等离子体物理学与受控热核反应的问题

第二卷

苏联科学院原子能研究所编

科学出版社

等离子体物理学与受控热核反应的问题

第二卷

苏联科学院原子能研究所編

中国科学院原子核科学委員会編委会譯

科学出版社

1962

ФИЗИКА ПЛАЗМЫ И ПРОБЛЕМА УПРАВЛЯЕМЫХ ТЕРМОЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ (Том II)

Институт атомной энергии АН СССР

Издательство АН СССР, 1958

内 容 簡 介

“等离子体物理学与受控热核反应的問題”这一部文献收集了苏联科学院原子能研究所从 1951 年到 1958 年所完成的理論的和实验的工作报告百篇左右，这些报告都是过去未曾在杂志上发表的. 全书按所包括的工作的完成先后分成四卷，第一卷的中譯本已于 1960 年出版，其余各卷即将陆續出版.

本书第二卷收集了 1953—1955 年的工作报告 20 篇，其中討論的問題包括外部縱向磁場对等离子体柱的影响、在氣中放电时的中子輻射及其研究、相对論性等离子体的迁移方程、等离子体柱的电极热損失、等离子体电导率的測定以及其他，等等.

本卷所包括的工作虽然完成时間較早，但其中所研究的多是有关等离子体和受控热核反应的基本問題，因此，它們对我国讀者仍有很大价值.

本书可供有关方面的科学研究工作者、工程师、大学师生閱讀.

等离子体物理学与受控热核反应的问题

（第二卷）

苏联科学院原子能研究所編

中国科学院原子核科学委員会編委会譯

*

科学出版社出版（北京朝阳門大街 117 号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷　新华书店总經售

*

1962 年 3 月第 一 版	书号：2486 字数：281,000
1962 年 3 月第一次印刷	开本：850×1168 1/32
（京）0001—6,500	印张：10 5/8 插頁：5

定价： 1.65 元

目　　录

在电极上有热损失的等离子体柱*

布拉金斯基 (С. И. Брагинский)
沙弗兰諾夫 (В. Д. Шафранов)

§1. 引　　言

本文試图研究带有电极的等离子体柱. 电极的存在导致各物理量沿軸綫而变化,这与文献[1,2]中所研究的无限长等离子体柱中所应发生的情况不同.

很易表明,当等离子体的惯性和粘滞性可以忽略不計,并且等离子体柱的固有电場小于磁場时,柱体內的压強、电流密度与磁場沿軸綫沒有变化.

現在研究离子及电子的溫度和电場沿柱体軸綫(即 z 軸)变化的定态問題. 柱体被看作是与壁脫离的:即柱体中释出的全部热量都传到电极上. 同时也研究了轫致輻射热損失显著的情况.

問題在下面两种极限情况下得到了解决:"強脫离"的情形($T_e \gg T_i$)和"弱脫离"的情形($|T_e - T_i| \ll T_e$). 在弱脫离时等离子体的溫度按 $T \sim (l - z)^{2/5}$ 的規律沿軸綫变化. 在阳极上($z = 0$)从高溫到阳极溫度的过渡实际上是以突变的方式在一薄层中进行的. 由于离子的热导率大,溫度的径向变化很小. 就象对于无限长的柱体一样,$\Pi = \dfrac{e^2N}{Mc^2} \gg 1$ 是弱脫离的条件. 已經得出定态柱体半径及其中电流与外加电压的关系式. 在強脫离时,电子溫度按弱脫离时的規律沿軸綫变化. 在柱体所有点上,強脫离的条件为 $\Pi \ll \sqrt{m/M}$.

---

* 本工作完成于 1953 年.

等离子体的温度从数量級說等于加在柱体上的电压. 在我們所研究的情况下,伏安特性曲綫是上升的($I \sim \sqrt{V}$), 一直增长到輻射开始为止. 与无限长柱体的情况一样,輻射的存在使得定态下的电流不能超过某一极限値.

