

21世纪

高等院校计算机系列教材

数学建模技术

谢兆鸿 范正森 王艮远 编 著



中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

21 世纪高等院校计算机系列教材

数学建模技术

谢兆鸿 范正森 王艮远 编著

中国水利水电出版社

内 容 提 要

为了能对被研究的对象进行系统深入地分析,掌握它的特征和规律,对它的静态和动态性能予以评价,并预测它的变化趋势,进而能做出正确的决策,对它进行有效的管理和控制,就必须建立被研究对象的数学模型,数学建模已成为对被研究对象的特性进行系统研究和仿真的必不可少的基础。由于数学建模技术在国民经济的各个领域,已经、正在和将来必然要起到日益重要的作用,它的普及和推广受到各国政府的关注。美国早在 20 世纪 80 年代就开始在国内组织全国性的数学建模竞赛。从 1994 年开始,我国也开始了一年一度的全国性的大学生数学建模大赛。由于数学建模是一门基于数学、物理、生物、光电、机械、经济、社科等多学科的综合技术,因此对从事和学习建模技术的科技工作者,除了要求有坚实的数学功底之外,还应该具备较全面和广博的知识。为了给日益增多的热衷于数学建模技术的读者提供力所能及的帮助,我们编写了此本教材。本书共有 9 章,前 3 章介绍了数学建模的概念,模型建立的基本方法,模型开发的步骤和如何进行模型的检验。从第 4 章开始,按照离散模型、连续模型、微分积分模型和概率统计模型的分类,详细叙述了根据不同对象采用的相应数学建模的方法。第 9 章对建模过程中常用的几种数学软件的使用进行了扼要的介绍。全书从讲解实例入手,通过对一些常规现象的分析和数学描述,引导出建模的思路和步骤,并由浅入深,逐渐学会综合应用。本书配有大量的习题,力图通过理论讲解和解题实践的结合,使读者能逐渐地掌握这门技术。通过本书的学习,读者能切身体会到数学无处不在以及应用数学所蕴藏的巨大潜力,本书可作为理工类大学数学建模课程的教材,也是对数学建模有兴趣的以及有志从事数学建模工作的科技人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学建模技术/谢兆鸿,范正森,王艮远编著. —北京:中国水利水电出版社,2003

(21 世纪高等院校计算机系列教材)

ISBN 7 - 5084 - 1669 - 4

I . 数... II . ①谢...②范...③王... III . 数学模型 - 高等学校 - 教材 IV . 022

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 074137 号

书 名	数学建模技术
作 者	谢兆鸿 范正森 王艮远 编著
出版、发行	中国水利水电出版社(北京市三里河路 6 号 100044) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: mchannel@public3.bta.net.cn (万水) sale@waterpub.com.cn 电话: (010)63202266(总机)、68331835(营销中心)、82562819(万水)
经 售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	北京万水电子信息有限公司
印 刷	北京市天竺颖华印刷厂
规 格	787×1092 毫米 16 开本 16.75 印张 398 千字
版 次	2003 年 9 月第一版 2003 年 9 月北京第一次印刷
印 数	0001—5000 册
定 价	25.00 元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社营销中心负责调换

版权所有·侵权必究

前 言

为了能对被研究的对象进行系统和深入地分析、掌握它的特征和规律、对它的静态和动态性能予以评价,并预测它的变化趋势,进而能做出正确的决策,对它进行有效的管理和控制,就必须建立被研究对象的数学模型,数学建模已成为对被研究对象的特性进行系统研究和仿真的必不可少的基础。但是也应该注意到,用数学建模的方法来解决问题是极具实践和创造性的过程,整个过程涉及到范围很广的技术和技巧,其中很多技术要通过实践和经验的积累才可获得。因此,任何与数学建模有关的课程必须要围绕实际工作中的具体实例,只有通过这样的方法,学生才可以以正确灵活的方式获得必要的技巧。这本书的目的是通过一定量的练习,指导学生系统地掌握一些基本的数学建模的技术和技巧。大量的经验说明,只有通过大量的从企事业的基本和复杂的经营活动中抽象出来的实际模型为范例的练习,才能逐步掌握这些技术和技巧。所以这本书无论是在科技还是商务领域,都可以作为数学建模课程的先导课本,在书中的每一章节,既强调与建模过程中有关的步骤和特殊的技术,又分析了与建模有关的一些相关的概念和方法,它们不可能仅通过阅读来掌握,只有不断地运用和实践,这些必不可少的技术才能被领会和掌握。

