413759

3132
34247;1

立体几何

（試用本）

湖南师范学院数学系
几何组编

一九七三年九月

目 录

第一章　直綫与平面

"**科学研究的区分，就是根据科学对象所具有的特殊矛盾性。**"平面几何与立体几何都是研究几何图形的科学，其研究的内容与学习的方法既有相同之点，也有不同之点。相同之点在于两者都是研究从现实的空间形式得来的图形的性质及其应用。不同之点在于平面几何是研究平面图形（所有点全在同一平面内的图形），我们可以借助绘图工具把图形逼真地画在同一平面上，研究时比较直观易于理解；立体几何则是研究空间图形（所有点不全在同一平面内的图形），我们只能按一定的法则在平面上画出它的示意图，因此，研究时较难理解，这就给初学的人带来一定的困难，需要我们逐步提高空间想像的能力。

一　平面

1.1　平面的形象

"**理性认識依賴于感性认識，感性认識有待于发展到理性认識，这就是辯证唯物論的认識論。**"平面这一概念也是从客观事物中抽象出来的，如平静的池水表面、平板玻璃的表面、等等，都给人以平面的形象。我们撇开这种事物的具体內容，仅就其"平"的共同特征，得到抽象的平面概念。

由于空间的无限性，我们设想平面是可以向四周无限伸展的。

立体几何里，一般用平行四边形来表示平面在空间的位置。在水平位置的平面，通常是画一个锐角约为45°、长边约为短边的两倍的平行四边形来表示(图 1 — 1 甲)。两个不同位置的平面画在一起时，被遮住的线段要画成虚线(图 1 — 1 乙) 或不画(图 1 — 1 丙)。

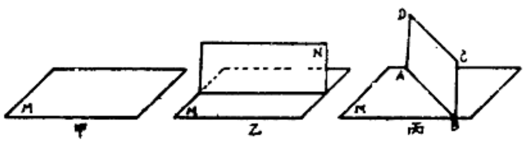


图 1 — 1

平面的记法，一般用一个大写字母，如图 1 — 1 中的平面M和平面N；或用表示它的平行四边形两个对角顶点的字母，如图 1 — 1 丙中的平面 A C。

在空间某个平面内画平面图形时，要注意显出图形在空间的特点。例如，我们从一定的角度观察正方形或矩形的桌面时，觉得它们的形状象平行四边形；观察平摆着的茶杯和面盆口子时，觉得它们象椭圆；观察平摆着的等边三角形时，觉得它象不等边三角形，等等。因此，在水平位置的平面内画正方形、正三角形、圆、任意四边形时(图 1 — 2 左边是实图)，就要画成图 1 — 2 右边的样子。

注意：

画这种水平位置的平面图形时，实图中的横边，要画成

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

与表示平面的平行四边形的横边平行，其实长以及它上面各点的位置都不变；实图中与横边垂直的线段，要画成与横边约成45°的角，其实长要缩短一半，它上面各点间的距离也相应缩短一半。

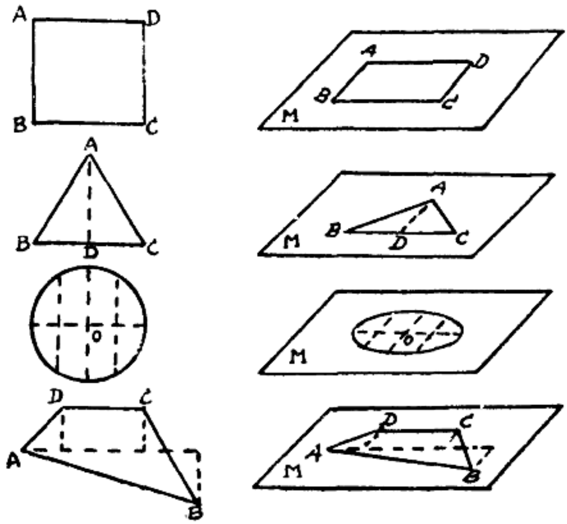


图 1—2

1.2 平面的基本性质

前面对平面作了直观的描述，但是平面与其他的面有什么本质区别呢？这就需要了解平面的基本性质。恩格斯说：**“数学上的所謂公理，是数学需要用作自己的出发点的少数思想上的規定。”**因为平面是立体几何里新的基本元素，所以有必要提出关于平面的公理，以作为研究立体几何的出发

