高等学校教学用書

机率論与数理統計学初步

褚一飞编著

机械工业出版社

高等学校教学用書

机率論与数理統計学初步

褚一飞 編著

机械工业出版社

1959

內容簡介

本書系作者在高等工业学校和北京中等專业教师进修学院講授机率論和數理統計学时的講稿經过整理編成的。

書中对机率論和数理統計学上的几个基本概念如随机事件、随机变量、机率的定义、統計总体、平均数、变异度、机率分布、大数法則、随机抽样、抽样誤差等重要概念，都作了比較詳細的叙述。

本書可作高等工业学校教学参考用書，也可供从事机械工业的工程技术人員参考。

NO. 3005

1959年7月第一版　　1959年7月第一版第一次印刷

787×1092 1/25　字数95千字　印張4 5/25　0,001—4,100册

机械工业出版社(北京阜成門外百万庄)出版

机械工业出版社印刷厂印刷　　新华書店發行

北京市書刊出版业营业許可証出字第008号　定价(10)0.55元

前　言

机率論与数理統計学的应用，已随着生产和科学技术的發展而逐漸扩大了。例如随机过程在自动控制和电訊技术方面的应用，統計理論在量子力学和半导体物理学上的应用，統計方法在机械工艺上对加工准确度的研究和产品質量檢查上的应用，統計抽样調查在工矿业，农业和貿易經济方面的应用，都促使机率論和数理統計学有更进一步的發展。目前我国高等学校除数学系一般都开設概率論等課程以外，高等工业学校在高等数学或工程数学等課程中也紛紛增加了机率論和数理統計学方面的內容。这本書的編写，主要是把我在高等工业学校和北京中等專业教师进修学院講授机率論和数理統計学时的一部分講稿稍加整理后編成的；这一講稿的对象，主要是初次接触这門科学，并且在数学基础上沒有学过集合論，实函数論或泛函分析等与現代机率論有关的数学，因此，在內容上（約講 16 小时）只能限于最初步的知識；这就是本書取名“机率論与数理統計学初步”的原由。同时，在編写过程中我希望具有高等代数和初等微积分知識的讀者都能全部看懂这本書。

由于这是一本初步介紹机率論与数理統計学知識的写作，因此，我对于机率論和数理統計学上的几个基本概念如随机事件，随机变量，机率的定义，統計总体，平均数，变异度，机率分布，大数法則，随机抽样，抽样誤差等重要概念，都叙述得比較詳細，某些方面可能有些讀者会認为是太累贅了；但在我的教学經驗中，我覺得这样做，对于初次接触这門科学的讀者們来說，还是比較有益的。

在編排和內容上，我主要按照“袁作新廖松譯龙西斯基著概率論及数理統計学要义”的內容和順序来安排的，因为当时我們采用它作为主要参考書，它是苏联高等工业学校的教材，比較适合于我們的教学对象；不过那本書是为水能專业編写的，而我們的讀者对象主要是一些搞机械制造，采矿，冶金等工程和研究金屬物理化学方面的，因此，

我們在选擇例題和結合应用方面，跟那本書的方向是不同的。本書最后两章随机抽样調査的数学理論和工业产品質量的統計檢查法主要是針对机械工业方面讀者們的需要而編写的。至于随机过程在工程控制論上的应用，也是机械和电机工业方面运用机率論解决工程問題的重要应用，但由于这一方面的理論需要較高深的数学基础，因此，在这本机率論和数理統計学初步中暫且不講它。

本書各章节的內容，都是参考新近出版的机率論和数理統計学的書刊編写的；但在編写过程中，我也参加了自己的意見；因此，对于引用各参考書时所产生的一切錯誤，自当由我个人負責，并且希望讀者們不吝指正和批評。