沿柱体軸綫的总能量通量由与电流有关的对流通量$-\frac{5}{2}\frac{j}{e}T$及电子和离子的漂移通量迭加而成（"磁化"热导率可略去不計）. 在強脫离时,电子的漂移通量具有与对流通量相同的数量級,并且取同一方向（指向阳极）. 在实际上最有意义的弱脫离的情况下,离子和电子的漂移通量几乎完全相互抵銷（精确到 $\Delta T/T$）,于是只剩下电子的对流通量. 这个能量通量是指向阳极的.

自然可以預料到, 在非定态的情况下, 特別是在弱脫离情况下,当沒有漂移通量时,电极上能量損失的数量級将与定态情况下相同.

§2. 基 本 方 程

带电极柱体的問題具有軸对称$\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}=0\right)$. 在这种情况下,可以假設 $j_\varphi = en(v_{i\varphi} - v_{e\varphi}) = 0$, 并設磁場只有一个分量 H_φ. 我們将表明,在一定的附加条件下,可以設压強 $p = p_e + p_i$, 电流密度 $j = en(v_i - v_e)$ 和磁場 $H_\varphi = H$ 沿柱体軸綫不变, 即化軸对称为柱对称.

如果将慣性和粘滞性（压強的各向异性）略去不計,則等离子体的平衡方程为

$$-\nabla p + \frac{1}{c}[jH] = 0. \tag{2.1}$$

用算符 rot 作用于这个方程, 并利用麦克斯韦方程, 不难得出 $j_r = 0$. 因而 $\partial H_\varphi/\partial z = 0, \frac{\partial p}{\partial z} = 0$.

在本文所討論的定态情况下,从連續性方程得出 $v_{ri}=v_{re}=0$. 我們还要設沿 z 軸的离子速度等于零($v_{zi}=0$), 于是 $j=-env_{ze}$.

这样，方程組就大大地簡化了．我們要預先引入一些无量綱变量，而写出这个方程組．这些无量綱变量等于眞値与相应測量单位的比，測量单位选择如下(符号与文献[1]中相同)：

$$H_0=\sqrt{4\pi p_0};\ E_0T_0^{3/2}=\frac{c\sqrt{p_0}}{\sqrt{4\pi}\,\sigma_1 r_0};\ \ p_0=n_0T_0;$$

$$q_0=cp_0\frac{E_0}{H_0}=\frac{c^2p_0}{4\pi\sigma_1T_0^{3/2}r_0};\ \sigma_1=\frac{3}{4\sqrt{2\pi m}\,\lambda_{庫侖}e^2}. \tag{2.2}$$

由此得出如下关系式：

$$\frac{T_0}{er_0E_0}=\frac{\sqrt{4\pi}\,\sigma_1T_0^{5/2}}{ec\sqrt{p_0}}=(\omega_e\tau_e)_0=\omega_0\tau_0. \tag{2.3}$$

在用我們所选定的单位表示时，定态柱体的方程組可写成如下形式(見[2]或[3])：

$$\operatorname{div}\left(\mathbf{q}_e-\frac{5}{2}\,\omega_0\tau_0\mathbf{j}T\right)=jE_z-\Delta Q-Q_{輻}; \tag{2.4}$$

$$\operatorname{div}q_i=\Delta Q; \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z}=\frac{\partial E_z}{\partial r}; \tag{2.6}$$

$$j=\frac{1}{r}\frac{d(rH)}{dr}=-\frac{1}{H}\frac{d(p_e+p_i)}{dr}. \tag{2.7}$$

这里热轉移

$$\Delta Q=12\pi r_0^2n_0\frac{e^2}{Mc^2}\frac{n^2}{T_e^{3/2}}(T_e-T_i), \tag{2.8}$$

輻射損失

$$Q_{輻}=\beta n^2\sqrt{T_e}=\frac{4\pi\sigma_1p_0r_0^2\beta}{c^2}n^2\sqrt{T_e}. \tag{2.9}$$

在方程(2.4)中的$-\frac{5}{2}\omega_0\tau_0\mathbf{j}T$項是电子的对流热通量．以后将可看出，該通量主要与轉移給电极的热有关．在强脫离的情况下，电子漂移通量(表式中的第一項q_e，其結构与对流通量的一样)也起作用．旣然漂移通量与径向温度梯度有关，則在径向热导率

大的情况下(这发生在例如不脱离的情况下)，漂移通量是不重要的.

