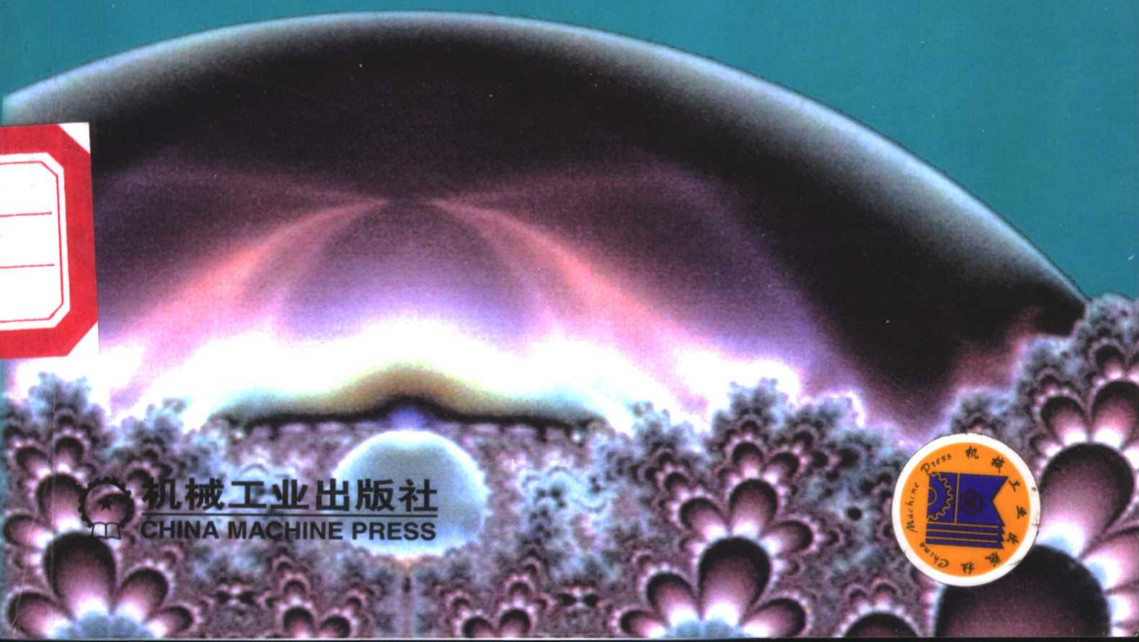
21世纪高等学校公共基础课规划教材

# 数学四大普适常数

SHUXUE SIDA PUSHI CHANGSHU

夏茂辉　姚文起　编著



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

21 世纪高等学校公共基础课规划教材

# 数学四大普适常数

夏茂辉　姚文起　编著

徐玉民　主审

机 械 工

圆周率π、黄金分割数Ω、自然常数e和混沌常数δ在自然界和工程技术中应用甚广。本书内容包括了此四大普适常数的意义、性质、计算和应用，也介绍了对人类有杰出贡献的科学家。本书有深入浅出、通俗易懂、层次清晰、重点突出的特点，便于教学和自学。

本书适于作理工科各专业的本科和专科36学时选修课教材，也可供工程技术人员或数学爱好者自学。


**图书在版编目（CIP）数据**

数学四大普适常数/夏茂辉，姚文起编著．—北京：机械工业出版社，2003.3

21世纪高等学校公共基础课规划教材

ISBN 7-111-11649-6

Ⅰ．数…　Ⅱ．①夏…②姚…　Ⅲ．常数-高等学校-教材　Ⅳ．O1

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第008290号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）

责任编辑：林　松　郑　玫　版式设计：张世琴　责任校对：魏俊云

封面设计：姚　毅　责任印制：闫　焱

北京京丰印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2003年4月第1版·第1次印刷

850mm×1168mm 1/32·5.25印张·139千字

定价：9.00元

# 前 言

数学在中学、大学里是一门基础学科，通过这一学科的教学，使学生掌握数学的基础知识，为他们进一步学习打下坚实的基础。

数学不但与自然科学越来越紧密地互相结合，越来越深刻地互相影响着和互相渗透着，而且数学与社会科学、现代社会的联系正在日益加深，正在深刻地影响着社会科学的研究与发展。

