

保角变换 在电法勘探中的应用

徐世浙 王柏钧

地质出版社

保角变换在电法勘探中的应用

徐世浙 王柏钧 著

地 质 出 版 社

保角变换在电法勘探中的应用

徐世浙 王柏钧 著

国家地质总局书刊编辑室编

地质出版社出版

地质印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

1977年5月北京第一版·1977年5月北京第一次印刷

印数1—4,000册·定价0.60元

统一书号: 15038·新203

前 言

在直流电法勘探中，已经用解拉普拉斯方程的方法和影像法解决了边界形状比较简单的某些电场问题，至于那些边界形状比较复杂的电场问题，这些方法就难于处理了。毛主席教导我们：“不同质的矛盾，只有用不同质的方法才能解决。”目前在电法勘探中还不常用的复变函数的保角变换法确实能解决不少边界形状比较复杂的电场问题。例如：地形对直流电场的影响；起伏基底对直流电场的影响；某些形体对全空间和半空间均匀电流场的影响等等。此外，保角变换法的数学运算以及解答的形式都要比解拉普拉斯方程等方法简单得多。

为了便于读者了解本书的数学工具，本书的前面三章介绍复变函数的基本知识、若干初等函数的变换及椭圆函数的变换。这些数学内容的选择以本书用到的保角变换为准，叙述比较简单，并不讲究理论上的完整性和严格性。为了使篇幅不致太大，书中用得较少的一些复变函数知识在这几章就不讲了，读者可参考有关的复变函数著作。

本书的后面几章依据复变函数的保角变换理论，推出了上面所提到的那些直流电场的数学解答。为了说明这些数学公式的作用，每章都有这些解答实际应用的例子。

在本书的编写和出版的过程中，作者得到双方工作单位领导的深切关心和帮助。内蒙古地质局物探大队、云南地质局物探大队、云南大学数学系、中国科技大学二系、成都地质学院七系等有关单位和同志提供了不少宝贵的意见。成都地质学院生产科研处等有关处室在审校稿件、绘图和联系出版等方面，给以大力支持和关怀，对此我们表示由衷的感谢。

由于作者水平有限，书中难免有不少缺点和错误，恳切希望读者提出批评和指正。

徐世浙

王柏钧

(中国科技大学)

(成都地质学院)

毛主席语录

人类总得不断地总结经验，有所发现，有所发明，有所创造，有所前进。

中国人民有志气，有能力，一定要在不远的将来，赶上和超过世界先进水平。

当着人们已经认识了这种共同的本质以后，就以这种共同的认识为指导，继续地向着尚未研究过的或者尚未深入地研究过的各种具体的事物进行研究，找出其特殊的本质，这样才可以补充、丰富和发展这种共同的本质认识，而使这种共同的本质认识不致变成枯燥的和僵死的东西。

目 录

第一章 复变函数的基本知识	1
§ 1.1 复数及其几何表示	1
§ 1.2 复变函数概念	7
§ 1.3 复变函数的导数	9
§ 1.4 复变函数的积分	15
第二章 若干初等函数的变换	18
§ 2.1 $w = A(z - z_0)$ 的变换	18
§ 2.2 $w = z^n$ 的变换	19
§ 2.3 $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$ 的变换	21
§ 2.4 $w = e^z$, $w = \ln z$ 的变换	24
§ 2.5 $w = \operatorname{sh} z$, $w = \operatorname{Arsh} z$ 的变换	25
§ 2.6 $w = \operatorname{th} z$ 的变换	27
§ 2.7 接连变换	29
第三章 许克变换和椭圆函数的变换	31
§ 3.1 许克变换	31
§ 3.2 椭圆函数 $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$	37
§ 3.3 椭圆函数 $E(x)$, $Z(x)$	41
§ 3.4 椭圆函数 $\Pi(x, a)$	42
§ 3.5 虚变换公式和复数展开式	44
§ 3.6 $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$ 的级数展开式	48
§ 3.7 椭圆函数的变换图形	49
第四章 用保角变换法解决直流 电场问题的依据和方法	65

第五章 地形对直流电场的影响	72
§ 5.1 理论计算法	72
§ 5.2 模型实验法	82
§ 5.3 地形校正的实例	86
第六章 全空间均匀电流场中的解	88
§ 6.1 薄板	90
§ 6.2 圆柱体	92
§ 6.3 椭圆柱体	96
§ 6.4 方柱体	101
§ 6.5 解答的应用实例	108
第七章 半空间均匀电流场中的解	111
§ 7.1 薄板	111
§ 7.2 截面具有双圆曲线形状 (近似于椭圆) 的柱体	118
§ 7.3 解答的应用实例	126
第八章 基底对直流电场的影响	129
§ 8.1 基底对均匀电流场的影响	129
§ 8.2 基底对线电源电场的影响	162
§ 8.3 解答的应用实例	169