現在以分量形式写出无量綱热通量的表式:

$$q_{er} = -\frac{5}{2}\omega_0\tau_0\frac{nT_e}{H}\frac{\partial T_e}{\partial z} - 4.66\frac{n^2}{H^2T_e^{1/2}}\frac{\partial T_e}{\partial r} + \\ + \frac{3}{2}\frac{n}{H^2T_e^{1/2}}\frac{\partial[n(T_e+T_i)]}{\partial r}; \tag{2.10}$$

$$q_{ez} = \frac{5}{2}\omega_0\tau_0\frac{nT_e}{H}\frac{\partial T_e}{\partial r} - 4.66\frac{n^2}{H^2T_e^{1/2}}\frac{\partial T_e}{\partial z}; \tag{2.11}$$

$$q_{ir} = \frac{5}{2}\omega_0\tau_0\frac{nT_i}{H}\frac{\partial T_i}{\partial z} - \left(\sqrt{\frac{2M}{m}} + \frac{15}{2}\frac{T_i}{T_e}\right)\frac{n^2}{H^2T_i^{1/2}}\frac{\partial T_i}{\partial r}; \tag{2.12}$$

$$q_{iz} = -\frac{5}{2}\omega_0\tau_0\frac{nT_i}{H}\frac{\partial T_i}{\partial r} - \left(\sqrt{\frac{2M}{m}} + \frac{15}{2}\frac{T_i}{T_e}\right)\frac{n^2}{H^2T_i^{1/2}}\frac{\partial T_i}{\partial z}. \tag{2.13}$$

电場的表式如下:

$$E_r = \omega_0\tau_0\frac{1}{n}\frac{\partial(nT_i)}{\partial r} - \frac{3}{2}\frac{n}{HT_e^{3/2}}\frac{\partial T_e}{\partial z}; \tag{2.14}$$

$$E_z = \omega_0\tau_0\frac{1}{n}\frac{\partial(nT_i)}{\partial z} + \frac{3}{2}\frac{n}{HT_e}\frac{\partial T_e}{\partial r} - \\ - \frac{1}{HT_e^{3/2}}\frac{\partial[n(T_e+T_i)]}{\partial r}. \tag{2.15}$$

脫离壁的柱体的边界条件如下：热通量 q_{er} 和 q_{ir} 在中心和在压強等于零的柱体边緣上应等于零；只有在細致地研究了电极上的过程后才能得到柱体两端(电极附近)的条件. 最簡单的情况是要求电极上粒子的温度等于零.

§3. 强 脫 离

我們先研究一下电子溫度与离子溫度強脫离的情形 ($T_e \gg\gg T_i$). 在这种情况下，如果在电子的方程中处处把离子溫度略去不計，則可以求出电子溫度、場 H、压強 $p = nT_e$，然后由离子的热迁移方程求出离子的溫度，并由 $T_i \ll T_e$ 的要求决定出定态情

况下可能发生強脱离的条件.

要解非綫性二次偏微分方程組是十分困难的. 但是如果略去沿軸綫通量的表式中的第二項(即"磁化"热导率), 則方程組可大大簡化. 显然, 当此項(按数量級等于 $\partial T/\partial z$, 长度測量单位为 r_0) 与 q_z 表式中第一項 $\left(\text{即"漂移"热导率, 其数量級为 } \omega_0\tau_0 \dfrac{\partial T}{\partial r}\right)$ 比較其作用不大时,是可以这样做的. 与此相应,必須取 $E_r = 0$, 于是由方程 $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0$ 得知,纵向电場只是 z 的函数:

$$E_z = E(z). \tag{3.1}$$

略去 q_z 和 E_r 表式中带有 $\dfrac{\partial T}{\partial z}$ 的項意味着略掉热迁移方程和方程 $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0$ 中带有二次导数 $\dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ 的項; 因此所余下的方程組的解不能滿足两个电极上的边界条件. 但是,这并不会造成什么重大的困难,因为近似解对于柱体的各个区域都是适用的,只有狹窄的近电极区除外,在这里困难是在于不了解电极附近的现象,而不是解方程的困难. 可以表明,省略了对 z 的二次导数項的方程組的解应为