点。

“感觉只解决現象問題，理論才解决本質問題。这些問題的解决，一点也不能离开实践。”广大劳动人民从长期的实践中，反复观察和比较各种点与面、线与面、面与面的结合关系，逐渐总结出了关于平面的基本性质。

（1） 木工和钳工师傅常用角尺的边缘来检查工件表面是不是平面（图1—3）。他们把角尺一边的边缘紧靠在所要检查的面上任意滑动，如果直尺的边缘能够处处和面密合，就表明所检查的面是平面，否则就不是平面。这一事实，揭示了直线与平面相结合的基本性质。

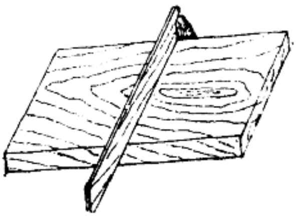


图1—3

公理1 如果一直线上有两点在一平面内，那么这条直线上的所有点都在这个平面内。

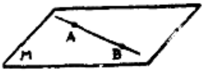


图1—4

問 将直尺的边缘平行于钢管的轴线紧靠在钢管面上（图1—5）平行移动，尺的边缘也能处处和钢管面密合，为什么不能说钢管的表面是平面？


图1—5

（2） 我们知道，墙壁面与地面的分界处是直线；把一张纸折一下，其折痕是一条直线。这些事实，揭示了两个不同平面相结合的基本性质。

公理2 两个不同的平面若共有一点，则它们必共有过这点的一条直线。（图1—6）

只共有一条直线的两个平面叫做相交平面，这条公共直线叫做它们的交线。画两个相交平面时，一定要画出它们的交线。

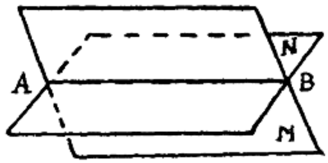


图1—6

問 有沒有只共有一点的三个平面？

(3) 我们知道，测量仪器和照相机的支架都是三只脚的，这样就能平稳地放在地面上。这一事实，揭示了平面在空间的位置可以由点来确定的基本性质。

公理3 不在同一直线上的三点确定一个平面。（图1—7甲）。

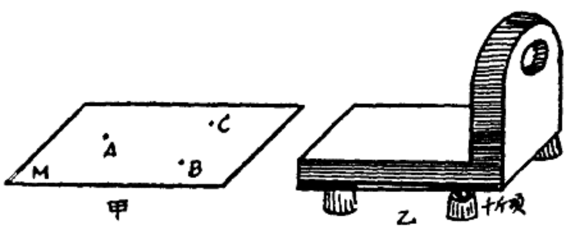


图1—7

钳工师傅在工件上划线时，常用三个“千斤顶”支起工件来确定基准面（图1—7乙），也是根据公理3这个道理。

注意： 所谓“确定一个平面”，意思就是可以作一个

平面，并且只可以作一个平面。“确定”一词兼有“存在”和“唯一”两种意义。

由公理 3 可得下面三个推论：

推論 1 一直线和线外一点确定一个平面（图 1—8 甲）。

推論 2 两相交直线确定一个平面（图 1—8 乙）。

推論 3 两平行直线确定一个平面（图 1—8 丙）。

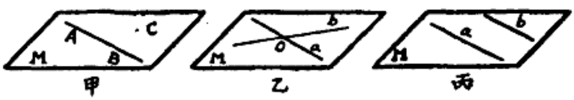


图 1—8

推论 1 的证明如下：

根据公理 3，这条直线上的任意两点和线外一点可以确定一个平面；根据公理 1，这条直线必在所确定的平面内。即过这条直线和线外一点的平面是存在的，同时也是唯一的。因为如果不唯一，设有两个不同的平面都过此直线和线外一点，那么这两个平面就会共有此直线上的任意两点和线外一点，这与公理 3 矛盾，故不可能。

