

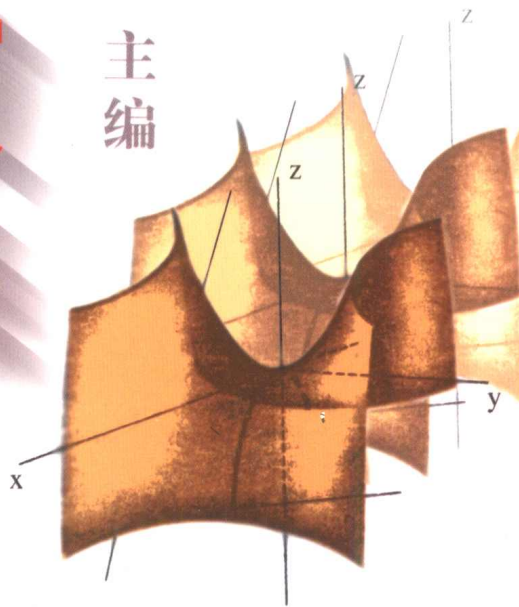
上海普通高校『九五』重点教材

多元微积分

高等数学

谢国瑞

主编



华东理工大学出版社

内 容 提 要

这是大学高等数学(微积分)课程的教材。本册为多元微积分部分。主要内容为多元函数微分法的概念、计算与应用;重积分、曲线积分、曲面积分的概念、计算与应用;还讨论到场论的一些概念以及傅里叶级数等。所含内容深广度达到工学、经济学各专业对相应内容的教学基本要求。

本书的编写比较注意教学法,突出重点,分散难点,注意锻炼处理实际问题的能力,激发学习兴趣,适宜作为高等院校相应课程的教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 多元微积分/谢国瑞主编. —上海:华东理工大学出版社,1998.12(2002重印)

ISBN 7-5628-0904-6

I. 高... II. 谢... III. ①高等数学—高等学校—教材②微积分—高等学校—教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 043070 号

上海普通高校“九五”重点教材

高 等 数 学

(多元微积分)

上海市教育委员会组编

谢国瑞 主编

华东理工大学出版社出版发行

上海市梅陇路 130 号

邮政编码 200237

新华书店上海发行所发行经销

南京理工排版校对公司排版

上海展望印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 16 字数 427 千字

1998 年 12 月第 1 版 2002 年 6 月第 4 次印刷

印数 11001-16030 册

ISBN 7-5628-0904-6/O · 46 定价 22.00 元(平装)
28.00 元(精装)

序 言

以微积分为主要内容的高等数学课程是各工科院校的一门重要基础理论课,其教学状况深受多方关注。近年来,各校对该课程从教学内容、课程体系到教学手段都进行着改革与探索,取得了不少成果。

上海高校工科数学协作组在 1996 年 8 月召开的年会上议定要组织编写一套教材,希望能集中各校的成功经验,并把教材建设工作推向前进。本书就是在这样的背景下,由谢国瑞(华东理工大学)、孙薇荣(上海交通大学)、朱学炎(上海铁道大学)、沈关生(上海海运学院)、姜健飞(中国纺织大学)、蔡兴国(上海理工大学)、龚成通、冯家裕(华东理工大学)及何正伟(上海大学)等编写的一本高等数学(微积分)教材。

该书取材适当,理论与应用并重,在内容及安排上进行了改革,改变了传统的顺序,富有新意,且能自成体系,满足课程的教学要求,适合一般高等工业学校作为该课程的教材。

该书比较重视教学法,对问题的提出、解决问题的思路及来龙去脉介绍得比较清楚,在传授知识的同时,注意培养分析问题和解决问题的能力。编者根据多年教学经验,对涉及高等数学中最基本的一些概念、理论和思想方法的有关内容,作了相对集中又多次反复出现的处理,有利于多数学生的学习与掌握。如对极限概念采取了前后分层次展开讨论的方法,这样不仅使全书能较早地展开对微积分主题的讨论,而且在后面再论极限时,由于对使用极限语言已有一定了解,所以在描述与定义有关概念时,就比较容易理解;及至论及数列极限时,因可用微积分方法处理,而使学生已有数列的知识得到了提高。又如对于数学应用中非常重要的微分方程,早在微分学应用中就插入了一节“列微分方程”,而在有关章节中相对集中地介绍了微分方程的基本概念、解法、应用后,在级数、多元