$$T(r, z) = T(r)\cdot T_1(z). \tag{3.2}$$

为此,我們要在方程(1.4)中代入导数 $\dfrac{\partial H}{\partial r}$, $\dfrac{\partial p}{\partial r}$, $\dfrac{\partial T}{\partial r}$, 并应用关系式

$$j = \frac{1}{r}\frac{d(rH)}{dr} = -\frac{1}{H}\frac{dp}{dr} \tag{3.3}$$

和

$$E_z = \frac{3}{2}\frac{n}{HT^{3/2}}\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{HT^{3/2}}\frac{\partial(nT)}{\partial r} = -\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{T^{3/2}}\right) \tag{3.4}$$

把方程(1.4)变换成

$$q_r\left(\frac{2}{r} - \frac{j}{H}\right) + \frac{jE}{2} + \left(\frac{2}{3}\times 4.66 - \frac{3}{2}\right)\frac{p}{HT^{3/2}}\frac{dj}{dr} = 0. \tag{3.5}$$

式中省略了 ΔQ 和 $Q_{\text{輻}}$这两項,因为在強脱离情况下它們非常小.

不难看出, 式(3.5)中第一項在 $r = 0$ 时等于零. 因此, 当

$r = 0$ 时可以令剩余两项的和等于零:

$$\frac{j_0 E}{2} + 1.6\left(\frac{p}{HT^{3/2}}\frac{di}{dr}\right)_0 = 0. \tag{3.6}$$

把式(3.4)的如下积分結果代入(3.6):

$$\frac{p}{T^{3/2}} = -E(z)W(r) + C(z), \tag{3.7}$$

式中

$$\frac{dW}{dr} = H(r),$$

得出

$$\frac{j_0}{2} + 1.6W(o)\left(\frac{1}{H}\frac{di}{dr}\right)_0 = -1.6\left(\frac{1}{H}\frac{di}{dr}\right)_0\frac{C(z)}{E(z)}. \tag{3.8}$$

由此得出 $C(z)/E(z) =$ 恆量(因为 i 及 H 与 z 无关),于是由式(3.7)得知,解应該具有(3.2)的形式. 可以取 $E^{2/3}(z)$ 作为函数 $T(z)$,并求出如下形式的解:

$$T(r, z) = T(r)E^{-2/3}(z). \tag{3.9}$$

把(3.9)代入(3.5)或(1.4),由分离的条件得

$$\frac{5}{2}\omega_0\tau_0\frac{\partial T}{\partial z}\frac{1}{E(z)} = -\lambda, \tag{3.10}$$

由此得

$$E(z) = \left(\frac{\omega_0\tau_0}{\lambda}\right)^{3/5}\frac{1}{(l-z)^{3/5}}; \tag{3.11}$$

$$T(r, z) = \left(\frac{\lambda}{\omega_0\tau_0}\right)^{2/5}(l-z)^{2/5}T(r). \tag{3.12}$$

式中 l 是积分恆量; λ 是分离参数,它应該从零点和在柱体边緣的边界条件求出.

分离后剩下的方程組为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{H}{r}\frac{d(rH)}{dr} + \frac{dp}{dr} = 0,\\
&H + \frac{d}{dr}\left(\frac{p}{T^{3/2}}\right) = 0,\\
&q = \left(\lambda T - \frac{3}{2}\right)\frac{p}{H} - \frac{2.41}{H^2}\frac{p^2}{T^{5/2}}\frac{dT}{dr},\\
&\frac{1}{r}\frac{d(rq)}{dr} + \frac{1}{H}\frac{dp}{dr} - \frac{\lambda}{H}\frac{d(pT)}{dr} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

这个方程組在下列条件下积分:

$$\left.\begin{array}{lll} p(o)=1; & T(o)=1; & q(o)=0; \\ p(a)=0; & H(o)=0; & q(a)=0, \end{array}\right\} \quad (3.14)$$

式中的柱体半径 a 和参数 λ 的选择要能够满足上述条件. 結果得到 $\lambda=1$, $a=1.8$.

