初等微分拓扑学

〔美〕J. R. 曼克勒斯 著

上海科学技术出版社

初等微分拓扑学

〔美〕J. R. 曼克勒斯 著
李培信 譯
江嘉禾 校

上海科学技术出版社

內容提要

本书讲述微分拓扑学、特别是它的几何方面的基本內容，不涉及代数拓扑的結果与方法．全书共分两章，第一章微分流形，讲述了有关微分流形的一些經常用而不証的基本事实的証明；第二章微分流形的剖分，讲述光滑剖分的存在性和唯一性．书中在每一个基本概念或定理之后都有习题和問題，便于讀者思考．

本书可供高等学校数学系拓扑专业作为教学参考书．

ELEMENTARY DIFFERENTIAL TOPOLOGY

J. R. Munkres

Princeton Univ. Press, 1963.

初等微分拓扑学

李培信 譯　江嘉禾 校

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路450号）

上海市书刊出版业营业許可証出093号

上海市印刷四厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本850×1156 1/32　印張3　排版字数79,000

1966年3月第1版　1966年3月第1次印刷

印数 1—2,000

統一书号 13119·689　定价(科六) 0.48元

序

可以說，微分拓扑学是研究微分流形在微分同胚下保持不变的各种性质的．这个领域内的問題，是由于研究流形的拓扑結构，組合結构以及微分結构之間的相互联系而产生的．可是，它們并不涉及联絡、測地綫、曲率等一类概念；因此这門学科与微分几何应該有所区别．

这一分支，由于 H. Whitney, S. S. Cairns, J. H. C. Whitehead 等人的工作，在三十年代取得了特殊的发展．晚近，随着 J. Milnor, R. Thom, S. Smale, M. Kervaire 以及其他作者的工作而有了新的进展．当然，后期的工作是依賴于前期的，但在处理上大不相同，特别是它利用了代数拓扑的結果与方法．前期的工作在本质上是更多地属于純粹几何的，因而在某种意义下較为初等．

可以数論来打个比方，数論里把一个定理称为初等的，如果它的証明沒有用到复变函数的理論，否則这个証明就称为非初等的．按照这种了解，“初等”一詞并不反映証明的难易，初等証明常常比其他的証明更为困难．

我們所謂微分拓扑的初等部分，也就有类似的意义．这就是本书的主題．

因为我們的定理和証明（除了很少的例外）都不涉及代数拓扑，我們希望讀者具有下面的基础知識：多元函数的微分学和有关的綫性代数，点集拓扑，以及第二章用到的单純复形的几何（不是代数）．除了这些課題外，本书力图独立自主．

讀者不会发現本书写得特别精致．尽管如此，我們并不企求把任何証明都写成象一个定型的工作，甚至这个主題的最初等部分也是这样．說得更确切一些，我們的希望宁愿是提供一本扎記，

使讀者能够由此得到微分拓扑，至少在它的几何方面的一些感性知識．为了这个目的，有必要让讀者通过分散在书中各处的习題和問題来勤于思考，它們是按照这个目的細心挑选的．

“問題”一詞用来指一种练习，无論是它的結果本身，抑或是它的証明，都是特别有趣或困难的．那些对主題的邏輯連貫性来說并不重要的問題和练习，都記上一个星号．

关于微分流形有一些經常用而不証的基本事实，本书的第二个目的就是要提供一些比以前更易接受的証明．第一章的大多数定理，粗言之，都是說：任何一个結果，它对无穷可微的流形和映射成立，那么对可微性的次数稍小时也成立．这些定理的証明某些时候是所謂“口头文献”的一部分．只是近来才有人把它們写下来([8]和[9])(Whitney 关于解析流形的更强的定理，要求特别不同的証明，可以在他的經典文章[15]中找到)．

就某种意义而言，这些結果本身是消极的，因为它們断定 C^1 流形和 C^∞ 流形之間沒有出現什么眞正有意义的东西．但是它們的証明，至少片面地对于所含的技巧来說，仍然是有价值的．

第二章用来証明微分流形的光滑剖分的存在性与唯一性．这方面我們根据 J. H. C. Whitehead 的工作[14]，稍加修飾而成．这一結果本身是微分拓扑最有用的工具之一，同时它所包含的技巧，对任何研究流形的組合結构与微分結构的人都是重要的．如果讀者的主要兴趣在于剖分，就可以略去 §4, §5, §6 而不致影响連貫性．