函数微分学及曲线积分的一些章节中还多次涉及;另外,为了适应在工科学生中加强计算机及经济类知识的教学要求,本书较为重视有关的计算方法及微积分在经济中应用的介绍。

例题是教材的一个重要组成部分,该书的例题量多面广,且举例的目的性明确,或是为了说明、引出问题,或是为了指明解题的思路与方法,或是为了使读者了解高等数学在科技和工程中的广泛应用,使人感到内容丰富有趣,不觉得干瘪枯燥。

该书的出版在高等数学教材的百花园中又增添一株奇葩,可以预期,这对推动教学改革、提高教学质量定将起到积极的促进作用。

王嘉善

1998年1月

编者的话

在国内外,已经有了为数不少的高等数学(微积分)教材,其中不乏具有鲜明特点与优秀的著作,我们之所以愿意自己编写一本,主要是为了更好地适应当前教学的需要,同时也想把编者们在各校进行多年教学、改革中积累的认识、看法提出来,进一步接受实践的检验,为教育改革的大目标、为培养出符合时代发展要求的工科高级专门人才献出绵薄之力。

本书的核心内容是微积分的概念、理论、计算、应用,及一些与之密切相关的课题如微分方程、级数等。由于已把为后继课建立必要的基础及发展运用数学知识直接处理实际问题的能力并列为课程的教育目标,所以随着内容的展开,不仅涉及到微积分在几何、物理、工程、经济等众多领域的应用,也重视用计算机求近似解的处理方法;而且,对于数学应用于实际问题必须涉及的几个步骤:描述问题(建立问题的数学模型)、分析与求解、将结果用于实际问题去作解释进行预测或作出控制、决策等,在指导思想上都给予了同样的重视,前后多次涉及了微分方程的建立,还通过变量连续化而用微分法解释一些经济或数列中的结果。

在编写方式上,本书既大体保持了微积分教材传统的演绎推理与几何直观并重的特征,又经常通过归纳和类比“发现”概念、“猜测”结果、“想出”解法,很多地方详细介绍了“分析过程”,也不时“点明”沿怎样的思路考虑问题,对不少例题介绍了从不同角度入手导致的多种解法以启迪思维和引起学习兴趣。这种种努力是希望在教材中直接反映本课程对提高工科学生数学素质的要求,而且也希望能对多数工科学生培养数学思维能力作些有益的引导。

从目录可以看出本书内容体系编排上的一些特点。这里要作几点说明。首先,如所熟知,极限是微积分的基本研究方法。为了

强化这部分内容的教学,更为了能尽快地进入微积分主题的学习(以更好地适应其他课程应用微积分的要求),我们把极限内容作了分散处理:在引入导数概念的同时,主要讨论函数在 $x \rightarrow a$ 时的极限,初次接触极限语言,熟悉极限性质,导出一些极限计算方法;在再论极限一章中才介绍涉及无穷的种种极限问题,在这里,极限的语言、性质得到巩固,计算更为系统化;而广义积分则被明确规定成定积分的极限;习惯上在极限论中首先处理的数列极限,被推迟到和级数放在一起讨论。这样做的原因,既考虑了要把学生已有数列极限的知识提高一步需要足够的背景知识,也考虑到它在定义“级数和”这个概念中有直接的作用。其次,关于对数函数和指数函数,我们不仅承认学生的已有知识,在第1章内作了简单的回顾,而且还在积分一章中对其作了较为自然的重新定义。为便于不同教学要求的课程安排,本书将多元函数积分学的内容处理成了四个章次,即二重积分、平面曲线积分、多重积分以及第二型曲面积分与积分公式,教师可视具体情况,调整教学内容的顺序,或只教其中的部分章节。

演算一定数量的习题是学好微积分的必由之路。为此,本书以两种不同的方式安排了相当数量的练习与习题供学生选用。穿插在课文中的那些最基本的练习题是每个学生都应独立完成的,而各节末的习题则可根据各自的具体情况或在教师指导下演算其中的部分或全部。对少数要求进行强化训练的学生,可选用配套的习题集。

“大学教书不是照本讲”^①,按这种认识,更为了有利于学生在今后的自学扩展知识面、提高综合运用知识的能力,本书也包括了少量可教可不教的内容。如某些关于应用课题与个别应用数学概念的讨论以及少数的习题等(特别是那些带*的部分内容、节、段、