正像数学家B·Demolins说的那样："没有数学，我们就无法看透哲学的深度，没有哲学，人们也无法看透数学的深度，而若没有两者，人们就什么也看不透。"

为了加强大学生文化素质，使学生从中体会到数学在社会发展中的作用，我们编写了在数学、自然科学中经常用到的数学四大普适常数——π、Ω、e、δ。

本书共分四章，内容为π、Ω、e、δ的意义、性质、计算及其应用；介绍有关的数学公式、定理及对人类有卓越贡献的部分数学家，同时简单介绍了这四大常数的发展史。

本书的特点是：深入浅出，通俗易懂，层次清楚，重点突出，便于教学和自学。

本书全部内容按36学时大学生选修课编写。可供中学生作为课外科普读物，亦可供工程技术人员或数学爱好者自学。

徐玉民教授对本书进行了仔细审阅，并提出了许多宝贵的修改意见，使本书增色不少，在此作者表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，加之时间仓促，书中难免存在不足之处或错误，敬请读者批评指正。

作者

2002年9月

2000——世界数学年

数学是理解世界的一把主要钥匙

——里约热内卢宣言

有一位学者“凑”出了数学四大普适常数π、Ω、e、δ互相有关的运算式子，假如有谁能找到了它们的来龙去脉，以及所蕴含的一切实际意义，那么，他无疑会震撼当今世界的。

$\pi=3.1415926\cdots$

$\Omega=0.6180339\cdots$

$e=2.7182818\cdots$

$\delta=4.6692011609\cdots$

# 咏混沌

徐国忠

周易记，混沌尚未分天地，阴阳未判，只把万物育。

若遇深奥问题，通常分解体系，夸克细胞染色体。而今逻辑，整体分析。事物规律非线性，平衡状态远离，对称禁忌。

系统行为随机，原是有序非周期。分叉量变到质变，周期三意味着混沌序。貌似无序却有序，偏有引子吸。

混沌之中藏信息，依赖初始条件紧密。新常数，四点六六九二零一，普适性试图解开宇宙谜，分形分维，非直非曲。

# 目　录

# 第一章　圆周率π与祖冲之

π实在是个不可思议的极美妙的数，而且是个无理数。

特别令人惊奇的是，这个数在距今天4000多年前，也就是在公元前2000年左右的巴比伦国已经被发现。π是巧妙地隐藏在自然界中的无理数。

从公元前至今，在几千年漫长的岁月中，大部分亲自动手计算过π的数学家都体会到了计算π值的艰辛。

## 第一节　π的意义

π是数学四大普适常数之一。圆周率π有“古率”3、“微率”3.14、“约率”$\frac{22}{7}=3.142857$、“密率”$\frac{355}{113}=3.1415929$等说法，日本数学家称这个数值为“祖率”。

**定义1**　圆的周长和它的直径的比是一个常数（与直径的大小无关），把此常数叫做圆周率。通常我们用希腊字母π来表示。W·Jones（1675～1749）首先用π来表示圆周率。

**1. π是一个常数**

设圆的直径为$D$，其内接正$k$，$2k$，…边形的周长分别为$P_k$，$P_{2k}$，…，$P_{2^{m-1}k}$，…而当$m\to\infty$时，$P_{2^{m-1}k}$的极限为圆的周长$C$，即