另两个推论的证明，留给读者思考。

一扇门可以绕着它的一边自由转动，关门时插上插销，门就不能转动了，这就是推论 1 的实际应用；木工师傅常用两根相交或平行的木条来使木板固定（图 1—9），这是另两个推论的实际应用。

問 1 不在同一平面內的四点可以确定几个平面？

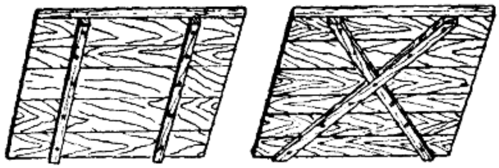


图 1 — 9

問 2　过同一点但不在同一平面内的三条直线能确定几个平面？

問 3　一直线与两平行直线都相交，这三条直线能确定几个平面？

問 4　在空间过已知直线外一点能作几条直线与已知直线平行？

习题一

1、　在水平位置的平面内画一个矩形、等腰梯形、圆和它的内接正六边形。（设出实图并画图，不写画法。）

2、　窗门可以绕着两个铰链（又叫合页）所确定的直线自由转动，如果扣上风钩就不能转动了，这是什么道理？

3、　独轮车两条车杠后面为什么各要安上一个支架？

4、　怎样用一根细绳来检查方桌四只脚的端点是不是在同一个平面内？

5、　为什么木工师傅把长方体的木料锯成木板前，要在木料的两个侧面内分别画出距离相等的平行墨线？

6、　为什么说三角形和圆一定是平面图形？

7、　画出相交于同一直线的三个平面。

8、　求证：

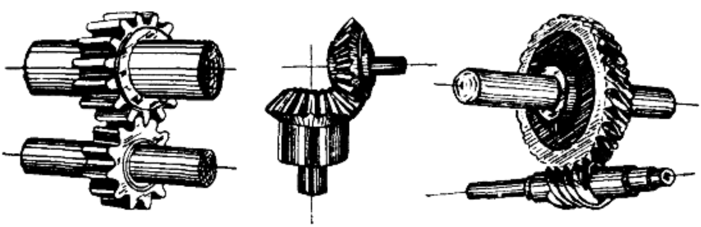
(1) 平行四边形的两条对角线和四条边都在同一平面内。

(2) 若一直线与三条平行直线都相交，则这四条直线在同一平面内。

二　直綫与直綫的位置关系

1.3　两直綫的位置关系

“对于某一現象的領域所特有的某一种矛盾的研究，就构成某一門科学的对象。” 平面几何里两直线的位置关系，只有相交和平行两种情况。立体几何里，由于从空间来考虑这个问题，因此出现了新的情况。我们来看下面的事实。



甲　　乙　　图 1—10　　丙

图 1—10甲是正齿轮的传动装置，两个齿轮的轴线是互相平行的；图 1—10乙是伞齿轮的传动装置，两个齿轮的轴线是相交的；图 1—10丙是蜗轮和蜗杆的传动装置，这里蜗轮和蜗杆的轴线既不相交、也不平行。由此可见，空间两条不重合的直线有下列三种位置关系：

$$\left.\begin{array}{l}\text{(1)　相交——只有一个公共点}\\\text{(2)　平行——没有公共点}\end{array}\right\}\text{在同一平面内。}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