^① 华罗庚:高等数学引论第一卷第一分册序言。科学出版社,1963年(华罗庚:1910~1985,中国现代数学家)。

定理或示例)。对于这些“不属”教学基本要求范围内的题材,老师们在教学中可灵活掌握,或用作专题讲座的素材,也可指导学有余力的学生自学,等等。

编写出能够反映“培养学生能力”要求的高等数学教材,是我们自悬的努力目标,对这样一项带探索性的工作,自不敢说在这里已取得了多少的成功,但我们确信已迈出了开始的一步。因此,我们特别要感谢给这项工作以有力支持的许多领导、专家和同志们。

本书的编写是在上海市教委、高教办、上海市高校工科数学协作组、华东理工大学校领导、教务处的直接支持下,由多所高校数学教师发扬协作精神在一年内共同完成的。参加讨论本书编写计划、执笔编写初稿的有:孙薇荣(上海交通大学)、朱学炎(上海铁道大学)、沈关生(上海海运学院)、姜健飞(中国纺织大学)、蔡兴国(上海理工大学)、龚成通、冯家裕(华东理工大学)及何正伟(上海大学)。华东理工大学的蒲思立、张明尧、陈秀华、唐雪芬、王刚、殷锡鸣等提供了不少有益的建议。王嘉善(上海交通大学,主审)、骆承钦(同济大学)、曹助我(上海海运学院)等教授为本书审稿并提出了不少宝贵意见。我们对给本书的编写、出版以种种帮助及爱护、使用本书与提出各种意见的同志们深表谢意。由于水平所限,书中难免留存错、漏不妥之处,敬祈专家、读者予以指正。

谢国瑞

1998年1月

目 录

第1章 向量、空间解析几何

1.1 向量	1			
1.1.1 引言(1)	1.1.2 向量概念(4)	1.1.3 向量的线性运算(6)	1.1.4 内积 投影(10)	习题 1.1(14)
1.2 空间直角坐标系	16			
1.2.1 向量沿坐标轴的分解(17)	1.2.2 向量代数(18)	1.2.3 外积(24)	1.2.4 混合积(28)	习题 1.2(30)
1.3 平面与直线	31			
1.3.1 平面(32)	1.3.2 直线(41)	习题 1.3(50)		
1.4 曲面与曲线	54			
1.4.1 一些特殊曲面(54)	1.4.2 二次曲面(60)	1.4.3 空间曲线(68)	习题 1.4(73)	

第2章 多元函数微分学

2.1 多元函数.....	75
2.1.1 多元函数概念(75)	2.1.2 二元函数的几何表示(80)
2.1.3 二元函数的极限与连续(83)	习题 2.1(90)
2.2 梯度.....	91
2.2.1 偏导数 梯度(91)	2.2.2 全微分 曲面的切平面 与法线(99)
2.2.3 方向导数(108)	习题 2.2(114)
2.3 微分法	117
2.3.1 链式法则(117)	2.3.2 微分形式不变性(123)
2.3.3 隐函数微分法 空间曲线的切线与法平面(125)	习 题2.3(138)
2.4 泰勒公式	140
2.4.1 高阶偏导数(141)	2.4.2 二元函数的泰勒公式 (151)
	习题 2.4(155)
2.5 极值	157

2.5.1 局部相对极值(157) 2.5.2 最大最小值问题 条件
极值(165) 2.5.3 拉格朗日乘子法(169) 2.5.4 最小二
乘法(176) 习题 2.5(183)

第3章 二重积分

- 3.1 二重积分概念 185
3.1.1 两个实际问题(185) 3.1.2 定义(188) 3.1.3
简单性质(191) 习题 3.1(193)
3.2 二重积分的计算与应用 195
3.2.1 化二重积分为二次积分(195) 3.2.2 利用极坐标计
算二重积分(207) 3.2.3 两个物理应用(216) 习题 3.2
(221)
3.3 曲面面积 第一型曲面积分 223
3.3.1 曲面面积(223) 3.3.2 曲面质量(228) 3.3.3
第一型曲面积分(231) 习题 3.3(240)