$$\lim_{m\to\infty}P_{2^{m-1}k}=C$$

则

$$C=\pi D$$

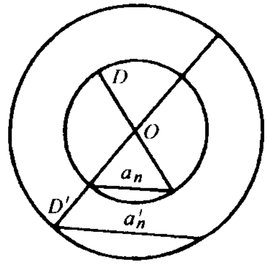


图　1-1

设⊙$O$的直径为$D$，它的周长为$C$，圆内接正$n$边形的边长、周长分别为$a_n$和$P_n$。

再以$D'$直径作⊙$O$的同心圆，如图1-1并把此圆的周长记做$C'$，它的内接正

$n$ 边形的边长、周长分别记做 $a_n'$ 和 $p_n'$。很明显，这两个圆的正 $n$ 边形相似，所以有

$$a_n : a_n' = \frac{D}{2} : \frac{D'}{2}$$

也就是 $$a_n : \frac{D}{2} = a_n' : \frac{D'}{2}$$

故有 $$P_n : D = P_n' : D'$$

两边取极限后就得到 $$C : D = C' : D'$$

因此圆的周长与直径的比值是一个常数。把这个常数记做 $\pi$，则有 $C=\pi D$。

又设圆的半径为 $R$，圆的内接正 $n$ 边形的面积为 $S_n$，当边数 $n$ 无限增加时，内接正 $n$ 边形无限地接近于圆，它的周长接近于圆的周长，而它的面积也接近于圆的面积 $A$，也就是，当正 $n$ 边形边数 $n$ 无限地增加时，内接正 $n$ 多边形的面积为一个无穷数列

$$S_3, S_4, S_5, \cdots, S_n, \cdots$$

它的极限就是

$$\lim_{n\to\infty} S_n = A$$

则有 $A=\pi R^2$，即圆周率 $\pi$ 又是圆的面积 $A$ 和它的半径 $R$ 平方的比。这也证明了 $\pi$ 是 一个常数。

**2. π 是一个无理数**

**定义 2** 若 $a_0$ 是整数，$a_1$，$a_2$，…，$a_n$，… 都是小于 10 的非负整数（但不全是 $a$），则称十进小数 $a=a_0a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 为实数，实数集记为 **R**。当 $a$ 是无限不循环小数时，特别地叫它是无理数。此定义表明，实数集 **R** 是有理数集与无理数集的并集。

**例 1** 设 $a>1$，$b>0$，$a$、$b$ 互素，求证 $\log_a b$ 是无理数。

**证** 假设 $\log_a b = \frac{p}{q}$ 为有理数，$p\in \mathbf{Z}$，$q\in \mathbf{N}$

于是有 $$a^p = b^q$$

但是，当 $p\leqslant 0$ 时，上式显然不成立。

故当 $p>0$ 时，上式与 $a^p$ 与 $b^q$ 互素相矛盾。因此，$\log_a b$ 不是有理数。但知对数 $\log_a b$ 是实数，故 $\log_a b$ 是无理数。

**例 2** 证明 $\lg 3$ 是一个无理数。

**证** 假设 $\lg 3$ 是一个有理数，则有 $\lg 3=\frac{n}{m}$ ($m,n$ 为正整数)，

即有 $$10^{\frac{n}{m}}=3$$

所以 $$10^n=3^m$$

因为 $3^m$ 的个位数字绝对不能为 0，而 $10^n$ 的个位数字又是绝对为 0。所以 $10^n\neq 3^m$。

这与 $\lg 3$ 是有理数的假设相矛盾，但 $\lg 3$ 是实数，故 $\lg 3$ 是一个无理数。

**例 3** 证明 $\pi$ 是无理数。

**证** 假设 $\pi=\frac{a}{b}$ 是有理数 ($a$，$b\in\mathbf{N}$)，令

$$f(x)=\frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$$

若 $0<x<\frac{a}{b}$，则由

$$0<f(x)<\frac{\pi^n a^n}{n!},0<\sin x\leqslant 1$$

得 $$0<f(x)\sin x<\frac{\pi^n a^n}{n!}$$

于是当 $n$ 充分大时，有

$$0<\int_0^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x<\frac{\pi^{n+1}a^n}{n!}<1 \tag{1}$$