书中详细地分析和讲解了大量的实例和练习,它们来自各个行业,而且覆盖了不同的难度。有些章节中讨论的问题比较难,适于已有大学二年级以上水平的学生学习。对每章的练习,并没有按问题的难易来编排,书中提供了一些结论性的参考答案。书中的例题和习题有些来源于国内外数学建模方面的著作,有的来源于教学实践,有的则是历年全国数学建模竞赛的考题。本书内容力求由浅入深,揭示出数学来源于人类的社会活动、学好和掌握好数学能更好地为人类造福的重要意义。

当读者首次接触数学建模知识时,首先应阅读第1章,其中明确指出,数学建模是涉及若干步骤的结构性很强的过程,复杂的数学建模需要将书中所介绍的各种概念和技巧综合应用。第2章和第3章主要强调基本的建模技术,第5章~第8章归纳出专门的与建模有关的概念和方法,并提供了基于概念基础之上的、旨在开拓读者建模技巧的各种练习。从第4章开始,增加了实际综合应用的较复杂的例子,分析和叙述了在掌握了基本建模技能后,就可以通过不断的实践解决实际问题 and 进一步提高自己的建模水平。在数学建模中,利用计算机这一现代化计算工具是非常重要的和十分有效的,用它既可以进行数据处理,又可以进行数值计算、绘制图形和进行仿真。例如 Mathematica、MATLAB、LINGO、LINDO 等,因此书中还专门开辟了第9章,对以上4个软件,尤其是前两个,结合它们在数学建模中的应用进行了介绍。

最后应强调的是,本书并未能概括所有的建模技术和技巧,而且只包括了部分较复杂建模过程的实际运用的例子,类似的例子可在其他数学建模的书上找到。还应该指出的是,实

际应用中的数学建模,通常不是一种孤立的活动,因为它涉及多学科的知识,所以需要若干不同专业的技术人员的共同努力,需要全组人员的协同和密切的配合才可完成。

本书在编写过程中得到周大强教授、许桂水和高遵海副教授的鼎力相助,同时还得到许多教师和学生的的大力支持,在此对他们表示由衷的感谢。

由于时间仓促及作者水平有限,书中难免有错误及疏漏之处,恳请广大读者批评指正。

编者

2003 年 6 月

目 录

前言	1
第 1 章 建模概述	1
本章学习目标	1
1.1 概述	1
1.1.1 引言	1
1.1.2 本书的特点	3
1.2 数学模型的分类、特点和建模步骤	4
1.2.1 数学模型的几种主要类型	4
1.2.2 数学建模的一般步骤	4
1.2.3 数学模型的特点	5
1.2.4 数学建模对能力的培养	6
第 2 章 模型的建立	7
本章学习目标	7
2.1 数据的收集和分析	7
2.1.1 概述	7
2.1.2 应用实例	9
2.2 模型的建立	17
2.2.1 概述	17
2.2.2 应用实例	19
2.2.3 单位和符号	26
本章小结	28
习题	28
第 3 章 模型的开发与检验	36
本章学习目标	36
3.1 模型的开发	36
3.1.1 概述	36
3.1.2 应用实例	37
3.2 模型的检验	40
3.2.1 概述	40
3.2.2 量纲	41
3.2.3 应用实例	42
本章小结	47
习题	49