恆量 l 的值与近阴极区中的現象有关. 如果有一个狹窄的区域, 在該区域里由阴极出来的冷电子获得了温度 $T_{阴}\sim 1$, 則 l 应当根据当 $z=L$ 时 $T(r, L)=T_{阴}$的条件求出. 下面我們假設 $l=L$. 現在假定柱体单位长度的平均粒子数 $N=N_{总}/L$ 及加到柱体上的电压 V 为給定的, 而来求这种情况下的压強、电流、电場和柱体半径的値. 更精确地說, 这里的电压 V 是在我們的解适用的区域内的电压, 因为在电极附近区域内可能有显著的电压降, 这个电压降在近似解中不能考慮到.

首先应該指出, 令 p_0 为柱体軸綫上的压強, $E_0T_0^{3/2}$ 为柱体軸綫上与 z 无关的乘积 $ET^{3/2}$ 后, 在作为測量单位的三个独立的量(可以取 E_0, T_0, p_0 作为这三个量)当中, 我們只有两个. 仍旧可以任意选择 T_0. 为了便于进行以后的計算, 我們取柱体軸綫上的温度的最大値(当 $z=0$ 时)作为 T_0. 于是从(3.12)和(3.11)得出

$$\frac{\omega_0\tau_0 r_0}{\lambda L}=1; \quad (3.15)$$

$$T=T_{最大}\left(1-\frac{z}{L}\right)^{2/5}T(r); \quad (3.16)$$

$$E=E_0\Big/\left(1-\frac{z}{L}\right)^{3/5}. \quad (3.17)$$

除了(3.15)外, 为了求 $T_0=T_{最大}$, E_0, p_0、r_0, I, 还有下列几个明显的条件:

$$V=\int_0^L E dz; \quad (3.18)$$

$$N=\frac{1}{L}\int_0^a 2\pi r dr\int_0^L n(r, z)dz; \quad (3.19)$$

$$H(a) = 2I/ca, \tag{3.20}$$

以及关系式(2.2).

把式(3.18)和(3.19)积分，得

$$E_0 = \frac{2}{5}\frac{V}{L}; \tag{3.21}$$

$$\frac{10}{3}\pi\gamma_1\frac{p_0}{T_0}r_0^2 = N. \tag{3.22}$$

式中

$$\gamma_1 = \left(\int_0^a \frac{p}{T}\, rdr\right)_{\text{无量纲}} = 0.8.$$

由(3.20)和(2.2)得出

$$\pi c^2 p_0 r_0^2 \gamma_2^2 = I^2;$$

$$\gamma_2 = (H(a)a)_{\text{无量纲}} = 1.63. \tag{3.23}$$

由关系式(2.3),(3.15),(3.21)求出温度与外加电压的关系为

$$T_{\text{最大}} = \lambda e E_0 L = \frac{2}{5}\lambda e V, \tag{3.24}$$

而由式(3.22)和(3.23)得出

$$I^2 = \frac{3}{10}\frac{\gamma_2^2}{\gamma_1}c^2 N T_{\text{最大}} = \frac{3\times 2}{5\times 10}\frac{\gamma_2^2}{\gamma_1}\lambda c^2 N e V, \tag{3.25}$$

即定态柱体具有上升的伏安特性曲綫. 最后，由式(3.15)和(3.22)直接得出

$$\frac{r_0^2}{p_0} = \frac{e^2c^2\lambda^2}{4\pi\sigma_1^2}\frac{L^2}{T_{\text{最大}}^5}; \tag{3.26}$$

$$r_0^2 = \lambda L\frac{N^{5/2}}{I_A^4}\frac{\gamma_2^4}{\gamma_1^{5/2}}5.25\times 10^{-28} = \frac{LN^{1/2}}{\lambda(eV)_6^2}\frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2}\times$$

$$\times 1.42\times 10^{-6}; \tag{3.27}$$

$$p_0 = \frac{I_A^6}{N^{5/2}L}\frac{\gamma_1^{5/2}}{\lambda}\times 9.5\times 10^{22}. \tag{3.28}$$