再令

$$F(x)=f(x)-f^{(2)}(x)+f^{(4)}(x)-\cdots+(-1)^n f^{(2n)}(x)$$

由于 $n!\ f(x)$ 是 $x$ 的整系数多项式，且各项的次数都不小于 $n$，故 $f(x)$ 及其各阶导数在 $x=0$ 点处的值也都是整数，因此，$F(0)$ 和 $F(\pi)$ 也都是整数，又因为

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[F'(x)\sin x-F(x)\cos x]\\&=F''(x)\sin x+F'(x)\cos x-F'(x)\cos x+F(x)\sin x\\&=F''(x)\sin x+F(x)\sin x=f(x)\sin x\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin x \mathrm{d}x = [F'(x)\sin x - F(x)\cos x]\Big|_0^{\pi}$$
$$= F(\pi) + F(0)$$

是整数这与（1）式相矛盾，因此 $\pi$ 不是有理数。又 $\pi$ 是实数，故 $\pi$ 是无理数。

3. $\pi$ 是一个超越数

**定义 3** 设 $u$ 是一个实数，如果有整数 $a_0$，$a_1$，$a_2$，…，$a_n$，$(a_0 \neq 0, n > 0)$，使得 $u$ 适合代数方程 $a_0u^n + a_1u^{n-1} + a_2u^{n-2} + \cdots + a_{n-1}u + a_n = 0$，那么 $u$ 就叫做代数数。不是代数数的实数就叫超越数。即实数可分类为

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left(\text{可用}\dfrac{a}{b}\text{表示的数}\right)\\ \text{无理数}\begin{cases}\text{代数数}\left(\text{如}\sqrt{2}，\sqrt{3}\text{等}\right)\\ \text{超越数（如 e，}\pi\text{ 等）}\end{cases}\end{cases}$$

也就是说不能成为代数方程解的数叫做“超越数”，如 $\sqrt{2}$ 虽然是无理数，但它却是代数数，这是因为它是方程 $x^2=2$ 的解，故可用 $x=\pm\sqrt{2}$ 表示。

**例 4** 有理数是（一次）代数数。

**证** 有理数 $u=\dfrac{q}{p}(p,q\in \mathbf{Z}$，且 $p\neq 0)$ 适合方程

$$px-q=0$$

这是代数方程的最低次数，所以 $\dfrac{q}{p}$ 是一次代数数；反过来也正确，一次代数数都是有理数。

**例 5** 二次代数数的一般形式是：$u=r+s\sqrt{m}$，其中 $r$、$s$ 是有理数，$s\neq 0$，$m\in \mathbf{Z}_+$，并且 $m$ 不是一个整数的完全平方。

**证** 我们把 $r$ 和 $s$ 通分，即写成 $r=\dfrac{q}{p}$，$s=\dfrac{t}{p}$，这里 $p\in \mathbf{Z}_+$，$q$，$t\in \mathbf{Z}_+$。那么有 $u=\dfrac{q+t\sqrt{m}}{p}$ 是方程

$$p^2u^2-2pqu+(q^2-t^2m)=0$$

的根，并且此方程的系数都是整数，因此数 $r+s\sqrt{m}$ 或是二次代数数，或者是一次代数数，但是从例 1 知道，一次代数数都是有理数，而当 $s\neq 0$ 时，$m$ 不是一个整数的完全平方，数 $r+s\sqrt{m}$ 不可能是有理数，所以 $r+s\sqrt{m}$ 是二次代数数。反之，如果 $a$、$b$、$c$ 是任意三个整数，并且 $a\neq 0$，又 $u$ 是实数，它适合方程

$$au^2+bu+c=0$$

则有

$$u=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

已知 $u$ 是实数，所以有 $m=b^2-4ac\geqslant 0$，如果 $m$ 是整数 $u$ 的完全平方，那么 $u$ 是有理数，否则 $u$ 就是形如 $r+s\sqrt{m}$ 的数 $\left(\text{数 } r+s\sqrt{m} \text{ 中，取 } r=-\frac{b}{2a},\ s=\pm\frac{1}{2a}\right)$，所以二次代数数的一般形式是 $r+s\sqrt{m}$。