与 Milnor 1958 年在 Princeton 的微分拓扑讲义相比較，除了必需的以外，我們有意識地尽力避免过多的重复．正因为如此，我們略去了 Whitney 嵌入定理的証明，而滿足于較弱的一个．我們希望在本书与 Milnor 的讲义之間，讀者会找到一些有用的相互补充．

譯者附言

微分拓扑学是研究微分流形与微分映射的学科．它的最初思想归于 H. Poincaré，当时他所謂的拓扑学就是現在的微分拓扑学．在三十年代由于 H. Whitney，S. S. Cairns 等人的工作，微分拓扑学得到了进一步的发展．而近十多年来的发展特别迅速．一方面是新理論的創立，如 Thom 的协边理論(cobordism theory)，Milnor 的微观丛理論(microbundle theory)等．另一方面是几乎每年都有一些原来看成高不可攀的著名古典問題得到了解决，例如球面可以具有許多种不同的微分結构，而且在許多場合我們能够計算它們的种数(Milnor-Smale)；有这样的拓扑流形存在，它們根本沒有微分結构(Kervaire)；Haupt-Vermutung (主要推測)已被否定 (Mazur-Milnor)；H. Poincaré 推測除了三維和四維的情形外已被証明(Smale-Stallings)等等．

由于这个学科和分析的紧密联系，看来它将成为拓扑学中的一个主流．

目前关于微分流形方面的书籍还比較少，在仅有的几本书中，J. R. Munkres 的书是有它自己的特色和优点的．本书对基本概念不仅分析得細致清楚，而且写得精炼．既介紹了一些基本結果，又介紹了微分拓扑学中常用的一些技巧，如光滑化引理，管状邻域等，同时內容安排却很紧凑．另外，在每讲一基本概念或基本定理之后都附有习題，它是本书的有机部分，使讀者能够更深一步来理解所讲的內容．譯者 1963 年在中国科学技术大学給数学系四年級几何拓扑专門化組同学讲微分流形一課，曾将本书的一部分譯出作为教材，在教与学的过程中感到本书是一本有价值的书，因此冒昧地介紹給国內讀者参考．

李培信

1964 年 10 月于北京

目　　录

第一章 微分流形

§1 引 言

在这一节里我們要定义象微分流形，微分映射，浸入，嵌入和微分同胚这样一些基本概念，并且要証明隐函数定理.

欧氏空間 R^m 看作是由所有无穷的实数序列 $x=(x^1,\ x^2,\ \cdots)$ 組成的空間，这里在 $i>m$ 时，$x^i=0$；欧氏半空間 H^m 是 R^m 的子集，滿足条件 $x^m\geqslant 0$. 于是 $R^{m-1}\subset H^m\subset R^m$. 我們以 $\|x\|$ 記 $\sqrt{(x^1)^2+\cdots+(x^m)^2}$，以 $|x|$ 記 $\max|x^i|$. 单位球面 S^{m-1} 是 R^m 的子集，滿足条件 $\|x\|=1$；单位球 B^m 则是由合于 $\|x\|\leqslant 1$ 的点組成的子集；r-方体 $C^m(r)$ 是滿足条件 $|x|\leqslant r$ 的点所成的集合. 如果不致发生混淆，我們也常常把 R^m 就看作是所有 m 維向量 $(x^1,\ \cdots,\ x^m)$ 組成的空間.

1.1 定义 （拓扑）流形 M 是一个 Hausdorff 空間，具有可数基，并且滿足下面条件：存在一个整数 m，使得 M 的每一点都有一个邻域同胚于 H^m 或 R^m 的开子集.