在这些公式中电流以安培表示，电压以伏特表示. 計算时設 $c^2\sigma_1 = 3.12\times 10^{-10}$，这与包含在 σ_1 的表式中的庫仑对数的下列

諸值相应:

$$\lambda_{\text{庫侖}} = \ln \frac{T}{\hbar\omega_{\text{郎繆尔}}} = 15; \quad \omega^2_{\text{郎繆尔}} = \frac{4\pi ne^2}{m}. \tag{3.29}$$

沿 z 軸的全部热通量决定于通量密度

$$q = q_0\left(q_z - \frac{5}{2}\,\omega_0\tau_0 jT\right)_{\text{无量綱}} =$$

$$= \frac{5}{2}\lambda\frac{L}{r_0}q_0\left(\frac{1}{H}\frac{d(pT)}{dr}\right)_{\text{无量綱}}\left(1-\frac{z}{L}\right)^{2/5} \tag{3.30}$$

对整个柱体截面的积分:

$$q_{\text{总}} = -\frac{5}{2}\lambda\frac{L}{r_0}2\pi\gamma_3 q_0 r_0^2\left(1-\frac{z}{L}\right)^{2/5} =$$

$$= -\frac{\gamma_3}{\gamma_2}\frac{5}{2}\frac{IT_{\text{最大}}}{e}\left(1-\frac{z}{L}\right)^{2/5}, \tag{3.31}$$

式中

$$\gamma_3 = -\left(\int_0^a \frac{1}{H}\frac{d(pT)}{dr}\,rdr\right)_{\text{无量綱}} = 1.63 = \gamma_2.$$

从数量級說，这个通量等于无磁場的电离等离子体内的一般的正常热通量. 这是从热迁移方程的剩余項与对流通量的散度的对比得出的. 如果只限于考虑与 z 的关系,則这个对比給出(以无量綱单位表示)

$$\omega_0\tau_0\frac{\partial T}{\partial z} \sim \frac{1}{T^{3/2}}.$$

由此得 $T \sim \omega_0\tau_0 T^{5/2}\dfrac{\partial T}{\partial z}$,而对流通量

$$q_{\text{对流}} = -\frac{5}{2}\omega_0\tau_0 jT \sim -(\omega_0\tau_0)^2 T^{5/2}\frac{\partial T}{\partial z}.$$

以相应单位表示的正常通量等于

$$q_{\text{正常}} = -3.61\,(\omega_0\tau_0)^2 T^{5/2}\frac{\partial T}{\partial z}.$$

对漂移通量也得到同样的值. 在定态的与壁脫离的柱体中沒有通过柱体表面的径向通量，因此就要求建立这样的温度梯度（如从漂移通量和磁化通量的比較中可看出的），以使在径向通量表式

(1.10) 中

$$\frac{\partial T}{\partial r} \sim \omega_0 \tau_0 T^{5/2} \frac{\partial T}{\partial z}.$$

于是軸向漂移通量等于

$$q_{z漂移} \sim -\omega_0 \tau_0 \frac{\partial T}{\partial r} \sim -(\omega_0 \tau_0)^2 T^{5/2} \frac{\partial T}{\partial z}.$$

(3.31)的通量由阴极指向阳极,在阳极上通量最大,而在阴极上通量等于零. 无疑地,不存在来自电极的热通量的这个要求在我們的解中应該得到滿足. 这个要求在对近电极区的过程不作补充假定时也能实現. 上面的情况証明,我們对积分恆量 l 的选择是正确的. 如果 $l > L$ (当电子获得温度 $T_{阴} \sim T_{最大}$ 的近阴极区存在时将会有这种情况出現,見第 7 頁),則上面所得的有关通量、柱体半径、温度的值及电流与电压的关系的結果,在定性方面仍旧不变,因为这些結果是由能量平衡得到的.