本書在論述（1）随机事件概念时，主要采用了陈昌曙著唯物辯証法的范疇——必然性与偶然性和郭力軍譯雅霍特著必然性与偶然性等著作中关于偶然性的見解；（2）机率的定义与机率的分布函数等概念时，根据丁寿田譯格涅金柯著概率論教程；（3）統計总体概念时，采用了楊善慈、朱曉嵐等譯雷若夫著矿体几何学中关于总体的見解；（4）白努里分布，卜阿松分布，高斯分布等重要机率分布时，主要根据机器制造百科全書第一卷曾一平譯包罗达切夫、齐高列夫著或然率理論概論；（5）大数法則的数学理論时，根据卜元震譯格涅金柯和辛欽合著概率論初阶和丁寿田譯德麟著工业技术数理統計学；（6）抽样誤差概念时，主要根据人民大学教研室譯廖佐夫著統計学原理第八章統計中的抽样調査；（7）工业产品質量的統計檢查法时，根据奚懋譯高斯节夫，别洛烏索夫合編机器制造中的产品質量檢查和鄒依仁，王建民，蔣瑛編著的工业产品質量統計檢查法。我对上列各書的著者和譯者敬致衷心的感謝。

关于習題，我介紹赵根榕譯龑杰尔和庫茲明合著的高等数学習題集第三卷第十七章中有大量关于机率計算的習題和答案，这是一本值得参考的著作。

編　者

目　录

第一章　机率論的研究对象与机率的定义

1　机率論的研究对象

宇宙間一切事物是相互联系着而不断發展的；在它們的联系和發展过程中，我們可以看到两种性質截然不同的变化。一种是有一定規則的，从而可以确切預料的变化，（例如在标准大气压下，我們把液体的水，加热到攝氏 100°，它必然会發生气化。再如把鉄加热到 1530°，它必然会溶化为液体。）这种变化是屬于必然性范疇的变化。各种科学研究的目的，就是要从自然界和社会現象中，認識这些变化的因果关系，并發現它們的規律。但，另一方面，在实际对具体事物的观察中，我們也常常会遇到并无一定規則而完全不能确切預料的变化，（例如人們在显微鏡下可观察到的布朗运动；再如在测量中，人們必然会观察到偏大或偏小的非系統性誤差。）这些变化的性質，和前面所講的那些必然性变化是完全不同的，我們无法确切預料这些变化的結果；我們只能够指出：这些事件可能有哪些結果。例如在布朗运动中，微粒可能往无穷多个方向移动，我們沒有方法确切断定个别微粒将要按照那一个方向繼續它的运动。屬于这一类的事件，就叫做**随机事件**。这些事件的变化，也就是哲学上所謂屬于偶然性范疇的变化。

随机事件是客观存在的，偶然性概念就是从这些客观存在的随机事件变化的性質中抽象出来的一种性質，所以它也是客观存在的。利用偶然性概念，我們也可以反过来說，**随机事件就是一切屬于偶然性范疇的事件**。

但須注意，随机事件这个概念，是一个科学的抽象，因为事实上任何具体事物的变化，并沒有單純受偶然性所支配，或單純受必然性所支配的事件。一切事件都是同时具有必然性的变化和偶然性的变化。例如具体一滴水的气化溫度，如果用相当精密的溫度計来度量，我們就会發現它未必毫无偏差地恰巧是攝氏 100°，它可能是九十几度几，

也可能是一百零几度几；这就說明：这滴水，一方面要受加热的影响，它必然会导致气化的結果，但另外它也受其它次要因素如純度等的影响，使气化現象得到加速或推迟；这些推迟或加速液体气化的因素的个数很多，但每个因素的作用并不显著，并且彼此会發生抵銷作用；因此，就具体的客观事物来講，偶然性和必然性是同一过程的两个方面，它們倆是对立的統一。对于任何具体事件，它和一切可以影响它發展的各种因素間的联系，有的可以对它發生确定不移的，稳定的，有一定傾向的联系；但另一方面，有的对它却只能發生暂时的，不稳固的，并无一定傾向的联系；这两种不同性質的联系，同时会在个别事件上發生作用，所以在具体的客观世界，單純受偶然性支配，或單純受必然性支配的事件，都是沒有的。但是为了更深刻地分别研究这两种不同性質的联系，我們在哲学上抽象地把它們概括成两个不同的范疇：必然性和偶然性；同样，在机率論上，我們也可以抽象地，把随机事件定义为純粹屬于偶然性范疇的事件，而机率論也就是以这里所定义的随机事件作为它的研究对象。