如果 $h:\ U\to H^m$（或 R^m）是一个同胚映射，把 x 的邻域 U 映成 H^m 或 R^m 的一个开子集，則常常称 $(U,\ h)$ 为 M 上的坐标邻域. 如果 $h(U)$ 是 H^m 的开集，并且 $h(x)$ 属于 R^{m-1}，則 x 称为 M 的边界点，所有边界点的集合称为 M 的边界，記为 $\mathrm{Bd}\,M$. 如果 $\mathrm{Bd}\,M$ 是空的，则称 M 是无边的.（在文献中，流形一詞通常仅用于 $\mathrm{Bd}\,M$ 是空集的情形；更广泛的名称是有边流形.）集合 $M-\mathrm{Bd}\,M$ 称为 M 的内部，記为 $\mathrm{Int}\,M$.（如果 A 是拓扑空間 X 的子集合，在不致引起混淆时，我們也用 $\mathrm{Int}\,A$ 表示 $X-\mathrm{Cl}(X-A)$.）

为了驗証这些定义是合理的，应当注意，如果 $h_1:\ U_1\to H^m$ 和 $h_2:U_2\to H^m$ 是两个同胚映射，分别把 x 的邻域 U_1 和 U_2 映成 H^m

的开集，并且如果 $h_1(x)$ 属于 R^{m-1}，那末 $h_2(x)$ 也属于 R^{m-1}：假若不然，则从映射 $h_1h_2^{-1}$ 就会得到一个同胚映射，把 R^m 中的一个开集映成点 $p=h_1(x)$ 在 H^m 中的一个邻域．后者当然不是 R^m 的开集，这与 Brouwer 的区域不变性定理[3, 95 頁]相矛盾．

还可以証明，数 m 是由 M 唯一确定的；这个数就称为 M 的維数，M 称为 n 維流形．要得到这个結論可以利用 Brouwer 的区域不变性定理，或者应用維数論的一个定理，它說：M 的拓扑維数是 m [3, 46 頁]．严格說，应用后面这个定理，我們需要知道 M 是可分的可度量化空間；但从点集拓扑的一个典型的度量化定理可以推出这点[2, 75 頁]．

从一个典型的定理还可以推出：M 是仿紧空間[2, 79 頁]．仿紧的意思是指，对 M 的任意开覆盖 $\mathfrak{A}$，存在 M 的另外一个开覆盖 $\mathfrak{B}$，使得：

(1) $\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的精致，即 $\mathfrak{B}$ 的每一个元素都包含在 $\mathfrak{A}$ 的一个元素中．

(2) 覆盖 $\mathfrak{B}$ 是局部有限的，即 M 的每一点都有一个邻域，仅与 $\mathfrak{B}$ 的有限多个元素相交．

还有一点应該注意，因为 M 具有可数基，所以 M 的任何一个局部有限开覆盖必为可数的．

习題 1 如果 M 是一个 m 維流形，試証 $\mathrm{Bd}\,M$ 是 $m-1$ 維无边流形，或者是空集．

习題 2 命 M 是一个 m 維流形，具有非空边界．命 $M_0=M\times 0$ 和 $M_1=M\times 1$ 是 M 的两个模型．对于每个 $x\in \mathrm{Bd}\,M$，在 $M_0\cup M_1$ 中把 $(x, 0)$ 和 $(x, 1)$ 粘合起来，我們得到一个拓扑空間，称为 M 的倍流形，記为 $D(M)$．試証：$D(M)$ 是 m 維无边流形．

习題 3 如果 M 和 N 分别是 m 維和 n 維流形，那末 $M\times N$ 是 $m+n$ 維流形，并且 $\mathrm{Bd}(M\times N)=((\mathrm{Bd}\,M)\times N)\cup(M\times(\mathrm{Bd}\,N))$．

1.2 定义 命 U 是 R^m 的开子集，$f\colon U\to R^n$ 是一映射．如果分量函数 $f^1, \cdots, f^n$ 的直到 r 阶的偏导数都在 U 上連續，那末就称 f 属于类 C^r 可微的，或者說，f 属于类 C^r．如果对一切有限的

r, f 都属于类 C^r, 则称 f 属于类 C^∞.

命 A 是 R^m 的任意子集, $f: A\to R^n$ 是一个映射. 如果 f 可以延拓为 A 在 R^m 中的一个邻域 U 上的函数, 使得延拓后的函数在 U 上属于类 C^r $(1\leqslant r\leqslant\infty)$, 则称 $f: A\to R^n$ 是属于类 C^r 可微的. 实际上, 我們仅在下面两种情况才应用这个定义: (1) A 是 H^m 的开子集; (2) A 是 R^m 中一个閉的平直单形.