如果整个柱体上的离子溫度比起电子溫度来很小,則上面进行的研究是正确的. 計算表明,在滿足下面条件时发生这种情况:

$$\Pi = \frac{e^2 N}{M c^2} \ll \sqrt{\frac{m}{M}}. \tag{3.32}$$

在无电极柱体中,強脫离的条件如下[1]:

$$\Pi \ll 1. \tag{3.33}$$

这里所出現的差别是由于离子沿軸綫的导热比电子差,因为径向溫度梯度小,即

$$\frac{q_{iz}}{q_{ez}} \sim \delta = \sqrt{\frac{2m}{N}}. \tag{3.34}$$

因此,为了使整个柱体上都发生溫度脫离,必須使电子传給离子的热只有在无电极的柱体內的 $\frac{1}{\delta}$; 由此就得出代替(3.33)的条件(3.32).

§ 4. 弱 脫 离

首先假設 $T_e = T_i = T$, 把电子和离子的热传导方程合成为

一个方程:

$$\operatorname{div}\left(\mathbf{q}-\frac{5}{2}\omega_0\tau_0\mathbf{j}T\right)=jE_z-Q_{\text{辐}}. \tag{4.1}$$

軸向"磁化"热导率与电子的对流通量相比較，可以略去不計.

热通量和电場的表式如下:

$$q_r=q_{ir}+q_{er}=-\left(\sqrt{\frac{2M}{m}}+\frac{15}{2}+2.41\right)\times$$

$$\times\frac{p^2}{H^2T^{5/2}}\frac{\partial T}{\partial r}-\frac{3}{2}E\frac{p}{H}; \tag{4.2}$$

$$q_z=q_{iz}+q_{ez}=0; \tag{4.3}$$

$$E_r=\omega_0\tau_0\frac{T}{p}\frac{dp}{dr}; \tag{4.4}$$

$$E_z=\frac{3}{2}\frac{p}{HT^{5/2}}\frac{\partial T}{\partial r}-\frac{2}{HT^{3/2}}\frac{dp}{dr}. \tag{4.5}$$

这里令 $p=nT_e=nT_i=nT$. 此时,在前一节內获得的从无量綱量变換为有量綱量的公式仍然适用,不必有任何改变.

弱脫离方程組与強脫离方程組的区別在于：有径向电場和无漂移通量. 我們将按照与強脫离情形的类似的方法求出变量 r 和 z 分离的解(应当指出，由于径向通量中导热系数大，在第一級近似中温度一般不沿半径变化,而只是 z 的函数). 假定

$$\left.\begin{aligned}E_z(r,z)&=\varepsilon(z)E(r);\\T(r,z)&=T_1(z)T(r).\end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

于是由分离条件得出

$$T(z)=\frac{1}{[\varepsilon(z)]^{2/3}}=\left(\frac{\lambda}{\omega_0\tau_0}\right)^{2/5}(L-z)^{2/5}. \tag{4.7}$$

分离后剩下的略去輻射的方程組为

$$(\lambda T-E)j+\frac{1}{r}\frac{d(rq)}{dr}=0; \tag{4.8}$$

$$q=-95.6\frac{p^2}{H^2}\frac{1}{T^{5/2}}\frac{dT}{dr}-\frac{3}{2}\frac{E}{H}p; \tag{4.9}$$

$$\frac{dE}{dr} = -\frac{2}{5}\lambda T \frac{1}{p}\frac{dp}{dr}; \tag{4.10}$$

$$E = \frac{3}{2}\frac{p}{HT^{5/2}}\frac{dT}{dr} - \frac{2}{HT^{3/2}}\frac{dp}{dr}; \tag{4.11}$$

$$j = -\frac{2}{H}\frac{dp}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d(rH)}{dr}. \tag{4.12}$$

这个方程組可以用下列条件求数值积分:

$$\left.\begin{aligned} &p(o) = 1;\quad E(o) = 1;\quad T(o) = 1;\quad H(o) = 0;\\ &p(a) = 0;\quad q(o) = 0;\quad q(a) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

积分(4.10),(4.11),(4.12),并設 T = 恆量 = 1, 便可以得到很精确的近似解. 利用这个近似解,由(4.8)可求出径向通量, 由(4.9)可得出对温度的修正. 参数 λ 由下面条件决定:

$$\int_0^a (\lambda T - E) jr dr = 0. \tag{4.14}$$

在假設 $T_e = T_i$ 时求出解以后, 便可以算出温度差 $\Delta T = T_e - T_i$,并根据 $\Delta T/T \ll 1$ 的要求来确定无脱离的条件.