(3) 不相交也不平行——没有公共点，不在同一平面内。

定义 既不相交也不平行的两条直线叫做异面直线。

画异面直线时，通常是用平面来衬托，以显出它们不在同一平面内的特征。例如，画异面直线a和b时，下面图1—11甲、乙的画法比较明显，丙的画法就不明显。

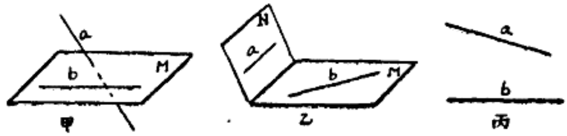


图1—11

注意： 两异面直线不能在同一平面内，当然要画在两个不同平面内；但画在两个平面内的两条直线不一定是异面直线。

1.4 平行直线

平面几何里，三条互相平行的直线是在同一平面内研究的。但空间三条互相平行的直线就有不在同一平面内的情形

定理1 若分别过两平行直线之一的两个平面相交，则它们的交线和两平行直线平行。

已知 如图1—12，平面M和N分别过两平行直线 a和b，且相交于直线c。

求证 c∥a，c∥b。

证明 （用反证法）

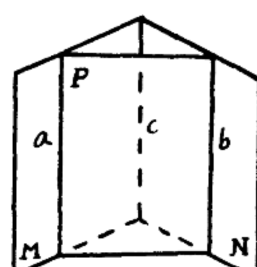


图1—12

假定$c \nparallel a$。因为c和a都在平面M内，故它们应相交。设其交点为O（未画出），则O点应是平面M和N的公共点。

设两平行直线a和b所确定的平面为P，因为O点在直线a上，故O点也在平面P内；又因O点在平面N内，故O点应是平面P和N的公共点，因而O点应在直线b上。这就是说a和b应有一公共点O，此与题设$a \parallel b$矛盾，所以$c \parallel a$。

同理可证$c \parallel b$。（证毕）

在平面几何里，我们知道：若两直线都平行于第三直线，则此两直线平行。这个性质叫做平行的传递性。对于空间的直线来说，也同样具有平行的传递性。

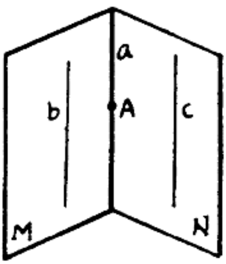


图 1—13

定理2 （三线平行定理）

如果空间两直线都和第三直线平行，那么这两条直线也互相平行。

已知 如图 1—13，直线$a \parallel$直线c，直线$b \parallel$直线c。

求证 $a \parallel b$。

证明 （用同一法）

在直线a上任意取一点A，则b和A可以确定一个平面M，c和A可以确定一个平面N。由公理3，可知平面M和N应相交于过A点的一直线，设此线为a'（未画出）。因为已知$b \parallel c$，所以据定理1可知$a' \parallel b$、$a' \parallel c$。又因在平面N内过A点且平行于c的直线只有一条，既知$a \parallel c$，故a'应与a重合，既知$a' \parallel b$，所以$a \parallel b$。（证毕）

在平面几何里，我们知道：如果两个角的边分别平行且同向，那么这两个角相等。对于空间两个角来说也具有同样的性质。

定理3 （两角相等的定理）

如果空间两个角的边分别平行且同向，那么这两个角相等。

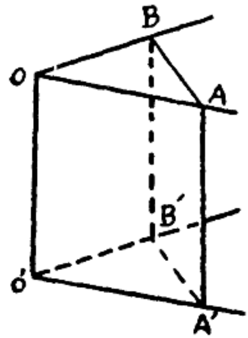


图1—14

已知 如图1—14，$OA \parallel O'A'$，$OB \parallel O'B'$且同向。

求证 $\angle AOB = \angle A'O'B'$。

证明 在两角的边上分别取$OA = O'A'$，$OB = O'B'$，并连结OO'，AA'，BB'，AB，$A'B'$。

∵ $OA \underline{\parallel} O'A'$，$OB \underline{\parallel} O'B'$，

则 $OAA'O'$和$OBB'O'$都是平行四边形，

∴ $AA' \underline{\parallel} OO' \underline{\parallel} BB'$。

因此$AA'B'B$也是平行四边形，从而$AB = A'B'$。由于$\triangle OAB$与$\triangle O'A'B'$有三边对应相等而全等，所以$\angle AOB = \angle A'O'B'$。

例 如图1—15，$ABCD$是一个空间四边形（四个顶点不在同一平面内的四边形），E、F、G、H分别是四条边AB、BC、CD、DA的中点；求证E、F、G、H四点在同一平面内。

证明 连结EH和FG，它们分别是$\triangle ABD$和$\triangle BCD$的中位线，所以$EH \parallel BD$，$FG \parallel BD$，