第4章 平面曲线积分

- 4.1 第一型平面曲线积分 242
4.1.1 概念(242) 4.1.2 计算与应用(247) 习题 4.1
(254)
4.2 第二型平面曲线积分 255
4.2.1 平面向量场(255) 4.2.2 第二型曲线积分的概念
(259) 4.2.3 计算(263) 4.2.4 第二型曲线积分的另一
形式(270) 习题 4.2(271)
4.3 格林公式 272
4.3.1 格林公式(272) 4.3.2 曲线积分与路径无关的条件
(282) 4.3.3 恰当微分(288) 4.3.4 对平面场论的一个
应用(297) 4.3.5 格林公式的向量形式(300) 习题 4.3
(304)

第5章 多重积分

- 5.1 多重积分 307
5.1.1 三重积分的概念(307) 5.1.2 三重积分的计算(313)
5.1.3 多重积分的计算*(330) 习题 5.1(334)

5.2	用柱面坐标和球面坐标计算三重积分	336
5.2.1	柱面坐标和球面坐标(336)	
5.2.2	用柱面坐标和球面坐标计算三重积分(340)	
	习题 5.2(356)	
5.3	重积分的变量置换法	358
5.3.1	$R^2 \rightarrow R^2$ 的映射(359)	
5.3.2	雅可比式的几何意义(363)	
5.3.3	重积分变量变换公式(366)	
	习题 5.3(378)	
第 6 章 第二型曲面积分、积分公式		
6.1	第二型曲面积分	380
6.1.1	第二型曲面积分的概念(380)	
6.1.2	第二型曲面积分的计算(386)	
	习题 6.1(393)	
6.2	奥-高公式	394
6.2.1	奥-高公式(394)	
6.2.2	散度(399)	
	习题 6.2(403)	
6.3	斯托克斯公式	404
6.3.1	空间曲线积分(404)	
6.3.2	旋度(409)	
6.3.3	斯托克斯公式(412)	
	习题 6.3(421)	
第 7 章 傅里叶级数		
7.1	引言	423
7.1.1	周期函数(423)	
7.1.2	三角函数系的正交性(426)	
	习题 7.1(428)	
7.2	周期函数的傅里叶级数展开	429
7.2.1	周期 2π 的函数(429)	
7.2.2	周期 $2l$ 的函数(437)	
	习题 7.2(442)	
7.3	有限区间上函数的傅里叶级数展开	443
	习题 7.3(452)	
附录 2 阶与 3 阶行列式		454
习题参考答案		460
参考书目		497

第 1 章 向量、空间解析几何

向量是个重要的数学工具,在科学和工程中试图运用数学方法之际,有许多量需藉以刻画;在多元函数的讨论中,由于利用向量而可使许多概念的表述更为简单明晰。

本章先介绍向量代数基础和空间直角坐标系,利用坐标系为工具,向量的运算可通过对其坐标的适当数字运算而完成。这就为对一些数字运算或关系赋予“几何意义”奠下了基础。在最后二节,利用这两个工具,讨论了空间解析几何中一些有用的基本事项。

1.1 向 量

1.1.1 引言

将数学用于科学或工程时,通常要把有关的量和数相联系。经验表明,许多量可用数字表出其特征,如物体的质量、体积、某人跑 100 米所用的时间等。由于处理这些量所遵循的代数规则与平常运算实数的规则相当,所以普遍接受这样的表达方式,并称这些量为**标量**。

另外,有些量却不是只用单个数字就足以表达其特征的。例如,为了表达将物体从点 A 移到点 B 这个位移,只描述移动的距离是不够的,还要说明移动的方向。亦即要用距离和方向两个特征来共同描述一个**位移**。又如,一个力作用于某物体上,也需由此力的大小及施力的方向共同形成此作用力的效果。还可举出许多需用几个数字共同表达其特征的量:一艘船在航行时的速度,需用速

率 v 及方向 θ 刻画;而飞机的飞行则要用速率 v 、方向 θ 、高度 h 三个数字来表征。在处理这些量的过程中,人们发现一些共同的规律,从而形成了数学上称作向量的概念。在给向量下定义之前,先考察位移的一些性质。

设点 A 沿直线 AB 的方向移到点 B 处,将此位移用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 来表示(见图 1-1)。如果这同样的位移发生在另一点 P 处(见图 1-1),则将点 P 移至点 Q 。 $\overrightarrow{PQ}$ 在长度上等于 $\overrightarrow{AB}$,两者是平行且指向相同的,我们写作 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$ 。所以从位移的大小和方向两方面看,符号 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\overrightarrow{PQ}$ 代表着同一个量。