为了更具体地說明上述論点起見，我們再举一个例子。例如在某一自动机床上大量生产某种零件，在調整好机器和不断开动的条件下，則在一定时間內，它必然会生产出一定数量（例如 n 个）的零件甲。在这 n 件产品中，可能發現少数不合規格的零件（例如其中 k 个是廢品）。这里，在把原料或半制品加工成零件甲这一生产过程中，可能發生作用的因素很多，这些因素之間的联系，就有两种不同性質的联系：一种是确定不移的，稳定的，有一定傾向的联系，这种联系的結果，便是生产出大量合格的零件甲；但在同一加工过程中，某些因素也可能發生暂时的，不稳固的，并无一定傾向的联系，这种联系的結果，就有可能使得某几个零件变成了廢品。在这样的分析下，我們就可以把自动机床生产廢品这一事件，看成是随机事件；从而，我們也可以把有关这类生产的廢品率 $\frac{k}{n}$ 的問題，作为机率論和数理統計学的一个研究对象。

在充分利用机率論进行廢品率問題的研究中，我們可以抽象地假定：廢品的产生，乃是單純屬于偶然性范疇的事件；可是，在事实上，

每一个廢品的产生，都必定有它的原因；因此，从工程技术的观点来講，我們还应該追究它的眞正原因，設法消灭廢品的产生，这正是廢品技术分析的任务；在技术分析中，我們又应該把这一事件看成是屬于必然性范疇的事件。

从这一个例子，我們看到：同一具体事件，它既是偶然事件，又是必然事件。在某一科学中，我們可以片面地只考虑它是某一种事件。（它可能在这一科学研究中，被抽象地單純看成是必然事件；但在另外一些場合，我們也可能抽象地只考虑它單純是一个随机事件。）但須注意，人們抽象地把一具体事件單純看成是一个必然事件或偶然事件，这并不是說，具体某一事件的屬于必然性或偶然性范疇，完全由于人們主观意識的决定；相反的，我們知道：具体事件同时具有两种不同性質的变化（偶然性变化和必然性变化），同时也知道：必然性和偶然性都是客观存在的；因此，我們認为：必然事件和偶然事件，同样可以是同一具体事件的客观屬性。但在某一种科学研究中，我們可以抽象地把这具体事件單純地看成是偶然事件或必然事件。例如在前述例子中，我們在机率論上把生产廢品这一事件看成是偶然事件；而在工业技术分析上，人們却把它看成是必然事件。当我們抽象地把廢品現象單純地看成是随机事件，于是廢品率問題也就可以作为机率論与数理統計学的一个研究对象。

2 随机事件的运算

随机事件既是机率論的研究对象，今后我們就要对它进行各种运算。在运算过程中，必須采用某些符号，因此，我們首先应該对于这些符号加以簡單的說明。現代机率論是建立在集合論基础上的一个数学分支，所以关于随机事件的运算，我們也要采用集合論上通用的符号。

設在条件組Ⓢ的情况下，我們进行某种試験，試験的結果，可能發生随机事件 $\{a, b, c, \cdots\cdots\}$，这些事件构成一个集合，其中，$a, b, c\cdots\cdots$等是它的各个元素。

例如取两顆完全对称的六面体骰子，每个骰子的各面，分别标以

1，2，3，4，5，6等点子，其中，四点是紅色，其余都是黑色。我們用力任意擲一下这两顆骰子。这些說明，就是上述条件組Ⓢ的描述。这一事件是一个屬于偶然性范疇的事件，因为我們不能預先断定这两顆骰子将出現什么顏色，什么点数。

