子常数的确定	1
3. 原子的能价与波尔假說	1
4. 类氫原子的光譜	1
思考問題 1—27	
5. 量子效应	4
練習題 1—11	
思考問題 28—38	
第二部分 量子力学	15
6. 德布罗意波及其在量子力学中的解釋	15
練習題 12—23	
思考問題 39—48	
7. 波函数的統計解釋和測不准关系	24
練習題 24—26	
思考問題 49—54	
8. 薛定諤方程和量子力学对解决最簡單問題的应用	26
練習題 27—45	
思考問題 55—69	
9. 算子理論及量子力学的数学工具	49
練習題 46—70	
思考問題 70—81	
10. 在有心力場中的运动	66
練習題 71—94	
思考問題 82—94	
11. 微扰理論及其应用, 輻射理論	87
練習題 95—114	
思考問題 95—98	
12. 复杂原子, 电子的自旋, 在磁場中的原子, 矢量模型、門得雷業失的元	

素周期表以及其他問題	115
練習題 115—133	
思考問題 99—129	
第三部分 原子核物理	131
練習題 134—165	
思考問題 130—207	

第一部分 量子力学的实验基础

1. 从 19 世纪末到 20 世纪初物理学的危机, 列宁对它的分析。

参考文献

列宁著“唯物主义与经验批判主义”, 第 3 章及第 5 章。

思考问题

简要叙述 19 世纪末到 20 世纪初物理学危机的实质及原因。

从列宁对物理学危机的分析中得出什么一般的结论?

叙述辩证唯物主义关于空间、时间及因果性的学说。

2. 原子的组成部分及原子常数的确定

参考文献

主要文献

史包尔斯基著“原子物理学”, 第一卷, 第 1, 2, 3, 6, 7, 10, 12, 14, 17, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 34, 35, 36, 37 各节。

次要文献

史包尔斯基著“原子物理学”, 第一卷, 第 8—11, 15, 16, 18—23, 38—40 各节。

补充文献

西马著“原子物理学导论”, 第 19, 21, 22, 23, 27, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 46, 47, 49—58 各节。

3. 原子的能阶与波尔假说

参考文献

史包尔斯基著“原子物理学”, 第一卷, 第 91 节。

4. 类氢原子的光谱

参考文献

主要文献

史包尔斯基著“原子物理学”, 第一卷, 第 96, 97, 98, 99, 100, 101, 104,

105, 107, 108 各节。

补充文献

西馬著“原子物理学导論”，第 75, 76, 77, 79 各节。

思考問題

1. 一个具有质量为 m 的小液滴在电容器的极板中间匀速降落，若在 $t=0$ 时，使电容器二板荷电，同时液滴开始上升，計算液滴开始到达均匀上升时所需之時間。

2.* 利用具有两组电容器的管子測定 $\frac{e}{m}$ 的方法比旧的方法(只有一个电容器的方法)有什么优点？

3. 推导当电子在縱的磁場中运动时确定 $\frac{e}{m}$ 的公式。

4. 能否根据实验来观察电子的质量与它运动速度的关系？

5. 一电子被場强为 300 伏特的电場加速，应用绝对单位求电子的动能。

(答案: 4.8×10^{-10} 尔格)

6. 有一重电离和二重电离的两个锂离子，分別具质量 6 与 7，在場强为 400 伏特的电場中被加速。被加速的离子进入場强为 1600 奥斯特的均匀横向磁場中，求离子軌道的曲率半径。

(答案: 对一重电离的离子为 $\rho_1 = 4.41$ 厘米

二重电离的离子为 $\rho_2 = 4.72$ 厘米)

7.* 討論阿斯頓质谱仪的光学对比。

8. 在偏向角非常小的时候 ($\theta \sim 0$)，能否应用卢瑟福公式？为什么？

9. 为什么在推导布喇格-伍利夫方程式的时候可以不考虑倫琴射线在真空与晶体的交界面上的折射？

10. 說明玻尔假定与經典电动力学之間存在什么矛盾？

11. 說明形成阻擋电势的方法。什么样的电子才能通过荷有

阻擋电势的栅极？具有阻擋电势的真空管的伏—安特性曲线是什么形式？

12. 说明关于电子非弹性碰撞的弗兰克—赫兹实验。如何解释在电流—电压曲线上的极大值与极小值？辅助栅极的作用是什么？为什么这个辅助栅极的电势必须比主要阻擋栅极的电势要高一些？

13.* 由于什么缺点，使得弗兰克—赫兹最初的实验法不能用于确定较高级的激发？在方法的进一步发展这缺点是如何消除的？

14. 如何用电子碰撞的方法测定原子的电离电势？

15. 什么是第二种碰撞？能否用实验观察出来？

16. 说明从主线系的极限推求氫及类氫原子的电离电势方法的本质。

17. 氫原子可能实现的轨道的半径与主量子数有什么关系？

18. 类氫原子的第一个轨道的半径如何随原子的原子序数而变化？

19. 计算铁原子的 K 层半径比氫原子第一层轨道的半径小多少倍。

20. 原子的电离电势如何随原子序数 Z 而变？什么样的元素的电离电势的值最大？什么样的元素的最小？

21. 类氫原子光谱的线系的频率如何随原子序数而变？

22. 表述对应原理。

23. 以谐振子为例说明对应原理。

24. 为什么说玻尔理论是一个不能令人满意的原子构造理论？指出根据玻尔理论无法解释的实验事实。

25. 在原子物理学中常用的能量单位是什么？

26. 写出频率和真空中波数的转换公式。

27. 在折射系数为 n 的媒质中, 光的波数与波长的关系是什么?