第4章 离散模型	54
本章学习目标	54
4.1 概述	54
4.2 多变量	55
4.3 矩阵模型	56
4.4 应用实例	57
4.4.1 基本实例	57
4.4.2 综合实例	62
本章小结	66
习题	66
第5章 连续模型	71
本章学习目标	71
5.1 概述	71
5.2 线性模型	72
5.2.1 单变量线性模型	72
5.2.2 多变量线性模型	72
5.2.3 同步线性模型	73
5.2.4 分段线性模型	73
5.3 非线性模型	74
5.3.1 二次模型	74
5.3.2 匀加速的公式	74
5.3.3 其他的非线性模型	74
5.3.4 趋于有限值的模型	74
5.3.5 变量的转换	75
5.4 周期模型	75
5.4.1 概述	75
5.4.2 周期模型的数据拟合	78
5.5 应用实例	79
5.5.1 基本实例	79
5.5.2 综合实例	88
本章小结	90
习题	91
第6章 微分与积分模型	98
本章学习目标	98
6.1 微分模型	98
6.1.1 概述	98
6.1.2 离散型和连续型的选择	100
6.1.3 基本应用实例	101
6.2 积分模型	105

6.2.1 概述	105
6.2.2 基本应用实例	107
6.3 综合应用实例	113
6.3.1 人口问题	113
6.3.2 室温变化的数学模型及其仿真	115
6.3.3 存储模型	119
本章小结	121
习题	121
第 7 章 微分方程模型	128
本章学习目标	128
7.1 概述	128
7.2 指数增减问题	129
7.3 一阶线性微分方程	130
7.4 非线性微分方程	131
7.5 力学问题	132
7.6 微分方程系统	133
7.7 应用举例	134
7.7.1 基本应用实例	134
7.7.2 综合应用实例	140
本章小结	142
习题	142
第 8 章 概率统计模型	150
本章学习目标	150
8.1 用随机数构造模型	150
8.1.1 概述	150
8.1.2 模拟定性随机变量	150
8.1.3 模拟离散随机变量	151
8.1.4 模拟连续随机变量	152
8.1.5 使用标准的模型	153
8.1.6 应用实例	154
8.2 模型数据的拟合	162
8.2.1 概述	162
8.2.2 一阶线性模型的拟合	164
8.2.3 Logistic 模型的拟合	165
8.2.4 周期模型的拟合	165
8.2.5 应用实例	166
8.3 综合应用实例	176
8.3.1 关于锁具装箱的方案设计	176
8.3.2 非线性交调的频率设计	181

8.3.3 零件参数优化设计	185
8.3.4 广告中费用的优化设计	188
本章小结	192
习题	192
第9章 数学建模常用软件介绍	201
本章学习目标	201
9.1 Mathematica 简介	201
9.1.1 概述	201
9.1.2 Mathematica 运行和基本操作	202
9.1.3 常用函数、常数和运算符	203
9.1.4 基本代数运算	205
9.1.5 微积分运算	206
9.1.6 线性代数	209
9.1.7 函数作图	212
9.1.8 简单编程	220
9.2 MATLAB 软件介绍	223
9.2.1 基本功能	223
9.2.2 数组与矩阵	225
9.2.3 简易绘图	225
9.2.4 三维绘图	227
9.2.5 MATLAB 函数	228
9.2.6 插值及曲线拟合	232
9.2.7 求数值积分	233
9.2.8 求数值微商	234
9.2.9 解微分方程	234
9.2.10 符号数学	236
9.3 LINDO 和 LINGO 简介	240
9.3.1 LINDO 软件简介	240
9.3.2 LINGO 软件简介	242
参考答案	246
参考文献	259

第1章 建模概述

本章学习目标

本章主要讲解数学模型和数学建模的基本概念、数学建模的作用和数学建模的主要步骤,介绍了数学建模竞赛的情况,并对全书各章节做了概括性的简介。通过对本章的学习,读者应该掌握以下内容:

- 数学模型和数学建模的定义
- 数学模型和数学建模的作用和意义
- 数学模型的几种主要类型和数学模型的特点
- 数学建模的过程和一般步骤
- 了解全书的内容和重点