如果 $f: A\to R^n$ 是可微的, x 属于 A, 我們用 $Df(x)$ 来表示 f 在 x 处的 Jacobi 矩陣, 它的一般項是 $a_{ij}=\dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}$. 我們也用記号 $\dfrac{\partial(f^1,\cdots,f^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}$ 表示这个矩陣. 为定义这些偏导数, 首先必須把 f 延拓到 A 的邻域上; 在那两个我們感兴趣的情形中, 偏导数与延拓的选取无关(見习題 2).

这里我們回忆一下导数的鏈法则, 这个法则是說 $D(fg)=Df\cdot Dg$, 其中 fg 是复合函数, 黑点表示矩陣乘法.

习題 1 驗証可微性的定义是完全确定的; 即 $f: A\to R^n$ 的可微性并不依賴于 A 的"包含空間" R^m 的选取.

习題 2 命 A 是 H^m 的开集, 或者是 R^m 中一个閉的平直 m 維单形. 如果 $f: A\to R^n$ 属于类 C^1, 而 x 属于 A, 試証: $Df(x)$ 不依賴于 f 到 A 在 R^m 中的邻域上所取的延拓.

***习題 3** 試求 R^2 的一个开子集 U 和一个类 C^1 的映射 $f: A\to R$ (这里 $A=\overline{U}$), 使得习題 2 所述定理的結論不成立.

【注】 命 f 把 R^m 的子集 A 映入 R^n. 如果 A 是 R^m 的开集, 则显然可見, f 可微的一个充分条件是: f 是局部可微的, 即 A 的每一点都有一个邻域 V, 使得 $f|V\cap A$ 是可微的. 但是, 如果 A 不是 R^m 的开集, 这个結論就不象这样明显, 而是需要下面三个引理才能証明的.

1.3 引理 *存在属于类 C^∞ 的函数 $\varphi: R^m\to R^1$, 它在 $C(1/2)$ 上等于 1, 在 $C(1)$ 内部是正的, 而在 $C(1)$ 的外面等于零.*

【証明】 命 $f(t)=e^{-\frac{1}{t}}$, $t>0$; $f(t)=0$, $t\leqslant 0$. 那末 f 属于类 C^∞, 当 $t>0$ 时它是正的.

命 $g(t)=\dfrac{f(t)}{f(t)+f(1-t)}$. 那末 g 是一个属于类 C^∞ 的函数，使得当 $t\leqslant 0$ 时 $g(t)=0$，当 $0<t<1$ 时 $g'(t)>0$，当 $t\geqslant 1$ 时 $g(t)=1$.

命 $h(t)=g(2t+2)\cdot g(-2t+2)$，那末 h 是一个属于类 C^∞ 的函数，使得当 $|t|\geqslant 1$ 时 $h(t)=0$，当 $|t|\leqslant 1$ 时 $h(t)>0$，当 $|t|\leqslant 1/2$ 时 $h(t)=1$.

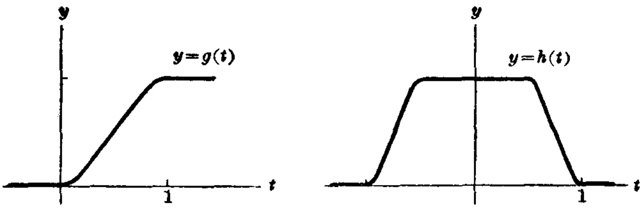

图 1

命 $\varphi(x^1,\cdots,x^m)=h(x^1)\cdot h(x^2)\cdots h(x^m)$，就满足引理的要求.

习题 推广上述引理如下：命 U 是 R^m 的开子集；命 C 是 U 的一个紧致子集. 那末存在一个类 C^r 的实値函数 ψ，定义在 R^m 上，使得 ψ 在 C 上是正的，而在 U 的补集的一个邻域内是零.

【注】 X 的一些子集作成的有标組 $\{C_i\}$ 称为局部有限的，是指 X 的每一点都有一个邻域只与有限多个 C_i 相交. 这个約定是方便的，否则序列 $C_1, C_2, \cdots$ 中某个集合可能出现无穷多次.

1.4 引理 命 $\{U_i\}$ 是拓扑流形 M 的一个局部有限的开覆盖. 那末存在 M 的一个閉覆盖 $\{C_i\}$，使得对每一个 i 有 $C_i\subset U_i$.