現在我們用字母 a，b，c……分别表示这一試驗所能产生的各种随机事件。例如使：

a　表示这两顆骰子都是紅色；

b　表示这两顆骰子都是黑色；

c　表示这两顆骰子的顏色不同；

d_i　表示这两顆骰子的点数的和 S 是 j 的倍数（$j=2, 3, 4, 5, 6$）；

e_k　表示这两顆骰子的点数的和 S 等于 k（$k=2$，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12）；

U　表示这两顆骰子的点数的和 S 介于2与12之間（$2 \leqslant S \leqslant 12$）；

V　表示这两顆骰子的点数的和 S 在2与12以外（$S<2$ 或 $S>12$）；

这一試驗的各种可能結果，便构成一随机事件集合，我們用下列符号表示它：

$$\{a, b, c, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, U, V\}。$$

这一集合的元素个数是有限的，它是一个有穷集合。

再例如在复平面的实数軸上任意选取一点 M。在这复平面上，与几何点 M（見圖 1.1）相对应的复数是：

$$z=x+iy$$

其中，x，y 都是实数，$i=\sqrt{-1}$。現在我們用：

a_x　表示 M 在实軸的某一点上，即指定 $z=x$；

U　表示 M 在实軸上，即 z 可以是任一实数（$y=0$，$-\infty<x<\infty$）；

V　表示 M 不在实軸上，即 $z=x+iy$ 不是一实数（$y \neq 0$）；

这一試驗的各种可能結果，也构成一随机事件集合，我們用下列符号表示它：

$$\{a_x, U, V\}\ (-\infty<x<\infty)；$$

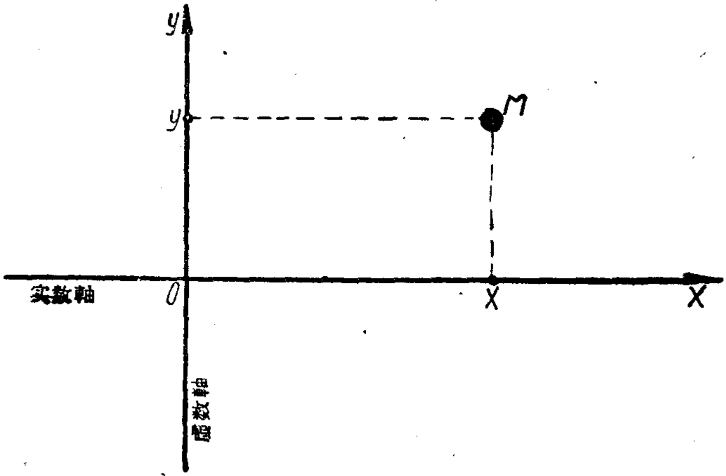

圖 1.1

这一集合的元素个数是无限的，它是一个不可数的无穷集合（它是数軸上的点集，x 是一个連續变量)。

再如在上一例子中，把命題改为“使实軸上任意选擇的几何点 M 落入綫段（$n-1, n$）內”，这随机事件集合便应改写成：

$$\{a_n, U, V\} \quad (n=1, 2, 3, 4\cdots\cdots)$$

这一集合的元素的个数也是无限的，它是一个可数的无穷集合。

上面說明了表示随机事件集合的符号，現在我們可以进一步考慮两个集合間的关系。它們的关系可以分成一般关系和特殊关系两种。設使 D_2 表示上述第一例子中两顆骰子点数的和 S 为 2 的倍数，D_3 表示和数 S 为 3 的倍数：

$$D_2=\{e_2, e_4, e_6, e_8, e_{10}, e_{12}\}$$

$$D_3=\{e_3, e_6, e_9, e_{12}\}$$

这里，集合 D_2 与 D_3 的元素，彼此有相同的，也有不相同的，这两个集合的关系是一般关系。两个具有一般关系的集合 A 和 B，我們可以用下列圖形表示它們（見圖1.2)。