第一章 复变函数的基本知识

本书解决电 流场问题的 数学工 具是复变函数的保角变换理论，我们首先介绍一些复变函数的基本知识。

§ 1.1 复数及其几何表示

一、复数

复数的一般形式是

$$z = x + iy$$

式中 x, y ——实数， $i = \sqrt{-1}$ ——虚单位。当 $y=0$ 时，复数 z 变成实数 x ；当 $x=0$ 时， $z = iy$ 叫作纯虚数。通常把 x, y 叫作复数的实部和虚部。

复数可以用平面上的点来表示。在直角坐标系中，以横坐标为 x 、纵坐标为 y 的点表示复数 $z = x + iy$ 。图 1.1 中 ox 叫实轴， oy 叫虚轴。例如 $z = -2 + i$ 用点 $(-2, 1)$ 表示；复数 $z = 0$ 用原点表示；实数用 x 轴上的点表示；纯虚数用 y 轴上的点表示。这种表示复数的点的 xy 平面叫作复平面或 Z 平面。

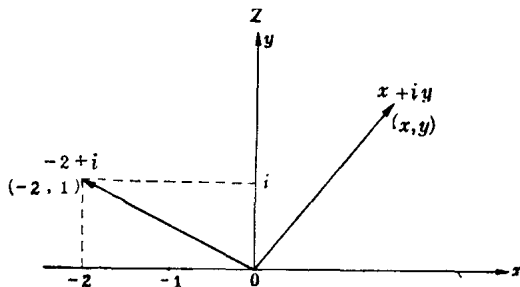


图 1.1

同时可以把复数看成从原点至点 (x, y) 的矢量, 这样我们又可以将一个复数对应一个矢量。复数的点表示和矢量表示都是很有用的。

二、复数的三角型和指数型

令 r, θ 是点 z 的极坐标 (图1.2), 则

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

于是复数可写成

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (1.1)$$

这就是复数的三角型。其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 叫作 z 的模(或绝对值),

用 $|z| = r$ 表示; $\theta = \arctg \frac{y}{x}$ 叫

作 z 的幅角, 用 $\arg z$ 表示。

例如, 复数 $2 + 2i$ 的模 $r =$

$$2\sqrt{2}, \text{ 幅角 } \theta = \frac{\pi}{4}, \text{ 所以 } 2 + 2i = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\text{同理 } i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}.$$

在高等数学中, e^x 可展为马克劳林级数,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

令 $x = i\theta$, 并由 $i^2 = -1$, 得

$$e^{i\theta} = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right)$$

因为

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots$$

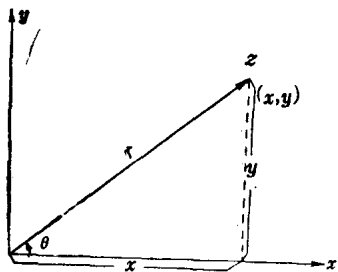


图 1.2

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

所以有

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad (1.2)$$

这就是有名的尤拉公式。用 $-\theta$ 代 θ ，得

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

与上式相加或相减，得

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad (1.3)$$

这些把指数函数和三角函数联系起来的公式都是很重要的。

利用尤拉公式，我们可把复数的三角型写成指数型，即

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \quad (1.4)$$

例如

$$2 + 2i = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

三、复数的基本运算

如果复数

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

的实部和虚部分别相等，即 $x_1 = x_2$ ， $y_1 = y_2$ ，我们就说 z_1 和 z_2 相等。

关于复数的运算，与普通实数完全相同，服从代数上的通常法则，只需加上一条补充： $i^2 = -1$ 。

1. 加法

两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ ， $z_2 = x_2 + iy_2$ 的和由下式表示：