虽然 π 是无理数，但是 π 不能成为系数为整系数的代数方程的解。1882 年林德曼（1852～1938）在埃尔密脱证明 e 是超越数的基础上，使用欧拉展开式证明了 π 是超越数。

关于 π 的无理性和超越性我们再谈几点认识。

（1）我国数学家刘徽的“割圆术”的发明，为 π 的研究提供了重要工具，公元 1300 年左右我国的赵友钦对用“割圆术”求 π 的值时就曾经指出过：“若求之，虽至千万次，其数经不穷”。可见对 π 的性质已有相当深刻的认识，基本上接近其无理性的边缘了。

在以后的各种形式 π 的级数展开中始终没有得到任何一个递减的几何级数，也一直没有发现任何循环的现象，希望 π 是有理数的期望渐渐地消失了。

直到 1761 年德国兰伯特才证明了 π 的无理性。以后，勒让德等也相继证明了的 π 的无理性。而勒让德很早就提出了猜想：π 不是有理系数代数方程的根（代数数），从而引起了 π 是代数数还是

超越数的研究。

(2) $\pi$ 的超越性的证明在数学上具有重大的意义，它宣告了自古希腊诡辨派（公元前 5 世纪）就提出的尺规作图的三大难题“化圆为方”问题是不可解的。

两千多年前几何学家们就提出了这样的一个问题：设给定一个单位⊙$O$，要求作出一个正方形，使单位圆的面积与此正方形的面积相等。这就是所谓“变圆为方问题”。

这个变圆为方的问题两千多年来就不知苦恼了多少几何学家，后来才证明只用有限次地应用直尺和圆规是不能作出与已知圆等面积的正方形的。然而这个答案又是根据 $\pi$ 是超越数这个事实作出的。

(3)前苏联数学家盖尔方德解决了希尔伯特在 1900 年提出的 23 个问题的第 7 个问题，已知 e、$\pi$ 为超越数。但是至今的 $\pi^e$、$e^\pi$、$e+\pi$ 无理性和超越性还未解决，我们只知 $e^\pi$ 与 $\pi^e$ 的大小。

**例 6** 证明 $e^\pi>\pi^e$。

**证法 1** 令 $\pi=e+\alpha$，$\alpha>0$，

于是有
$$\frac{\pi^e}{e^\pi}=\frac{(e+\alpha)^e}{e^{e+\alpha}}=\frac{1}{e^\alpha}\left[\left(1+\frac{\alpha}{e}\right)^{\frac{e}{\alpha}}\right]^\alpha$$
$$<\frac{1}{e^\alpha}\cdot e^\alpha=1$$