5. 量子效应

近代量子力学的建立, 是在物理学发展中前进的一大步。

在上一世纪末叶, 光的电磁理论已经不能解释许多与绝对黑体的热辐射有关的实验事实。

在基尔霍夫、米海尔孙、高里钦、维恩等人在热辐射方面作出有很大价值的理论工作和实验工作之后, 普朗克成功地发现了关于黑体辐射光谱的能量分布定律(普朗克公式)。这个定律的根据是光的辐射和吸收过程的量子性这一假定。

光电效应定律的发现(在这方面的许多基本工作是斯托列托夫作的)使得爱因斯坦建立了光的量子理论。

关于原子性质和原子现象的概念的发展的下一阶段, 就是原子的行星理论和玻尔的原子态的量子化理论的建立。

后一理论在弗兰克-赫兹的实验中得到了直接的实验证明。

更迟一点, 另一些直接验证原子现象的量子性质的现象被发现了。

在光现象的领域里发现了康普顿效应, 比较更近的, 则有切林科夫效应。

有一系列的事实, 按当时现有的理论的观点, 是无法说明的, 只有在量子力学构成以后才能找到合适的解释, 这些事实的发现, 使得某些物理学家在 1923 年提出完全不可接受的反动理论。按照这种反动理论, 能量与动量守恒定律在原子世界里不能应用, 特别是在光的散射现象中不能应用。正如所预料到的, 康普顿效应的精确的实验研究, 完全无可辩驳的证明了能量和动量守恒定律可以应用到微观现象里去, 而且可以象在宏观世界里那样精确。

在下面的例子里, 假定函授生已经熟习了为学习“光量子”一

节所指定的史包尔斯基著“原子物理学”第一卷中的那几节。

在问题的解决中,认为能量和动量守恒定律适用于光量子。

将能量守恒定律应用于光电效应中时,有

$$eV = \hbar\omega - P$$

此处 P 为电子脱离原子或金属表面的脱出功。

当研究辐射理论(习题)时,应当回来研究关于光电效应的量子理论问题。

在光对自由电子的散射的情形中,能量和动量守恒定律为:

$$\hbar\omega + m_0c^2 = \hbar\omega' + mc^2,$$

$$\frac{\hbar\omega}{c} = \frac{\hbar\omega'}{c} + mv.$$

由此得到散射角 φ 与光的波长的改变 $\Delta\lambda$ 的关系的康普顿公式:

$$\Delta\lambda = 4\pi \frac{\hbar}{mc} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2\Lambda \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

此处 m 为散射粒子的质量, $\Lambda = 2\pi \frac{\hbar}{mc}$.

对于反冲电子的能量,表示如下:

$$E^{(e)} = \hbar\omega \frac{2\Lambda \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\lambda + 2\Lambda \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

在第 11 题中给出切林可夫效应的基本理论。

当解此题的时候,假定读者已知相对论中能量和速度的公式:

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2},$$

$$v = \frac{pc^2}{E}.$$

(史包尔斯基著“原子物理学”第一卷,第 61 节)

参考文献

主要文献

史包尔斯基著“原子物理学”第一卷,第 75—84, 92—95, 110—115.

118—121 各节。

次要文献

“俄国物理学史綱”(有关斯托列托夫、米海尔孙的部分), 苏联教育部教科书出版社, 1949。

練習題

1. 在卢奇尔斯基的实验中, 有一个球形电容器, 它的内部的一个极板是一个金属小球, 实验时就观察这小球表面的光电效应。在球形电容器中, 光电子的最大能量是产生光电效应的光的频率的函数, 这函数是直线形式, 这直线与频率轴相交, 并有一定的斜角。证明: 测量这直线的斜角就可以用来确定普朗克常数。

解答: 根据爱因斯坦公式得到: 光电子的最大能量与光的频率是以下面的关系式联系起来的:

$$E_{\text{最大}} = eV = h\nu + P,$$

此处 P 是脱出功。

因此, 直线斜角的正切等于:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{e}.$$

量出斜角 φ 并且已知电子的电荷 e , 所以能够计算普朗克常数 h 。

2. 钾和钨的光电效应的红限分别为 600 毫微米和 270 毫微米, 求脱出功。

解答: 脱出功等于

$$P = h\nu_{\text{红限}} \text{ 电子伏特} = \frac{hc}{\lambda_{\text{红}}} \text{ 电子伏特},$$