从离子的热迁移方程中可以求出差 ΔT, 如果略去軸向"磁化"通量,这个方程具有如下形式:

$$\frac{1}{r}\frac{d(rq_{ir})}{dr} + \lambda\frac{p}{H}\frac{dT}{dr} = 12\pi r_0^2 n_0 \frac{e^2}{Mc^2}\frac{p^2}{T^{7/2}}\frac{\Delta T(r,z)}{T_1^2(z)}. \tag{4.15}$$

式中已經把与 z 有关的部分分离开了.

因为 $\frac{dT}{dr} \sim \delta = \sqrt{\frac{2m}{M}}$, 所以在一級近似中沿軸綫的漂移通量(左边第二項)可以略去. $\frac{\Delta T}{T} \ll 1$ 的要求导致下面条件:

$$\Pi = \frac{e^2 N}{Mc^2} = 2\pi\gamma_1 r_0^2 n_0 \frac{e^2}{Mc^2} \gg 1. \tag{4.16}$$

因为在 $r = 0$ 和 $r = a$ 时 q_{ir} 等于零,所以 $\frac{1}{r}\frac{d(rq_{ir})}{dr}$ 項改变符号,因而在截面中 $\Delta T = T_e - T_i$ 有不同的符号. 較詳細的研究(类似于对无电极体柱内弱脱离的研究[1])表明, 半径为 $r_{中央} \sim$

$\frac{d}{\Pi^{1/4}}$的中央区域内，电子温度超过离子温度約 $\frac{1}{\sqrt{\Pi}}T$；在截面的其余部分，电子温度低于离子温度約 $\frac{1}{\Pi}T$.

在中央区域内电子使离子加热，而在其余部分离子則把所得到的热传給电子． 就整个截面平均說来，离子交出的热比从电子得到的热大，超过的量約 $\sqrt{\frac{m}{M}}$，这个盈余是离子在阳极处从电子得到，并通过漂移的方式从阳极带来的.

温度按截面和沿軸綫的大致分布如图 1 和图 2 所示.

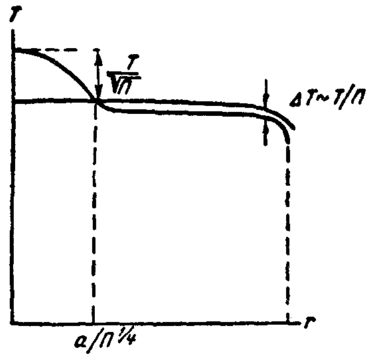

图 1.

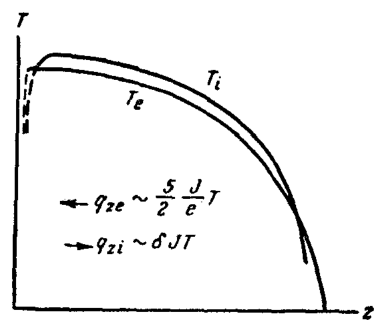

图 2.

箭头表示通量的方向．图 2 上 T_i 表示中央区域以外的离子温度．从(4.15)可看出，差 $\Delta T = T_e - T_i$ 沿軸綫变化的规律为

$$\Delta T \sim T_1^2(z) = \left(1 - \frac{z}{L}\right)^{4/5}.$$

到目前为止我們还沒有計及韌致輻射的损失．在无电极柱体内，这个损失会使定态电流不可能超过某一极限值 $I_{輻射}$． 我們来看一看，在有电极损失时輻射损失将造成什么結果． 在輻射损失的表式中

$$Q_{輻} = \beta n^2 \sqrt{T} = \beta' \frac{p^2}{T^{3/2}}. \tag{4.17}$$

这里温度的冪次与在热迁移方程的其他項中一样，因此并不妨碍