【証明】 我們用归納法来构造这个覆盖. 命 V_1 是一个包含 $M-(U_2\cup U_3\cup\cdots)$ 的开集，它的閉包含于 U_1 里.（利用 M 的正規性就知道这样的 V_1 是存在的.）命 $C_1=\overline{V}_1$.

假設我們已經构造了 $V_1,\cdots,V_{j-1}$，使得 $\overline{V}_k\subset U_k$, $k=1,\cdots,j-1$；并且 $V_1\cup\cdots\cup V_{j-1}\cup U_j\cup\cdots=M$. 命 V_j 是一个开集含有

$$M-(V_1\cup\cdots\cup V_{j-1}\cup U_{j+1}\cup\cdots),$$

而它的閉包含于 U_j 里. 命 $C_j=\overline{V}_j$.

为了証明集組 $\{V_j\}$ 覆盖 M，我們注意，任何一点 x 都只属于有限多个集合 U_j. 因此，对于某一个 j，x 不属于 $U_j\cup U_{j+1}\cup\cdots$. 由归納假設，可見 x 必須属于 $V_1\cup\cdots\cup V_{j-1}$.

1.5 引理 命 A 是 R^m 的子集；命 $f: A\to R^n$. 如果 f 局部地属于类 C^r，則 f 属于类 C^r.

【証明】 由假設，对 A 的每一点 x，存在 x 的一个邻域 U_x，使得 $f|A\cap U_x$ 可以延拓为一个函数，它在 U_x 上属于类 C^r. 我們选取 U_x 使得 $\overline{U}_x$ 是紧致的. 命 M 是集合 U_x 的并集；它是 R^m 的开子集. 命 $\{V_j\}$ 是 M 的覆盖 $\{U_x\}$ 的局部有限的开精致. 命 $\{C_i\}$ 是 M 的閉覆盖，使得对每一个 i 有 $C_i\subset V_i$. 命 ψ_i 是定义在 R^m 上的类 C^∞ 的函数，它在 C_i 上是正的，而在 V_i 的补集的一个邻域内等于零. 那末 $\sum\psi_j(x)$ 是 M 上的类 C^∞ 函数，这是由于它在 M 的任一已知点的某个邻域内等于一个有限和. 定义 $\varphi_i(x)=\dfrac{\psi_i(x)}{\sum\psi_j(x)}$，那末 $\sum\varphi_i(x)=1$.

对每一个 i，命 f_i 表示 $f|A\cap V_i$ 在 V_i 上的一个属于类 C^r 的延拓；如果 $A\cap V_i$ 是空的，則命 f_i 是零函数. 那末 $\varphi_i f_i$ 可以延拓为 M 上的类 C^r 函数，这只須让它在 V_i 外为零.

定义

$$\tilde{f}(x)=\textstyle\sum_i\varphi_i(x)f_i(x).$$

在 M 的任意一点 x 的某个邻域内，这是有限和，因此在 M 上属于类 C^r. 此外，如果 x 属于 A，則对每一个 i，有 $f_i(x)=f(x)$，所以

$$\tilde{f}(x)=\sum\varphi_i(x)f(x)=f(x).$$

因此 $\tilde{f}$ 是 f 在 A 的关于 R^m 的邻域 M 上的 C^r 延拓，这就是所要求的.

1.6 定义 一个类 C^r 的 m 維微分流形是指一个 m 維流形 M 和 M 上的一个类 C^r 的微分結构 $\mathfrak{D}$. M 上一个类 C^r 的微分結构 $\mathfrak{D}$，是指 M 上的一組坐标邻域 (U, h)，滿足下面三个条件：

(1) $\mathfrak{D}$ 中的坐标邻域覆盖 M.

(2) 如果 (U_1, h_1) 和 (U_2, h_2) 属于 $\mathfrak{D}$，那末

$$h_1h_2^{-1}: h_2(U_1\cap U_2)\to R^m \text{ 或 } H^m$$

是属于类 C^r 可微的.

(3) 集 $\mathfrak{D}$ 关于性质(2)是最大的;即如果把任何一个不属于 $\mathfrak{D}$ 的坐标邻域加入集 $\mathfrak{D}$, 那末性质(2)不成立.

$\mathfrak{D}$ 的元素常常称为微分流形 M 上的坐标系.