1.1 概述

1.1.1 引言

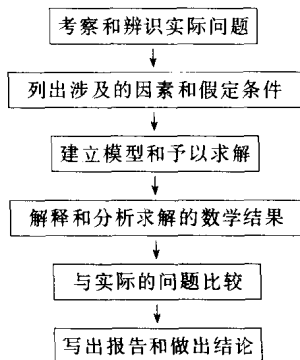
专家给数学建模下的定义是:“通过对实际问题的抽象和简化,确定变量和参数,并根据某些规律建立起变量及参数间的确定关系的数学问题(也可称为一个数学模型),求解该数学问题,解释验证所得到的解,从而确定能否用于解决问题的多次循环、不断深化的过程”。简而言之,就是建立数学模型来解决各种实际问题的过程。如实地将实际问题转换成可加以分析的数学问题,就构成了数学模型。根据数学模型推算出的结果,将能给待处理的实际问题提供十分有用的决策依据。实际问题来自不同的方面,有着不同的形式,从研究交通信号灯的设置到选排参加运动竞赛选手的阵容、从货物的分配到室内的装饰设计等。数学建模专家主要从事工业生产和商业流通领域模型的研究。但无论在什么地方,在生产车间、在家庭住所,还是在娱乐场所,都有许多具有共同点和需要用数学模型来解决的实用问题,因此需要将问题通过数学转换来构筑数学模型。

建模的关键并不是求解数学表达式,而在于是否能十分有效地将实际问题转换成数学方程,使产生的模型可用于对实际问题的求解,这是建模的关键。至于方程,可通过各种计算机来求解,所以建模的首要任务是全面地理解问题,然后将其转换成相应的数学形式。

不要以为用数学手段来描述问题的方法很容易,事实上,建模远比对由模型导出的公式进行求解难。因为实际的问题通常不以一种显含的数学形式存在,更困难的是,问题可能混杂在一起,不易完全分清。由于存在的问题不是纯数学问题,或者难以完整地了解它的特

性,所以,应该注重对问题的透彻理解和可能做的各种变换,以及检验由模型导出的结论的正确程度。

学习建模最重要的一步就是要分清建模必须涉及的由若干步骤组成的建模过程。该过程一般采用以下的建模流程图。



这种方法最早由英国的 Open 大学提出,它实际上是一个循环过程,需要多次反复执行这一过程直至结果令人满意。建模流程图是建模过程进行参考的框架,它提供了用模型求解问题的思路。也可以按通常建立数学模型应用的三个步骤来对实际问题 and 数学的关联做一个明确的归纳:

- (1) 建立模型:将实际问题转化成数学问题。
- (2) 数学解答:求解数学问题的数学解。
- (3) 模型检验:将获得的数学解应用到实际问题中,来检验模型的合理性和准确性。

随着社会的发展,数学在社会中的应用越来越广泛,作用越来越大,不仅在自然科学、人文科学、社会科学,而且在经济、军事、管理等领域都起着关键的作用。因此社会需要越来越多的有扎实数学功底的技术人才。但是,社会对数学的需求并不只是需要数学家和专门从事数学研究的人才,更迫切的是需要在各部门中从事实际工作的、能善于运用数学知识及数学的思维方法来解决实际问题的人才,从而取得经济效益和社会效益。也就是说,要能对复杂的实际问题进行分析,发现其中的可以用数学语言来描述的关系或规律。模型的共性是能真实地反映所模仿对象的某一方面的属性,例如常见的火箭模型、汽车模型、建筑模型,它们只是在外观(形状和比例)上与真实对象相同。而数学模型,是要根据被模仿对象的特征,尤其是它的变化(运动)规律,用数学语言去描述和模仿对象的实际的数量关系、空间形态、运动趋势等。既然是模型当然只是近似的,但又要尽可能地逼真,而实际的对象往往十分复杂,制约的因素很多,但建立模型时关键要考虑其中最主要的因素,舍弃其中的次要因素。一旦数学模型建立了,实际问题转换成了数学问题,就可以用数学工具、数学方法去求解了,求解时除了运用数学推理之外,通常还要处理大量数据和进行大量的计算,这些都由具有高速计算能力和快速处理数据及信息能力的计算机完成。从而为用数学模型解决实际问题开辟了广阔的道路。计算机以及相应的一些功能强大的数学软件成了解决数学模型必不可少的重要工具。建立和求解模型之后,模型和结果还要接受检验,如果数学模型建立得不好,不能正确地描述实际对象,则模型的数学解是无意义的。因此,在得出数学解答后还要让所得的结论接受实际检验,看它是否合理可行,如果不符合实际,还应设法找出原因,修改原来