此处 $\nu_{\text{红限}}$ 为相应的光电效应红限的频率。

将波长换成频率, 并将频率换算成电子伏特, 得到

$$P_{\text{钨}} = \frac{1.05 \times 10^{-27} \times 3 \times 10^{10} \times 6.28}{600 \times 10^{-7} \times 1.6 \times 10^{-12}} = 2.03 \text{ 电子伏特},$$

$$P_{\text{出}} = \frac{1.05 \times 10^{-27} \times 3 \times 10^{10} \times 6.28}{270 \times 10^{-7} \times 1.6 \times 10^{-12}} = 4.58 \text{ 电子伏特.}$$

3. 在威耳孙云室中, 用 $\lambda = 0.14$ 埃的伦琴射线照射以后, 产生两个电子。其中一个电子与光子进行方向成 90° 角而飞出, 并具有能量 $E_1 = 6.25 \times 10^3$ 电子伏特。另外一个电子以同样角度飞出, 并具有能量 $E_2 = 82 \times 10^3$ 电子伏特。这两个电子的起源是什么?

解答: 能量 E_1 相当于康普顿电子以 90° 角飞出时的能量:

$$E_1^{(\text{康})} = \hbar \omega \frac{2\Delta \sin^2 45^\circ}{\lambda + 2\Delta \sin^2 45^\circ} = \frac{4\pi c \hbar \Delta \sin^2 45^\circ}{\lambda(\lambda + 2\Delta \sin^2 45^\circ)}$$

$$E_1^{(\text{康})} = \frac{2 \times 3.14 \times 3 \times 10^{10} \times 1.05 \times 10^{-27} \times 0.048 \times 10^{-8} \times 0.5}{0.14 \times 10^{-8} (0.14 \times 10^{-8} + 0.048 \times 10^{-8} \times 0.5)} =$$

$$= 10^{-8} \text{ 尔格} = 6 \times 10^3 \text{ 电子伏特.}$$

第二个电子的能量接近于 γ 量子的能量, 它是从原子壳层中被 γ 量子打出来的光电子。若忽略束缚能, 则有:

$$E_2 = \hbar \omega = \frac{\hbar 2\pi c}{\lambda} = \frac{2 \times 3.14 \times 3 \times 10^{10} \times 1.05 \times 10^{-27}}{0.14 \times 10^{-8}} =$$

$$= 136 \times 10^{-9} \text{ 尔格} = 82 \times 10^3 \text{ 电子伏特.}$$

4. 计算当 $\varphi = 90^\circ$ 时对于可见光 ($\lambda = 5000$ 埃) 和具有 $\lambda = 0.050$ 埃的 γ 射线的康普顿位移。

解答: 当 $\varphi = 90^\circ$ 时, 波长的改变为:

$$\Delta \lambda = 0.048 \sin^2 45^\circ = 0.0244,$$

并且与光的波长无关。可见光的波长的相对改变为:

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{0.0244}{5000} = 0.448 \times 10^{-5}.$$

5. 在康普顿效应的初步理论中指出, 当散射的时候, 波长的改变与散射物质的性质无关, 这个结论是否精确? 这效应与物质的性质有什么(定性的)关系?

解答: 电子在原子中的束缚愈大, 则它从打来的量子所得到的

能量愈少。

在輕元素里电子的束縛較小,在重元素里束縛能增大很多,并且被强力束縛的电子的相对数目也增多了。

当 Z 增大的时候,产生康普頓效应的几率就减小。

6. 当光对自由質子散射时,求它的波长的改变。

解答:

$$\Delta\lambda = 4\pi \frac{\hbar}{mc} \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

在質子的情况下:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \frac{2 \times 6.59 \times 10^{-27} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{3 \times 10^{10} \times 1.67 \times 10^{-24}} = 2.45 \times 10^{-13} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \text{ 厘米} = \\ &= 2.45 \times 10^{-5} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \text{ 埃}. \end{aligned}$$

7. 当氫原子放射一个具有頻率 ω 的光子的时候,求它的反冲,并求当反冲时由于把能量傳遞給原子而产生的 ω 的改变。

解答: 能量与动量守恒定律为:

$$\hbar\omega - \hbar\omega' = \frac{mv'^2}{2}$$

$$mv' = -\frac{\hbar\omega'}{c},$$

因此,

$$\hbar(\omega - \omega') = \frac{\hbar^2}{2mc^2} \omega'^2$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega^2} = \frac{\hbar}{2mc^2}$$

或

$$\Delta\lambda = c \Delta\left(\frac{1}{\omega}\right) = \frac{c\Delta\omega}{\omega^2} = \frac{\hbar}{2mc}.$$

8. 为了验证当基元过程时的能量和动量守恒定律的正确性,有人装置了如下的实验(图 1)。