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

由图1.3可见， $z_1 + z_2$ 可用 z_1 和 z_2 的矢量和表示（平行四边形法则）。

2. 减法

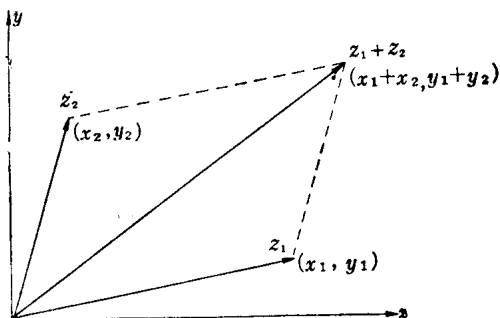


图 1.3

两个复数的差由下式表示

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

由图1.4可见, $z_1 - z_2$ 可用 z_2 到 z_1 的矢量表示。

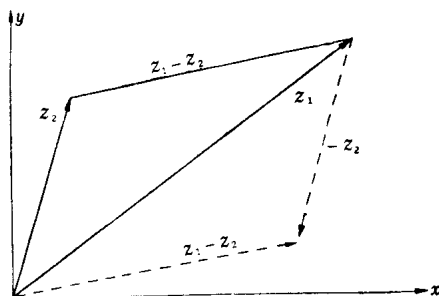


图 1.4

3. 乘法

两个复数之积由下式表示

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + i y_1) \cdot (x_2 + i y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) \\ &\quad + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

即按通常乘法展开, 并令 $i^2 = -1$ 即可。如果用指数型表示,

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

则它们的积是:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad (1.5)$$

可见复数相乘有清晰的几何意义, 即它的模为两个复数模的乘积,

它的幅角就是两复数幅角的和。例如

$$2+2i=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad i=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

故 $(2+2i)i=2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2})}=2\sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}$

在图1.5上表明矢量 $2+2i$ 被旋转了 90° ，而模仍不变，因为 i 的模是1的缘故。

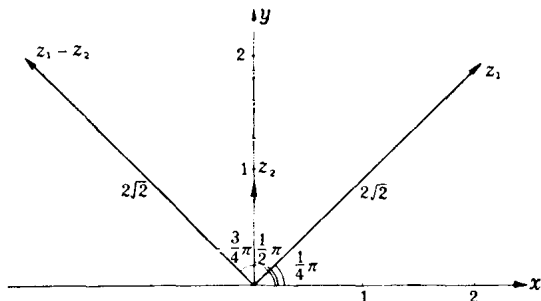


图 1.5

上面的结果用式表示，即

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad (1.6)$$

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 \quad (1.7)$$

对于 n 个复数相乘有

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)}$$

其中 $r_1, r_2, \cdots, r_n, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$ 分别表示 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 的模和幅角。当 $z_1 = z_2 = \cdots = z_n$ 时，我们得到乘方的公式：

$$z_1^n = r_1^n e^{in\theta_1} \quad (1.8)$$

4. 除法

两个复数相除，由下式表示

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

上式可用 $x_2 - iy_2$ 同乘分子分母得到。用指数型表示除法，则有

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (1.9)$$

由此可见，两个复数的商，它的模等于两复数模相除，而它的幅角则等于两复数幅角相减。当 $z_1 = 1 = e^{i0}$ 时，有

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$

而

$$\frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n} e^{-in\theta}$$

5. 开方

复数 $z^{\frac{1}{n}}$ 表示 z 的 n 次方根，它表示某一复数 z_0 ，其 n 次幂

为 z ，即

$$z_0 = z^{\frac{1}{n}} \text{ 或 } z_0^n = z$$

设 $z = r e^{i\theta}$ ， $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ ，代入上式，有

$$r_0^n e^{in\theta_0} = r e^{i\theta}$$

于是

$$r_0^n = r, \quad n\theta_0 = \theta \text{ ①}$$

或

$$r_0 = r^{\frac{1}{n}}, \quad \theta_0 = \frac{\theta}{n}$$

所以

$$z_0 = z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}$$

将乘幂和方根两个式子结合起来，则得

$$z^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}} e^{i\frac{m}{n}\theta} \quad (1.10)$$

除了上面叙述的一些运算外，还有所谓共轭复数的概念。如果两个复数，它们的实部相等，而虚部仅符号相异，如 $x + iy$ 与 $x - iy$ ，则它们互为共轭复数，用

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$$

① 此处只考虑了 θ_0 的一个解，一般情况下 $n\theta_0 = \theta + 2k\pi$ 。

表示它们。在图形上它们对称于 x 轴，也可写成如下的指数型

$$z = re^{i\theta}, \quad \bar{z} = re^{-i\theta}$$

§ 1.2 复变函数概念

一、复变函数

完全与在实数中所讨论的类似，复数也可分为常数与变数。如果对于复变数 z 的每一个值都能按照某个一定的规律有复变数 w 与它对应，我们就说 w 是复数 z 的一个复变函数，用 $w = f(z)$ 表示。例如