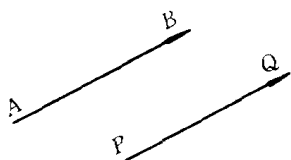


图 1-1

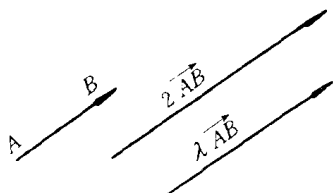


图 1-2

处理位移的简单代数运算可描述如下:例如,若想把点 A 顺着从 A 到 B 的方向移至距点 B 两倍远之处,自然就可将此位移记成 $2\overrightarrow{AB}$ 。同理, $\lambda\overrightarrow{AB}$ (λ 为正值常数)的意义是保持 $\overrightarrow{AB}$ 原来的方向,而将长度变为原来的 λ 倍(见图 1-2)。这是位移的**倍数**。**加法**的运算可看作是连续两次位移的结果。参照图 1-3,设 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{RS}$ 为两已知位移,若 $\overrightarrow{BC}$ 等于 $\overrightarrow{RS}$,则当对点 A 连续施以这两次位移的结果是先将点 A 移至点 B ,然后移到点 C ,记为 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{AC}$ 。即

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad (1-1)$$

称之为加法的**三角形定律**,即沿 $\triangle ABC$ 的两边 AB 和 BC 作相继的两次位移,其最终结果无异于沿第三边 AC 的一次位移。有时也将加法规则称为**平行四边形定律**,如图 1-4, A, B, C, D 依序为一平行四边形的四个顶点,则 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$,因 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$,所以当 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ 不平行时,平行四边形定律和三角形定律是一回事。

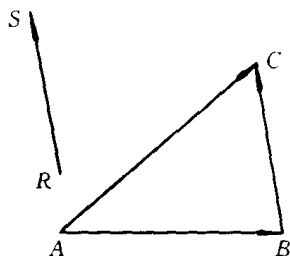


图 1-3

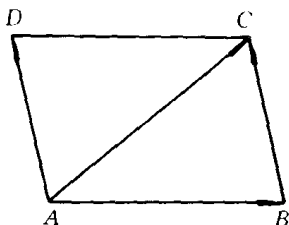


图 1-4

既然线段 AA 的长度为 0, 则位移 $\vec{AA}$ 将把点 A 留在原位置不动, 而按式 (1-1) 知

$$\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA}$$

从而将 $\vec{BA}$ 解释成 $-\vec{AB}$, 即 $\vec{BA}$ 是与 $\vec{AB}$ 方向相反而长度相等之位移。进一步, 可得负数和位移相乘之意义, 例如 $\lambda = -\mu (\mu > 0)$, 则 $\lambda \vec{AB} = -\mu \vec{AB}$, 其意义为向量 $(\lambda \vec{AB})$ 与向量 $\vec{AB}$ 的方向相反而长度为 $\vec{AB}$ 之 μ 倍 (图 1-5)。

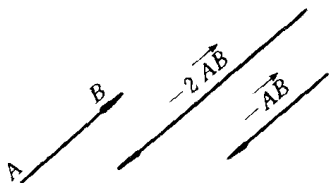


图 1-5

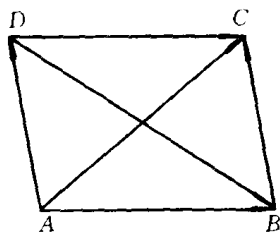


图 1-6

例 1 设 A, B, C, D 为某平行四边形之顶点 (参图 1-6), 试解释 $\vec{AB} + \vec{AD}$ 和 $\vec{AB} - \vec{AD} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{AB} + (-\vec{AD})$ 之几何意义。