至于两个集合間的特殊关系，則又可分成三种情形：（一）包含关系；（二）等价关系；（三）分立关系。

例如 D_2 表示两顆骰子点数的和 S 是 2 的倍数，A 表示两骰子的朝

上一面都是紅色：

$$D_2=\{e_2,\ e_4,\ e_6,\ e_8,\ e_{10},\ e_{12}\}$$
$$A=\{\text{紅紅}\}$$

这里，A的一切元素都包含在集合D_2里，我們就說：A和D_2是包含关系，我們用下列符号表示这关系（这里是D_2包含A，A是包含在D_2里）：

$$A\subset D_2$$

就一般的情况来講，如果集合B包含A，我們就写：$A\subset B$（或$B\supset A$），并用下列圖形表示它們（見圖1.3）。

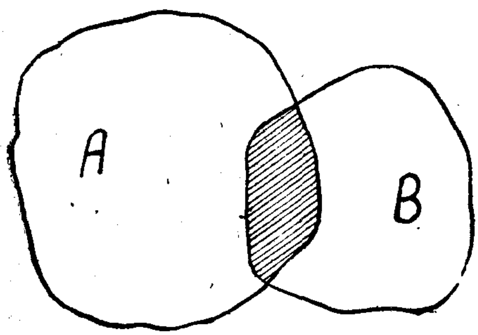

圖 1.2

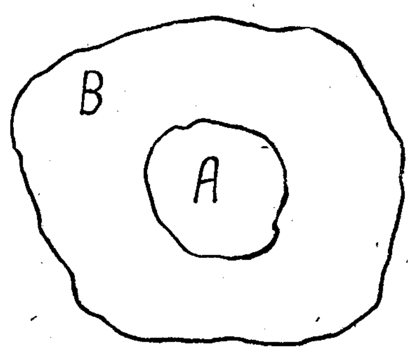

圖 1.3

这里，A又叫做B的子集。

又如果B包含A，同时，A也包含B：

$$\begin{cases}A\subset B\\ B\subset A\end{cases}$$

那末，A和B的关系，便是等价关系；也就是說，它們倆的所有元素是完全相同的。例如：

A表示两顆骰子的朝上一面都是紅色

B表示两顆骰子的朝上一面都是四点

这里，A和B便是两个等价的随机事件，从而，表示这两随机事件的集合也是等价的。表示等价关系的符号是：

$$A\subseteq B \qquad \text{或} \qquad A=B$$

两个等价集合的圖形是彼此重合的（見圖1.4）。

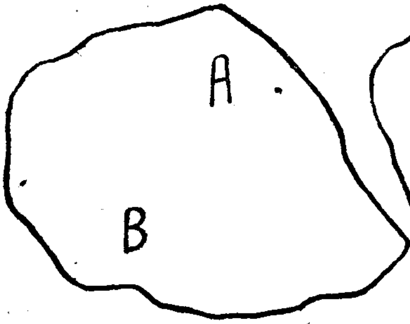

圖 1.4

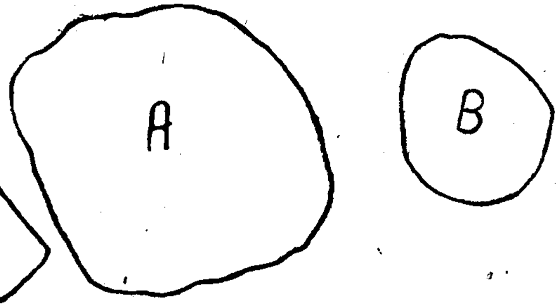

圖 1.5

又如果集合 A 和 B 的元素，彼此沒有一个是相同的，那末，它們便是彼此分立的；这里，与这些事件相对应的随机事件，就叫做互斥事件，或互不相容的事件。例如：

A　表示两骰点数的和 S 是双数

B　表示两骰点数的和 S 是單数

$A=\{e_2,\ e_4,\ e_6,\ e_8,\ e_{10},\ e_{12}\}$

$B=\{e_3,\ e_5,\ e_7,\ e_9,\ e_{11}\}$

两种分立的集合 A 和 B，我們可以用圖1.5的圖形表示它們的关系。