一次多项式

$$w = A(z - z_0)$$

幂函数

$$w = z^n$$

双曲正弦

$$w = \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

等都是复变函数的例子。

令 $z = x + iy$ 与 $w = u + iv$ ，这里 x, y, u 与 v 都是实变数，如果 w 是 z 的函数，则

$$u + iv = f(x + iy)$$

每对实变数 u 与 v 都是由一对实变数 x 与 y 来决定的，就是

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

例如

$$w = z^2 + 1$$

则

$$u + iv = x^2 - y^2 + 1 + 2xyi$$

于是

$$u = x^2 - y^2 + 1, \quad v = 2xy$$

就复变函数的几何意义而言，可作如下表示，即用两个平面，一个是 Z 平面（即 xy 平面），一个是 W 平面（即 uv 平面）。在 $w = f(z)$ 中给 z 以定值 z_0 ，就可得出 $w_0 = f(z_0)$ 的值。分别在 W 和 Z 平面画出 w_0 与 z_0 ，由此得出 z_0 和 w_0 的对应关系。我们就说函数 $w = f(z)$ 把 Z 平面上的点 z_0 变换为 W 平面上的 w_0 点，同时称 w_0 是 z_0 的象，而 z_0 称为 w_0 的原象（图 1.6）。当 z 沿某一条曲线 s 在 Z 平面上移动时，由 $f(z)$ 所定义的 w 也相应地沿 W 平面上的某一条曲线 t 而移动，于是我们说 $w = f(z)$ 把 Z 平面的曲线 s 变换成 W 平面上的曲线 t ， t 也称为 s 的象。一般说来，如果曲线 s 围成某一区域 F ，则曲线 t 通常也相应地围成一区域 G ，于是我们说 $w = f(z)$ 把 Z 平面上的区域 F 变换成 W 平面上的区域 G ，称 G 为 F 的象。

例如， $w = z + 1$ 将 Z 平面上的点 i 变换成 W 平面上的点 $1 + i$ ；把 Z 平面上以原点为圆心的单位圆变换成 W 平面上以 1 为圆心的单位圆（图 1.6）。

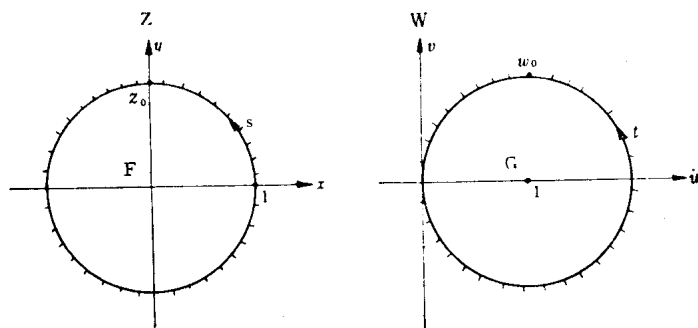


图 1.6

二、极限与连续

所谓复数平面上点 a 的 ϵ 邻域，就是指以 a 为圆心， ϵ 为半径的一个开圆，也即指满足不等式 $|z - a| < \epsilon$ 那些点的总体。

设函数 $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在点 $z_0 = x_0 + iy_0$ 的某一个邻域内（但 z_0 点本身可除外）有定义而且是单值的，如果如下两个极限都存在

$$\begin{array}{ll} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0, & \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0 \end{array}$$

我们就说：当 $z \rightarrow z_0$ 时函数 $f(z)$ 的极限存在，记作：

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = u_0 + i v_0 = A_0$$

从这个定义，容易验证如下定理都成立：

$$\lim (f \pm g) = \lim f \pm \lim g$$

$$\lim (f \cdot g) = \lim f \cdot \lim g$$

$$\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g} \quad (\lim g \neq 0)$$

如果有

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

则我们说 $f(z)$ 在点 z_0 处连续。换言之，如果对 z_0 点而言， $f(z)$ 的极限值与函数值相等，则 $f(z)$ 在 z_0 点连续。

如果 $f(z)$ 在区域 G 上每一点都连续，则我们说 $f(z)$ 在区域 G 上连续。

§ 1.3 复变函数的导数

一、导数

复变函数导数的定义与实变函数相似。令 z 是一固定的复数， Δz 是一微小的变量（复数），函数 $f(z)$ 的导数的定义如下：

$$f'(z) = \frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (1.11)$$

例如，函数 $w = z^2$ 在任一点的导数是：

$$(z^2)' = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z \quad (1.12)$$