的模型,重新求解和检验,只有经过多次修改和完善,才能获得一个较为理想的数学模型和求解方案。很多像牛顿一样伟大的科学家都是建立和应用数学模型的大师,他们将数学应用于各种不同的科学领域,在各自的学科中取得了巨大的成就。如力学中的牛顿定律、电磁学中的麦克斯韦方程组、化学中的门捷列夫周期表、生物学中的孟德尔遗传定律等都是经典学科中应用数学模型的光辉范例。

正是由于认识到培养应用型数学人才的重要性,从1983年起,在美国就有一些有识之士开始探讨组织一项应用数学方面的竞赛的可能性。经过论证、争论、争取资助,终于在1985年有了美国的第一届大学生数学建模竞赛,简称MCM(1987年以前的全称是Mathematical Competition in Modeling,1987年改为Mathematical Contest in Modeling,其缩写均为MCM)。竞赛由美国工业与应用数学学会和美国运筹学会联合主办。美国的MCM虽然只是美国的国内竞赛,但它欢迎其他国家的大学组队参加,而且有越来越多国家的大学参加这一竞赛。因此,在某种意义上它已经是国际性的竞赛。我国最早是在1989年,由北京的三所大学组队参加美国的MCM竞赛。到后来,我国参加MCM的学校越来越多,经过酝酿、筹备和在一些城市试办,从1992年开始由中国工业与应用数学学会举办我国自己的全国大学生数学模型竞赛(CMCM),国家教委对这项活动十分重视,决定从1994年起由国家教委高教司和中国工业与应用数学学会共同举办,每年一次。我国自己的MCM虽然举办的时间还不长,但发展非常迅速,在1995年的竞赛中,全国就共有259所高校、1234个队、3702名学生参加。之后,数学建模竞赛更加受到各高校和大学学生的重视,参加的高校数和学生人数逐年递增,到2002年,参赛队已达4000多个,参赛学生1万多人。现在,全国各高校已经把参加全国数学建模竞赛作为推动学校教学改革的一个重要契机。

1.1.2 本书的特点

本书的重点是培养读者掌握建立数学模型的必要的技术和技巧,书中并不注重解释在分析和求解模型时的数学技术,因为已经有很多书论述了这些问题。本书最关注的是对问题的特征的理解和模型公式的导出,这是整个建模过程中最关键的部分。在这里必须强调学习数学和应用数学的不同。在当今社会,用数学工具来分析和求解问题已成为对各行业进行研究,从而获得最佳解决方案的迫切需要。即使仅从考虑个人日常生活会遇到的问题出发,例如购物、申请贷款、经营股票、参加竞赛、装饰住房、日常锻炼等,所有这些活动都含有多种因素,了解它们的特性,从而对每种活动做出相应的对策,都需要求助于数学模型。一旦能用数学模型来分析和处理基本的较简单的问题,就能大大加强读者分析和处理因素更多、结构更复杂的综合性问题的信心。这些复杂的问题通常会在大学高年级或是在参加工作后遇到。通过对建模技术和技巧的研究,可以提高读者运用数学、统计学和计算机技术的能力。建模工作者需要不断地在建模过程中应用和积累他们在运用数学和统计学方面的经验,在计算机的帮助下,用数学模型来解决诸如生产计划、物质分配、工程设计、保险业务、商业销售、经济预测等问题。

目前在一些复杂的领域,例如天气预报和经济预测等,借助计算机来求解的数学模型比20年前更为准确和可靠,但是仍然有大量的工作要做,以进一步完善模型和增强它的功能。这只能在全面地了解了现存模型后方可进行,例如这些模型是如何建立的,做了什么假设等。现在不断涌现的新生事物也需要用数学模型来加以研究,例如疾病传播的分析、人口普

查、新产品市场的规划等。

本书特别强调建模流程图中开始的两个模块,较详细地论述了在此阶段会遇到的困难和需要的技巧,这并不意味着降低其后的模块的功能和作用,因为在建模过程中碰到的最大的困难往往是对实际问题的分析、理解和正确描述,从而将模型构成。书中提供了一系列的练习来帮助读者对建模概念的理解,建模方法的掌握和提高他们相应的技术和技巧。