习题 1 命 $\mathfrak{D}'$ 是 M 上的一系列坐标邻域的集合, 满足条件(1)和(2). 証明: 存在唯一含有 $\mathfrak{D}'$ 的类 C^r 的微分結构 $\mathfrak{D}$. (仿照一个拓扑的基和这个拓扑之間的关系,我們也称 $\mathfrak{D}'$ 为 $\mathfrak{D}$ 的基.)

[提示: 命 $\mathfrak{D}$ 是由 M 上的所有这种坐标邻域 (U, h) 組成, 它們和 $\mathfrak{D}'$ 的每个元素都是类 C^r 可微复迭的;这意思是指,对 $\mathfrak{D}'$ 的每一个元素 (U_1,h_1),

$$h_1h^{-1}: h(U\cap U_1)\to H^m \text{ 或 } R^m,$$
$$hh_1^{-1}: h_1(U\cap U_1)\to H^m \text{ 或 } R^m$$

都是类 C^r 可微的. 为了証明 $\mathfrak{D}$ 是微分結构,讀者应該利用引理 1.5.]

习题 2 命 M 是类 C^r 的微分流形(在不致发生混淆时,我們常常不再提到微分結构 $\mathfrak{D}$). 那末 M 自然地也可以看作是一个类 C^{r-1} 的微分流形; 这只須取 $\mathfrak{D}$ 作为 M 上类 C^{r-1} 的微分結构 $\mathfrak{D}_1$ 的基. 試証: $\mathfrak{D}\subset\mathfrak{D}_1$ 是眞正的包含关系. 这証明一个微分流形所属的类 C^r 是唯一确定的.

由此可見,一个微分流形 M 所属的类可以任意降低,只要把新的坐标系加入微分結构卽可. 反之亦然,但这却需要更多的工作来証明.

***习题 3** 如果 M 是一个微分流形,要在 $D(M)$ 上配备一个微分結构, 涉及的困难是什么? ($D(M)$ 的定义見 1.1 的习题 2.)

1.7 定义 命 M 和 N 是两个微分流形,分别具有維数 m 和 n, 并且都是至少属于类 C^r. 命 A 是 M 的子集, $f: A\to N$, f 称为属于类 C^r,如果 (U, h) 和 (V, k) 分别是 M 和 N 的任意坐标系,复合映射

$$kfh^{-1}: h(A\cap U)\to R^n$$

属于类 C^r. (注意, 虽然在微分結构保持不变时, 类 C^2 的流形不是类 C^1 的流形,尽管如此,但类 C^2 的映射却也属于类 C^1.)

f 在 M 的点 p 处的秩, 是指 $D(kfh^{-1})$ 的秩, 这里 (U, h) 和 (V, k) 分别是关于 p 和 $f(p)$ 的坐标系. 这个数是确定的,因为如果 (U_1, h_1) 和 (V_1, k_1) 是另外两个这样的坐标系,我們就有

$$D(k_1fh_1^{-1})=D(k_1k^{-1})\cdot D(kfh^{-1})\cdot D(hh_1^{-1}).$$

关于微分結构的要求，保証了 k_1k^{-1} 和 kk_1^{-1} 两者都是可微的，所以 $D(k_1k^{-1})$是非异的，以 $D(kk_1^{-1})$ 作为它的逆．类似地，$D(hh_1^{-1})$ 是非异的，所以 $D(k_1fh_1^{-1})$ 和 $D(kfh^{-1})$ 有相同的秩．

习題 R^m 上的标准的类 C^∞ 的微分結构，是以单独一个坐标系 $i: R^m\to R^m$ 作为基而得到的微分結构．对 H^m 也是类似的．如果在前面的定义中，空間 M 或 N 之一是 R^m 或 H^m，驗証在 1.2 和 1.7 中所給的可微性定义是一致的．

1.8 定义 命 $f: M\to N$ 是属于类 C^r 可微的，命 M 和 N 分别具有維数 m 和 n．如果在 M 的每一点 p 处，$\operatorname{rank} f=m$，則 f 称为一个浸入．如果 f 是同胚(入映射)并且是浸入，則称它为一个嵌入．如果 f 是把 M 映成 N 的同胚，并且是浸入，則称它为一个微分同胚；自然，这时 $m=n$．

习題 1 注意 $\operatorname{Bd} H^m=R^{m-1}$，而包含映射 $R^{m-1}\to H^m$ 是嵌入．推广这个事实如下：如果 M 是类 C^r 的微分流形，那末 $\operatorname{Bd} M$ 上存在唯一的类 C^r 的微分結构，使得包含映射 $\operatorname{Bd} M\to M$ 是类 C^r 的嵌入．

习題 2 命 M 和 N 都属于类 C^r，M 是无边的．构造 $M\times N$ 上一个类 C^r 的微分結构，使得分别把 M 和 N 映入 $M\times N$ 的自然包含映射都是嵌入．我們为什么要求 M 是无边的?