因而EH∥FG(定理2)。由公理3的推论3，可知EH和FG确定一个平面M，所以E、F、G、H都在同一平面M内。

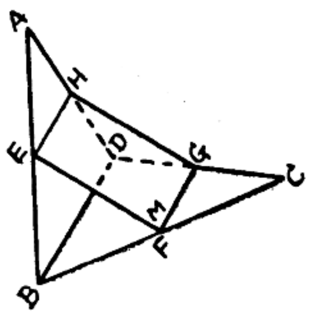


图1—15

1.5 异面直线所成的角

“要完全地反映整个的事物，反映事物的本质，反映事物的内部规律性，就必须經过思考作用，……造成概念和理論的系統。” 我们知道，平面内两相交直线的位置关系，是用它们的夹角来表示。同样，要研究两异面直线的位置关系，也要知道它们所成的角。

定义 过空间任意一点，分别作两异面直线的平行线，这两条直线的夹角叫做这两异面直线所成的角(见图1—16)。

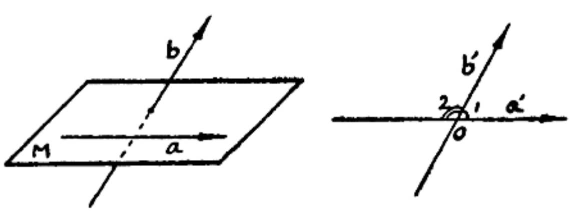


图1—16

注意:

(1) 由上述定义所确定的两异面直线所成的角有两个(上图中的∠1和∠2)，它们互为补角。如果两异面直线a和

b都指定了方向（如上图中的箭头所示），那么它们所成的角就只有一个，即上图中的∠1（a′、b′分别和a、b取相同的方向）。

（2） 两异面直线所成的角，只和这两异面直线的位置有关，而与O点的位置选取无关。因此，通常是在两异面直线之一上任意取一点O，再过O点作另一条的平行线，即得这两异面直线所成的角（见图1—17）。

定义 若两异面直线所成的角是直角，则叫这两异面直线互相垂直。

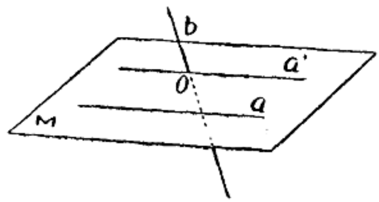


图1—17

例如，蜗轮和蜗杆的传动装置中（图1—10丙），蜗轮和蜗杆的轴线就是两条互相垂直的异面直线。应用这种装置，就可使传动方向改变一个90°的角。

問1 在平面几何与立体几何中，两直线互相垂直有何相同与不同之点？

問2 在空间过已知直线上一点，能作几条直线与已知直线垂直？

問3 在空间过已知直线外一点，能作几条直线与已知直线垂直相交？能作几条直线与已知直线垂直但不相交？

习题二

1． 要证明空间两直线平行，必须证明哪两点？

2． 在同一平面内的三条直线，其相互位置有哪几种情

况？试画出图来。

3．在空间不全在同一平面内的三条直线，其相互位置有哪几种情况？试画出图来。

4．如图1—18是一个正方体：

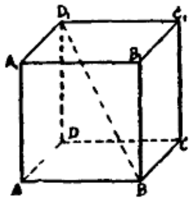


图1—18

（1）指出下列每对直线的相互位置关系：

AB和CC_1，AB和C_1D_1，BD_1和CC_1。

（2）求证：$AA_1 /\!/ BB_1 /\!/ CC_1 /\!/ DD_1$。

5．若在两异面直线a和b上分别取A、B和C、D四点，则直线AC和BD也是异面直线。

6．求证：顺次连接空间四边形四边中点的线段围成一个平行四边形。

7．求证：若一直线和两平行直线之一相交成60°的角（和另一条不相交），则这条直线也和另一条成60°的角。

8．设有互相垂直的两异面直线a和b，另一直线$c /\!/ a$且和b不相交，求证$b \perp c$。

三　直綫与平面的位置关系

1.6　一直綫与一平面的位置关系

“**离开实践的认識是不可能的。**”客观实际中，到处可以看到直线与平面相互位置关系的形象。例如，篮球場的边界线是在場地平面之内；钻床上钻头的中心线是与工件平面相交；屋梁看作直线则和地面不相交。综合各种情况，可知

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com