所以
$$e^\pi>\pi^e$$

**证法 2** 因为 $f(x)=\ln x$ 在其定义域内是单调增加的

所以 要证 $\pi\ln e>e\ln\pi$

只需证
$$\frac{\ln e}{e}>\frac{\ln\pi}{\pi}$$

为此令
$$F(x)=\frac{\ln x}{x}(x\geqslant e)$$

因为
$$F'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2},x>e$$

所以
$$F'(x)<0$$

由此知 $F(x)$在 $[e,+\infty)$ 上是严格单调下降的。

所以
$$F(e)>F(\pi)$$

即 $$\frac{\ln e}{e}>\frac{\ln\pi}{\pi}$$

故有　$\pi\ln e>e\ln\pi$，也就是 $e^{\pi}>\pi^{e}$。

**证法 3**　令 $F(x)=\frac{\ln x}{x}(x\geqslant e)$

因为 $$F'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2},x>e$$

所以 $$F'(x)<0$$

在 $[e,\pi]$ 上用中值定理有

$$\frac{F(\pi)-F(e)}{\pi-e}=F'(\xi),\xi\in(e,\pi)$$

又因为 $$F'(\xi)<0$$

所以 $$F(x)-F(e)<0$$

因此有 $$\frac{\ln\pi}{\pi}<\frac{\ln e}{e}$$

故有　$e\ln\pi<\pi\ln e$

也就是　$e^{\pi}>\pi^{e}$。

## 第二节　π 的 计 算

作为圆周率的符号，目前全世界都使用 π。π 的语源是希腊语 περιφερεια（周围之意）的字头。

最早将 π 作为符号使用的人是 W·乔治（1675～1749），这时的 π 是周围的意思。

以后 J·伯努利使用 C.L，欧拉使用 p（1734），c（1736），哥德巴赫使用 π 等作为圆周率的符号。欧拉在其著名的解析学的书中，使用了 π 作为圆周率的符号，因此在 1748 年以后，一般都使用 π 作为圆周率的符号。

但据说，比乔治还早，奥托莱多（1575～1660）于 1647 年就使用 π 作为圆周率了，巴格也开始使用了 π，究竟是谁和是在哪个地方最先使用 π 的还不清楚。

为了使读者能理解老一辈数学家艰辛劳动过程，我们从公元前开始，按时间的先后顺序，从各种角度叙述有关圆周率计算的

人和事。

计算 $\pi$ 值，人类有记载的是从公元前 3 世纪开始，一直算到今天，虽然获得了数亿位，可以印刷成厚达百万页的书的数，却仍然是一个近似值，因此人们把关于 $\pi$ 的计算，称之为科学史上的“马拉松”。

**一、古率 $\pi=3$**

根据远古的记载，圆周率 $p$ 是圆周长 $l$ 除以直径 $d$ 的值，也就是说“$p$ 是 $l$ 除以 $d$”改成现在的表示方法是 $p=l\div d$。

那时肯定已经知道了加法、减法和乘法等计算方法，只不过还没有圆周率这个词和表示圆周率的符号而已。

**1. 远古时代的圆周率 3、$3\frac{1}{8}$、$3\frac{1}{7}$**

公元前 2000 年的巴比伦人认为圆周的值是 3 或 $3\frac{1}{8}$。另外稍后时代的埃及人将圆周率的值写成现在的表示形式为 $p=4\times\left(\frac{8}{9}\right)^2$。此公式原式表示在有名的林德纸莎草纸上，写成小数就是 3.16049。

在那时，假设直径的长度为 1，则圆周的长度是比 3 和 $\frac{1}{7}$ 加在一起要小的数。按着这样想像的话圆周率应该是在 $3\frac{1}{8}$ 和 $3\frac{1}{7}$ 之间了。

由此可知，大概远古时代的圆周率是 3、$3\frac{1}{8}$、$3\frac{1}{7}$，而它们都起到了相当大的作用。

**2. 阿基米德的圆周率 $\pi\approx3.14$**

古希腊的数学家、力学家阿基米德（公元前 287 年～公元前 212 年），也是世界上最著名的科学家之一。他首创割圆方法计算圆周率的近似值。约在公元前 3 世纪他就求出了 $\pi$ 的近似值 $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$，用小数表示为 $3.140845\cdots<\pi<3.142857\cdots$

$\left(\pi\approx\frac{211875}{67441}\approx3.14163\right)$，用这种方法计算圆周率显然只能精确到小数点后第2位，因此圆周率就为3.14。

在公元前212年，希腊在战争中失败了，坚守三年的叙古拉城终于被罗马人攻破了。上了年纪的阿基米德，在敌人士兵攻进他家时，他正蹲在地上专心致志地研究几何图形。士兵践踏了他所研究的图形，他不假思索地喊到“不要践踏我的图形”，因而被一个野蛮的罗马士兵杀害了。