上面說明了两个集合或随机事件間的关系以后，我們可以进一步定义随机事件或集合的乘积，和与差。

两个随机事件 A 与 B 的乘积，便是 A 与 B 同时出現的联合事件，亦称积合事件；表示这种联合事件的符号是：

$$A\cap B$$

这在集合論上叫做 AB 的交集，亦称并集或联集；它的圖形是下圖的

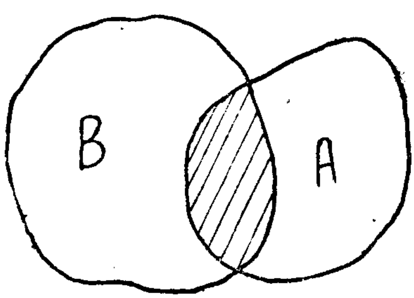

圖 1.6

公共部分（画有斜紋的部分）:

例如 D_2 表示两骰点数的和是 2 的倍数

D_3 表示两骰点数的和是 3 的倍数

D_6 表示两骰点数的和是 6 的倍数

则 $$D_6 = D_2 \cap D_3$$

两个随机事件 A 与 B 的和，便是 A 或 B 至少有一出現的事件；表示这种事件的符号是:

$$A \cup B$$

或: $A \dotplus B$，这在集合論上叫做 A 与 B 的和集；它的圖形是下圖 A 与 B 的全部（用斜紋表示的部分）:

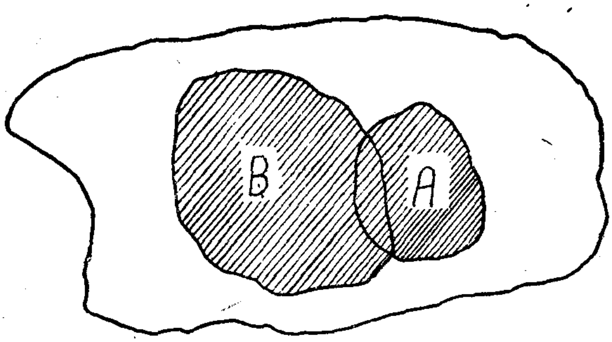

圖 1.7

例如 $D_2 \cup D_3 = \{e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_6,\ e_8,\ e_9,\ e_{10},\ e_{12}\}$

随机事件 A 减去 B 的差，便是只要 A 出現而 B 絕不出現的事件；表示这种事件的符号是:

$$A - B$$

或 $$A / B$$

这在集合論上叫做 A 与 B 的差集；它的圖形見圖1.8（有斜紋部分）。例如在上述任擲两骰的例子中:

$$D_2 - D_3 = \{e_2,\ e_4,\ e_8,\ e_{10}\}$$

也有把随机事件的差只限于彼此有包含关系的情形，则 A 减 B 的差，应改写成:

$$A - AB$$

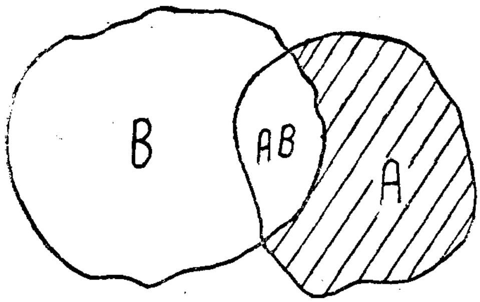

圖 1.8

例如 $$D_2-D_2D_3=D_2-D_6=\{e_2,\ e_4,\ e_8,\ e_{10}\}$$

其中，D_2D_3 是乘积 $D_2\cap D_3$ 的簡写。

又在随机事件的运算中，我們也常常用其它如可靠事件，不可能事件，对立事件等术語。現在也把这些术語加以簡單的説明。可靠事件是指在試驗中一定会發生的事件，我們 用符 号 U 表示 它；它 的圖形是：