书中的每一章都集中介绍了一种与建模步骤相应的技术和技巧,它的具体结构如下:

(1) 每章的概述介绍了解题思路,解释为什么和如何建模,阐述了相关的概念和具体的方法,并对与建模有关的技巧做了较为详细的说明。

(2) 给出了详尽的应用实例,其中不乏详细的对相关理论及具体应用的分析和说明,这部分读者应仔细阅读。

(3) 提供了更进一步的思考和练习,来检查和扩展读者的理解能力,以及实践与应用各章节介绍的建模思路和方法的能力。

(4) 给出了一些练习的参考答案。请注意,它们只是一些示范性的解答,应该还存在有更合适的答案。

本书和一般的书不同,它不仅要求读者阅读此书,而且要求读者能对书中给出的问题加以研究和实践,只有这样才能掌握建模的基本方法,并为进一步的学习奠定坚实的基础,这才是最有价值的。

1.2 数学模型的分类、特点和建模步骤

1.2.1 数学模型的几种主要类型

(1) 优化模型:根据已知信息对某一个目标进行优化(例如求最大最小值)而建立的模型。

(2) 微分方程模型:将所研究对象与已知因素用微分方程来描述其间关系的模型。

(3) 统计分析模型:用统计学中回归分布、相关分析、判别分析、方差分析、聚类分析等来建立的模型。

(4) 插值与拟合模型:根据已有的数据进行拟合获得关于某一事物的一般描述(方法有多项式回归、样条函数等)的模型。

1.2.2 数学建模的一般步骤

建模是十分复杂的创造性劳动,尽管需要研究的事物和对象不可胜数,这些事物和对象分属多种不同的学科和门类,但是,经过建模工作者长期的努力,已经摸索出一种切实可行的规律,形成了一种大体上的规范,数学建模的一般步骤应该是:

(1) 模型准备(分析问题)。拿到问题之后首先是了解问题的实际背景,明确建模的目的,查阅已有的资料,研究对象的各种信息、数据,弄清对象的特征,并在此基础上探讨解决问题的办法。

(2) 模型假设。根据实际对象的特性和建模目的,对与研究对象有关联的多种因素进行分析,找出主要与次要因素,本质与非本质因素,并用精确语言做出假设,这是建模的关键。不同的简化与假设会得到不同的模型,假设做得不合理或过于简单,会导致建模失败或部分失败,假设做得过多过细,会使模型太繁杂,令下一步工作无法进行。

(3) 模型建立。根据所做假设,利用适当数学工具来描述各变量之间的关系,建立相应的数学结构(公式、表格、图形等)即模型。数学工具应根据问题特征、建模目的及建模者的擅长而定。同一问题可采用不同的方法建立起不同的模型,但应遵循一个原则,那就是尽量采用简单的数学工具,以便建立的模型能被更多的人了解和使用,因为建模的最终目的是为了解决问题。

(4) 模型求解。运用适当的数学工具对模型求解。它包括数值解、解析解、图解、逻辑推理、定理证明等,其中必不可少的要借助计算机来完成。

(5) 模型仿真分析。对求得的结果进行数学仿真分析,通过各种参数的变化,用模型来做出数学预测,自动寻优来获得最优决策与最优控制。

(6) 模型检验。将模型仿真分析的结果返回给实际模拟的对象,用实际的结果对模型的合理性、适用性、正确性、灵敏性和鲁棒性做出评价。一般还包括误差分析、新旧模型比较、实际可行性(条件、经费等)分析等,这是十分重要的一步。若检验中发现有问题,但建模与求解无误,通常问题出在假设上,就应返回到第二步,修改假设并重新建模,如此多次反复,直至检验无误。

(7) 写报告作结论。

1.2.3 数学模型的特点

1. 模型的逼真性与可行性

这二者是一对矛盾,数学上总希望模型尽可能地接近研究对象,但逼真的数学模型往往伴随复杂的数学描述,导致很难甚至无法求解,更不用说通过数学模型对实际问题进行仿真、预测,进而实施决策和控制。另外,即使能通过较高层次的人力和物力的投入能求解,由于不能获得合理的经济效益,也是不可取的。所以建模时要在逼真与可行,投入与产出之间进行折中和抉择。