阿基米德直到死还在研究几何图形，日后罗马国王得知此件事，也为杀了一位杰出的人士而感到遗憾。

阿基米德是一位有许多发明的科学家，他把数学方法与力学原理相结合，发现了球体积公式和其他的计算方法。

他发现了用小的力可以推动大物体的杠杆原理，他曾说“给我一个足够大的杠杆和支点的话，即使地球也能推动”。

他发现比重是因为进入浴池的瞬间觉得自己的身体变轻了。当他发现这一现象后非常地高兴,竟然一丝不挂地走到了大街上。

他使用比重的方法，证明了王冠不是纯金打制的，这也是个有名的故事。

**3. 我国古代数学关于π的计算**

在东汉初年的数学书《周髀算经》里已经有了“周三经一”的记载，就是说，直径是1的圆，它的周长等于3，这就我们前面说的“古率”。

人们经过长期的实践，发现这个比率太小。到西汉末年，刘歆（约公元前50年～公元23年）将圆周率定为3.1547，是他在中国首先开创了不用“古率”的先例。

东汉时代的张衡（公元78年～公元139年）得的两个比值，一个是$\frac{92}{29}=3.17241\cdots$，另一个是$\sqrt{10}\approx3.1622\cdots$。印度数学家婆罗笈多（公元598年生）也曾定圆周率为$\sqrt{10}$，但这已迟于张衡500多年了。

## 二、徽率 π=3.14

三国时代，魏人刘徽（公元263年）创立了求圆周率准确值的原理。首先，他在注释《九章算术》一书时，看到古率"周三经一"很不同意。他证明了圆的内接正六边形的周长是直径的三倍，说明所谓周三经一实际上是圆的内接正六边形的周率，而不是圆周率。

他创立了割圆术，用圆的内接正多边形的面积接近于圆的面积。对于他的这一方法我们需要说明几点：

（1）圆的内接正 $3\times 2^n$ 边形，当 $n$ 增加时，它的面积越大，而它的面积与圆的面积之差越小。当 $n$ 无限制增加时，正多边形的面积与圆的面积几乎相等。从这一点来看，表明刘徽当时业已具有了极限概念了。

（2）设 $A$ 是圆的面积，$S_n$ 是圆的内接正 $n$ 边形的面积，那么 $S_{2n}<A<S_{2n}+(S_{2n}-S_n)$。这一点是刘徽的一个重要发现，因为他利用了这一不等式，在估计圆的面积时，就不要用圆的外切正多边形的面积，而只需计算出圆的内接正多边形的面积就可以了。这样计算就简便多了，我们也特别应注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=A$ 这一事实。

下面我们来证明

$$S_{2n}<A<S_{2n}+(S_{2n}-S_n)$$

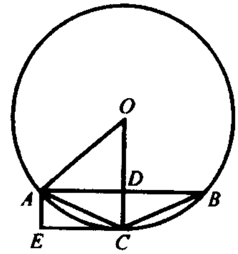



图 1-2

设 $AB$ 是⊙$O$ 的内接正 $n$ 边形的边长，$C$ 为弧 $AB$ 的中点，显然 $AC$ 与 $BC$ 就为内接正 $2n$ 边形的边长了。弦 $AB$ 与半径 $OC$ 交于 $D$，则有 $OD\perp AB$。由图 1-2 知：

因为　扇形 $AOC$ 的面积 $<\triangle AOC$ 的面积 $+\triangle AEC$ 的面积

$\triangle AEC$ 的面积 $=\triangle ADC$ 的面积 $=\triangle AOC$ 的面积 $-\triangle AOD$ 的面积

所以　扇形 $AOC$ 的面积 $<\triangle AOC$ 的面积 $+\big(\triangle AOC$ 的面积