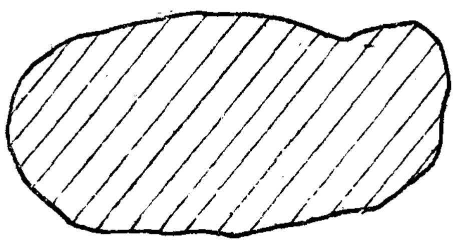

圖 1.9

例如两骰点数的和 S 介于 2 与 12 之間：

$$U=\{e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ e_6,\ e_7,\ e_8,\ e_9,\ e_{10},\ e_{11},\ e_{12}\}$$

不可能事件是指在試驗中决不会發生的事件，我們用符号 V 表示它；它的圖形是：

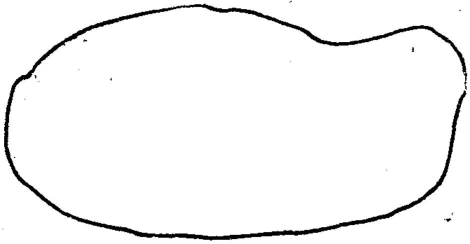

圖 1.10

例如两骰点数的和 S 小于或等于 1，大于或等于 13:

$$V=\{\cdots\cdots e_1,\ e_{13},\ e_{14},\ e_{15}\cdots\cdots\}$$

随机事件 A 的对立事件，就是指事件 A 不發生的事件，我們用符号 $\overline{A}$ 表示它；它的圖形是（有斜紋部分）:

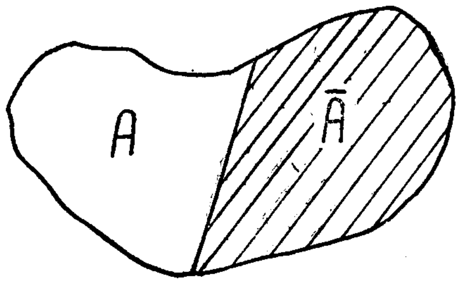

圖 1.11

例如两骰点数的和 S 是 3 的倍数这一随机事件 D_3 的对立事件 $\overline{D_3}$ 便是:

$$\overline{D_3}=\{e_2,\ e_4,\ e_5,\ e_7,\ e_8,\ e_{10},\ e_{11}\}$$

此外，在随机事件較比复杂的运算和分析中，我們也要用到随机事件的特款，完备事件群和事件体等名詞；对于这些名詞，我們也有略加解釋的必要。

設使随机事件 A 是若干个两两互斥的事件 B 的和，那末，各个 B 就叫做随机事件 A 的特款:

$$A=B_1+B_2+\cdots\cdots+B_i+\cdots\cdots+B_j+\cdots\cdots+B_k$$

其中 $\qquad B_i\cap B_j=V \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3\cdots\cdots k)$

例如两骰点数的和 S 是一 3 的倍数，这一随机事件 D_3 便是两两互斥的随机事件 e_3，e_6，e_9，e_{12} 的和:

$$D_3=e_3\dot{+}e_6\dot{+}e_9\dot{+}e_{12}$$

这里，e_3，e_6，e_9，e_{12} 便是 D_3 的特款。

如果若干个两两互斥的随机事件 B 的和是一可靠事件 U，那末，这些事件 B 就构成一完备事件群；各个随机事件 B 也叫做基本事件:

$$B_1\dot{+}B_2\dot{+}\cdots\cdots\dot{+}B_k=U$$

其中，$\qquad B_i\cap B_j=V \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3\cdots\cdots k)$

例如在上述任擲两骰的例子中，随机事件 e_k ($k=2,\ 3,\cdots\cdots 11,\ 12$)