2. 模型的渐近性

复杂问题的模型通常不可能一次成功,往往要经过建模过程的反复迭代,不断地完善才能逐渐地逼近满意的模型。

3. 模型的鲁棒性

模型结构和参数取决于从对象获取的信息(数据),而观测数据存在一定的误差,当数据在允许的范围内出现微小变化时,鲁棒性强的模型的结构与参数将只发生很小的变化,不会出现模型的坍塌和崩溃。

4. 模型的可转移性

模型是现实对象的抽象化和理想化的产物,是现实对象共性的映射,因此它不为对象的所属领域独有,可以转移到相关的领域。

5. 模型的非确定性

由于实际问题千变万化,寻求的目标值也存在差异,人的思维角度和借助工具也不尽相同,所以使得建模本身很难有标准答案。

6. 模型的技艺性

建模与其说是一门技术,不如说是一门艺术,它类似一种雕塑,具有很强的技巧。经验、想象力、洞察力、判断力、直觉、灵感等在建模中会起到很大的作用。

7. 模型的局限性

第一、建模所得的结论虽然具有通用性和准确性,但是,因为模型是现实对象简化和理想化的产物,所以当将模型的结论应用于实际时,那些先前被忽视和简化了的因素必须考虑,来定性或定量地分析由此带来的误差,因此结论的通用和准确是相对的和近似的。第二、由于受人的认识能力和科学技术发展水平的限制,目前还有不少实际问题很难得到有实用价值的数学模型。至今还有一些领域中,尚未发展到能用建模方法寻找数值规律的阶段,例如传统的中医诊断技术、中药配伍技术等。

1.2.4 数学建模对能力的培养

数学建模当然要用到数学知识,但却与以往所说的那种数学不同,它要用到计算机,甚至离不开计算机,但却不是纯粹的计算机技术,它涉及物理、化学、生物、医学、电子、军事、农业、管理等各学科、各领域的知识,但也不是这些学科和领域里的纯知识的问题,它涉及各学科、各领域,但又不受任何一个具体的学科、领域的局限。它要用到各方面的综合知识,而且,建模工作者不只是要有各方面的知识,还要有驾驭这些知识,应用这些知识来处理实际问题的能力。知识是无止境的,因此还必须有善于获得新的知识的能力。总之,数学建模既涉及各方面的综合知识,又涉及各方面的综合能力。它的特点就是综合,它的优点也就是综合。

通过多年的数学建模的教学和培训,大家都意识到,数学建模技术的学习和应用培养了学习和实践者以下的能力:

- (1) 洞察能力,建模工作者善于从实际工作提供的原形中抓住其数学本质。
- (2) 数学语言翻译能力,既能把实际问题用数学的语言表达,又能将数学推导和计算得到的结果用大众化的语言表述。
- (3) 综合应用能力,能将数学知识和其他学科的知识进行综合应用。
- (4) 抽象联想能力,对一些初看起来完全不同,但经过一定的简化抽象,可获得雷同的数学模型,培养了他们的抽象思维和触类旁通的联想能力。
- (5) 自学和创新能力,在建立数学模型的全过程中,既学习到各种新知识、新技术,又掌握了对新知识和新技术实际应用的能力。

第2章 模型的建立

本章学习目标

本章主要介绍数学建模过程中数据的收集、分析和模型的建立,通过对本章的学习,读者应该掌握以下内容:

- 如何对收集的数据进行分析和处理
- 用直方图、饼图和曲线图对收集的数据进行描述
- 初步掌握模型建立的步骤和方法
- 通过建模实例学会分析问题、列出因素、给出假设并对问题进行描述

2.1 数据的收集和分析

2.1.1 概述

成功的数学建模不是一次就能建造完成的,首先要能用数据建造一个初始的模型。大多数工商业问题在开始和结束阶段都需要对数据进行量化分析。例如审批一个新的道路工程,如果缺乏从本地和全国的角度对收集到的有关交通需求和环境状况的数据进行详细分析,根本就无从入手。而当描述该工程问题的数学模型建立之后,对此数学模型输出的数据,将要依据造价、建造周期以及对周边环境的影响等加以评价后才能确定最终方案。前面在引言中已给出了建模过程的总的流程图,图 2.1 则给出了相应的数据流的过程。