习題 3 証明两个浸入的复合还是一个浸入．

***习題 4** 构造一个把 S^1 映入 R^2 的类 C^∞ 的浸入，它把 S^1 变成 8 字形的图形．这个浸入可以延拓为把 B^2 映入 R^2 的浸入么?

***习題 5** 証明：拓扑流形 M 上的两个类 C^r 的微分結构相同的充分必要条件是：把一个微分流形映成另一个的恒同映射是一个类 C^r 的微分同胚．

***习題 6** 构造流形 R^1 上两个不同的类 C^∞ 的微分結构．証明所得的微分流形是微分同胚的．

(在同一个 m 維拓扑流形上，两个不同的微分結构是否給出微分同胚的微分流形? 这久已成为一个古典的問題了，近来已經取得一些进展：如果 $m\leqslant 3$，回答是肯定的[10, 13]．如果 $m=7$，答案是否定的[5]．还知道一些其他的結果，但遺留很多工作需要做．)

1.9 問題 如果 $f: M\to N$ 是类 C^r 的微分同胚，証明 f^{-1} 也是

类 C^r 的微分同胚.

提示：按下面的步驟来証明这个結果. 命 g 把 R^m 的开子集 U 映入 R^n.

(1) $Dg(x)$是存在的，如果存在矩陣函数 $A(x)$ 和 $R(x_1, x)$，使得

$$g(x_1)-g(x)=A(x)\cdot(x_1-x)+R(x_1, x)$$

(这里 g, x_1, x 和 R 是列矩陣)，并且当 $x_1\to x$ 时，$\dfrac{R(x_1, x)}{\|x_1-x\|}\to 0$. 由此推出 $A(x)=Dg(x)$.

(2) 如果 g 在 U 上属于类 C^1，并且 A 是 U 的紧致子集，那末

$$g(x_1)-g(x)=Df(x)\cdot(x_1-x)+R(x_1, x),$$

这里对于 A 中的 x_1 和 x，当 $\|x_1-x\|\to 0$ 时，$\dfrac{R(x_1, x)}{\|x_1-x\|}$ 一致趋于零.

(3) 如果 g 在 U 上属于类 C^1，并且在紧致集 A 的每一点处都有秩 m，那末 g 满足 Lipschitz 条件：存在常数 m 和 M，使得

$$0<m<\|g(x_1)-g(x)\|/\|x_1-x\|<M,$$

其中 x_1 和 x 属于 A.

(4) 命 f 是 R^m 的开子集 U 到 R^m 里的一个开集上的同胚；命 f 在 U 上属于类 C^1，并且在 x 上有秩 m. 那末 $D(f^{-1})$在 $f(x)$ 上存在并且等于 $Df(x)$的逆.

1.10 問題* 在 R^2 的第一象限 $H^1\times H^1$ 上，构造一个类 C^∞ 的微分結构，使得包含映射 i: $H^1\times H^1\to R^2$ 是可微的. i 是否可以是一嵌入？推广你的方法来証明如果 M 和 N 属于类 C^r，那末在 $M\times N$ 上有一类 C^r 的微分結构，使得 M 和 N 的自然包含映射都是嵌入.

【注】 以前我們借助于 Brouwer 的区域不变性定理来証明流形的边界和維数是完全确定的. 如果我們限于考虑那些可以允許微分結构存在的流形(最近 Kervaire 証明这是一个实在的限制)，那末在某种程度上，可以不用 Brouwer 定理的帮助，只須利

用下面的定理，它类似于区域不变性定理.