解 根据加法的平行四边形定律, $\vec{AB} + \vec{AD}$ 等于位移 $\vec{AC}$, 这是平行四边形通过 A 点之对角线。又因为

$$\vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD},$$

故

$$\vec{AB} - \vec{AD} = -\vec{BD} = \vec{DB}.$$

这个位移以“被减位移”的终点为终点,以“减位移”的终点为起点。在图形上看,这是平行四边形的另一条对角线。

实践表明,有许多量需用一标量表明其大小,再配上一个方向才能表达其特征,且这些量都符合加法三角形定律。例如,图 1-7 所示的一个简单实验,说明了力的合成是符合加法三角形(平行四边形)定律的。图中三条弹簧汇交于点 O ,其中一条负载重 W 的物体,另外两条则支撑 W 的负荷。张力 T_1, T_2 沿着弹簧作用,其合力必须能平衡所负的物重。欲测量这两个弹簧的合力,可用平行四边形定律。沿两条支撑弹簧方向画直线,使长度等于张力 T_1, T_2 的大小,

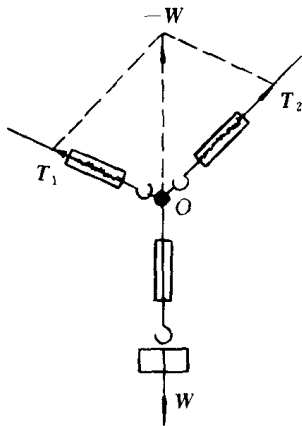


图 1-7

则其围成之平行四边形的对角线就是 T_1 和 T_2 的合力。经实验证实,此对角线的大小与弹簧负载 W 的大小相等,方向相反,即 $T_1 + T_2 = -W$ 。

1.1.2 向量概念

定义 1 一个既有大小(标量)又有方向的量称为**向量**(或**矢量**),且任意两个向量的加法遵循三角形定律。

具有向量特性的量有很多,特别感兴趣的有:位移、速度、加速度、动量、冲量、力、角速度等等。

常用小写黑斜体字母 $a, b, \dots$ 或小写斜体字母上加箭头 $\vec{a}, \vec{b}, \dots$ 符号表示向量,但向量的几何原型是有向线段,所以也常用 $\vec{AB}, \vec{CD}, \dots$ 符号表示向量,并分别用 $|a|$ 或 a 表示向量 a 的模或长度,对符号 $\vec{AB}$ 表示的向量则相应地用 $|\vec{AB}|$ 或 AB 表示向量 $\vec{AB}$ 的模(为避免与绝对值符号混淆有时也用 $\|a\|$ 等表示向量模,此

时也称之为向量范数)。

在向量的有向线段(几何)表示法 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, ...中, 点 A 、 C 等分别是有向线段的起点, 而 B 、 D 等则分别是它们的终点。若在向量 $\mathbf{a}$ 的几何表示 $\overrightarrow{AB}$ 中, 将起点 A 换成另一点 P , 则终点 B 也将相应地改成为 Q , 这时有 $AB = PQ$ 以及 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{PQ}$ 平行且指向相同(参图 1-1), 故 $\overrightarrow{PQ}$ 同样可看作是这个向量 $\mathbf{a}$ 的几何表示。几何地说来, 我们把向量看作是起点可自由改变的**自由向量**。上述的向量 $\mathbf{a}$ 是代表着 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PQ}$ 等相等有向线段集合[共性]的量。在本书中, 说到向量 $\overrightarrow{AB}$ (这是有向线段), 均指它是向量 $\mathbf{a}$ 的一个几何表示, 起点 A 是为用向量方法表述或解决问题而设, 对向量而言这不是本质的要求。当然, 根据实际情况, 有时向量的起点不能随便改变, 例如, 向量 $\mathbf{a}$ 若代表一个力, 其起点代表作用点, 这时起点就不能随便改变了。称这种向量为**固端向量**。除非说明, 本书一般只考虑自由向量。

为用向量方法解决问题而将向量表成有向线段时, 一种做法是使它们从某一定点开始, 向规定的方向延伸至规定的长度, 称这个定点为**原点**, 通常记作 O 。若 P 是空间任意一点, 则有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 代表一个向量, 它可视为点 O 至点 P 的位移。习惯上, 称这个向量为点 P 相对于原点 O 的**位置向量**或**径向量**, 记作 $\mathbf{r}$ 。这样, 一旦选定了原点 O , 则每个向量都可看作是某一点相对于 O 的径向量。径向量具有唯一性, 即若两个点相对于 O 的径向量相等, 则此两点必重合为一点。