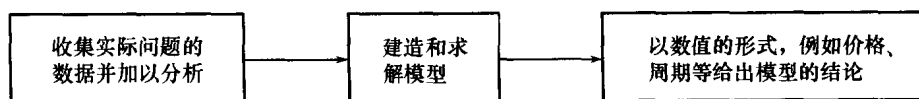


图 2.1 数据流图

事实上,在数学建模中数据的使用非常广泛,可以概括如下:

- 1) 在初始阶段,通过数据来寻找和假设与问题相关的重要因素,并指出它们之间存在的可能的联系。
- 2) 在研究开发阶段,确定模型中存在的参数和常数的值。
- 3) 在最终阶段,用实际数据与模型输出的数据进行比较,来检查模型的有效性和正确程度。

在本章中主要涉及第 1 项,第 2 项和第 3 项将在以后的章节中讨论。为强调这些数据

如何使用,下面给出一些例子进行说明。

问题 1: 欲购一套住房

方法: 到房屋销售处查询购房信息,考虑与购房相关的各种数据(作为输入),建立模型并输出求解结果。

结论: 用数据的形式,表示应选择的购房的价格及付款方式等。

问题 2: 超市经理开支票

方法: 审阅进货量及职工的工资等数据(作为输入)。

结论: 根据输入数据,决定应支出的总额并开出相应的支票。

问题 3: 兴建某住宅区的供水系统

方法: 收集小区面积、已有管道的供水能力、新设管道的路径、总的铺设费用等数据,分析上述数据后得出相应的结论。

结论: 根据结论选择最佳的供水计划和实施方案。

在以上的供水问题中,要充分预见今后的发展,使得当日后小区内某些地方需增加供水时,已有的管道网仍能满足需求。这个预见性因素,常常是建模的关键所在。这也强调了为什么人们不是简单地收集数据,预算成本,而是在理论的指导下,科学地全面地考虑事件的规律来建造一个模型的原因。

再举一个用数学模型描述水的流量规律的例子。首先分析管道中水流的特性,它和水与管壁之间的摩擦力、水流受到的重力等有关,然后寻求用什么数据可将摩擦系数确定。再给出一种完全不同的应用,即用数学模型来预测某种疾病的传播,只要能收集记录有关此疾病特性的大量的数据,就可用它们来计算和确定模型中相关参数的值。事实证明,当使用疾病流行时获取的完整和真实的数据,就可以建造有效的预测模型。

数据采集本身就具有一定的难度。如果是科技性的,它将根据被研究事件的不同,从而涉及不同的物理和化学原理,以及与之相应的定律和公式。另一方面,当要收集人们对十分关心的议题的看法时,则要采用公正和全面的民意测验。如果所需的数据已存在于某个数据库中,数据的收集就比较容易了。总之,不管在什么场合,数据都是驱动模型的“燃料”,显然,不正确的或贫乏的数据,将无法构造正确的数学模型。还应该指出的是,模型的灵敏度可以通过数据来检查,只要输入可信的数据,观测随输入数据变化的模型的响应,就可以对模型的有效性进行检测。

本章重点讨论在建模时有效数据的使用问题。如果数据已经收集,则根据数据自身的权重来显示和解释数据是一项非常重要的工作。数据恰好与数学等式吻合的情况是很罕见的,应用数据来拟合模型的方法将在第 8 章中介绍。统计分析常用来剖析数据间的联系。这里最令人感兴趣的是根据数据清晰的程度、置信度、变化趋势来进行有意义的推断,从而对数据所含的特性做出初步的评价。对一个想成为建模工作者的人,这是一项重要的基本技巧。根据可靠的统计分析而作出的表格和图形,常常可以如实地反映出一些很有价值的特征。在采集和分析数据时,通常要考虑到以下一些问题:

- 这些数据的取值是否客观。
- 数据采样的间隔是否合理。
- 是否确定了合适的变量名和采用了正确的量纲。
- 变化量采用的是绝对量还是相对量。