1.11 定理 命 f 是一个类 C^1 的映射，把 R^m 的开子集 U 映入 R^m，且在点 x 处有秩 m. 那末 f 是一个同胚映射，把 x 的某个邻域映成 $f(x)$ 在 R^m 中的一个邻域.

【証明】 我們可以假設，x 和 $f(x)$ 都是原点，并且 $Df(0)=I$，I 是单位矩陣.（为什么？）选取 r 充分小，使得方体 $C(r)$ 含于 U，并且当 x 属于 $C(r)$ 时，$Df(x)-I$ 的最大的元素絕对值 $\leqslant \frac{1}{2m}$. 如果我們命 $g(x)=f(x)-x$，那末在 x_1, x_2 属于 $C(r)$ 时，

$$|g(x_1)-g(x_2)|\leqslant\frac{1}{2}|x_1-x_2|$$

和

$$|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\frac{1}{2}|x_1-x_2|.$$

首先，我們証明，$C\left(\frac{r}{2}\right)$ 的每一点 y 是 $C(r)$ 的一点 x 在 f 下的象. 为此，命 $x_0=0$, $x_1=y$，并且，一般說来，若 x_n 属于 g 的定义域，則命

$$x_{n+1}=y-g(x_n).$$

注意 $|x_{n+1}-x_n|=|g(x_n)-g(x_{n-1})|\leqslant\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|$，所以

$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n|x_1-x_0|\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{r}{2}\right).$$

把这些不等式加起来，我們看到，在 $m\leqslant n$ 时，

$$|x_{n+1}-x_m|<\left(\frac{1}{2}\right)^m r.$$

从上面这个不等式（取 $m=0$）推出，x_{n+1} 必須属于 $C(r)$，因而在 g 的定义域里，所以事实上，x_n 对所有的 n 都有定义. 从这个不等式还推出序列 x_n 是 Cauchy 序列，因此它收斂到某一点 x. 故 $x=y-g(x)$，所以 $f(x)=y$.

其次，我們注意 $C(r)$ 只有一个点 x 使得 $f(x)=y$. 假若不然，就与 $x_1, x_2\in C(r)$ 时，$|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\frac{1}{2}|x_1-x_2|$ 这个事实

发生矛盾.

最后,我們注意,逆映射$f^{-1}:C\left(\frac{r}{2}\right)\to C(r)$是連續的,因为$|y_1-y_2|\geqslant\frac{1}{2}|f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_2)|$,其中$y_1$, $y_2\in C\left(\frac{r}{2}\right)$.

因此f是一个同胚映射,把开集$f^{-1}\left(C\left(\frac{r}{2}\right)\right)\cap \mathrm{Int}\,C(r)$映成开集$\mathrm{Int}\,C\left(\frac{r}{2}\right)$,即所求証.

1.12 推論(反函数定理) 命f把R^m的开集U映入R^m;命f属于类C^r而且在点x处具有秩m. 那末f是一个类C^r的微分同胚,把点x的一个邻域映成$f(x)$在R^m中的一个邻域.

【証明】 因为我們知道f在上述的某个邻域上是一个同胚,我們仅需把这个邻域取得这样小,使得f在这个邻域上处处具有秩m. 这是可能的,因为适合$\det Df(x)\neq 0$的点x組成一个开集.

1.13 推論(隐函数定理) 命$(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^p)$表$R^n\times R^p$的一般点. 命$f$是一个类$C^r$的映射,把原点0在$R^n\times R^p$中的邻域$U$映入$R^p$, $f(0)=0$, 以及$\dfrac{\partial(f^1,\cdots,f^p)}{\partial(y^1,\cdots,y^p)}$在点0处是非异的. 于是,存在唯一的类$C^r$的函数$g$, 把0在$R^n$中的一个邻域映入$R^p$,使得$g(0)=0$, 并且对于这个邻域里的点$x$, $f(x, g(x))=0$.

【証明】 定义$F:U\to R^{n+p}$为

$$F(x, y)=(x^1,\cdots,x^n,f^1(x,y),\cdots,f^p(x,y)).$$

因为$DF(x)$的形式为

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix},$$

它在原点是非异的. 因此在0附近F有局部逆映射G. 如果我們要$f(x, g(x))=0$,那末必須

$$F(x, g(x))=(x, f(x, g(x)))=(x, 0),$$

所以

$$GF(x, g(x))=(x, g(x))=G(x, 0).$$