在力学中使用径向量, 是为了描述一个质点受一组力作用之后的运动情形; 而在几何学里用径向量, 可使图形用较易的方式表示, 并为证明定理提供途径。例如, 若 $\mathbf{r}$ 代表点 P 相对于点 O 的径向量, 而 d 是一个正值常数, 则方程式 $|\mathbf{r}| = d$ 表示点 P 是以 O 为中心 d 为半径之球面上的一点, 我们就把 $|\mathbf{r}| = d$ 称为球面的向量方程式。

1.1.3 向量的线性运算

首先给出向量相等的定义：

定义 2 若向量 a 和 b 的方向相同且大小一样(即 $|a| = |b|$)，则称 a 与 b 相等，记作 $a = b$ 。

(1) 向量的加法

在向量的定义中已对向量加法规定要遵循三角形定律，借助图形(图 1-8, 图 1-9)可说明向量的加法运算服从以下规律：

① 交换律： $a + b = b + a$ ； (1-2)

② 结合律： $(a + b) + c = a + (b + c)$ 。 (1-3)

值得注意的是，在图 1-9 中， $a + b$ 及 $b + c$ 等，未必在同一平面上。

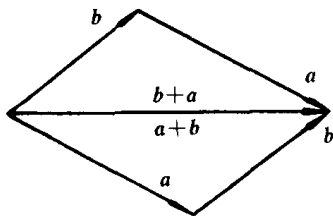


图 1-8

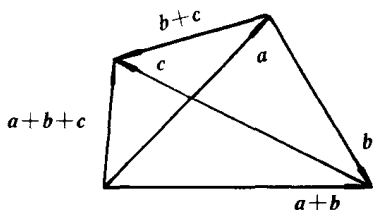


图 1-9

例 2 已知 A, B, C, D, E 是空间相异的五个点，试证：

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} = \vec{AE}.$$

解 根据加法的三角形定律，有

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC},$$

从而有

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = (\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD},$$

及

$$\begin{aligned} \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} &= (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}) + \vec{DE} \\ &= \vec{AD} + \vec{DE} = \vec{AE}, \end{aligned}$$

读者可自行作图弄清其几何意义,并导出类似于式(1-1)的规律。

长度为零的向量只有一个,称为**零向量**,记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$,可看作是满足下式

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a} \quad (\mathbf{a} \text{ 为任意向量})$$

之唯一向量。进一步,对于已知向量 $\mathbf{a}$,可由

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

定义 $\mathbf{a}$ 的**负向量** $-\mathbf{a}$, $(-\mathbf{a})$ 与 $\mathbf{a}$ 的大小相等而方向相反。

(2) 向量的减法

减法是加法的逆运算,若 $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$,则称 $\mathbf{c}$ 是 $\mathbf{a}$ 减 $\mathbf{b}$ 的差向量,记作 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 。也可规定

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$

在图 1-10 中,分别用 $\vec{OA}$ 及 $\vec{OB}$ 代表向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$,点 C 是平行四边形 $OACB$ 的第四个顶点,那么可以看出这样的结论:若一个平行四边形的两邻边分别

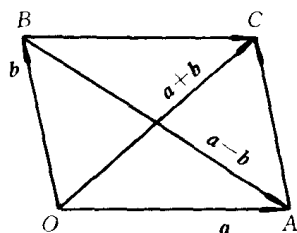


图 1-10

代表两个向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$,则带有适当指向的两条对角线(即 $\vec{OC}$ 与 $\vec{BA}$)分别代表向量 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 。这也称为向量加法的**平行四边形定律**,容易明白,当 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 不平行时,它与三角形定律是相当的。

(3) 数量与向量的乘法

位移的倍数这个概念可推广成**向量倍数**即**数乘**运算:对给定的标量 λ 和向量 $\mathbf{a}$,则 $\lambda\mathbf{a}$ 代表一个向量,其模为 $|\lambda||\mathbf{a}|$,在 $\lambda > 0$ 时其指向与 $\mathbf{a}$ 相同,而当 $\lambda < 0$ 时方向与 $\mathbf{a}$ 相反, $\lambda = 0$ 时, $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 。

根据这样的规定,容易推知成立如下命题:

定理 1 非零向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 平行(记作 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$)的充要条件是,存在实数 λ ,使成立 $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ 。

习惯上常将加法及数乘两种运算及其结合统称为**线性运算**。向量的线性运算具有下列性质: