工科数学基地建设丛书

积分变换

——工程数学——

刁元胜 编著

华南理工大学出版社

工科数学基地建设丛书

（华南理工大学）

积分变换

——工程数学——

华南理工大学出版社

·广州·

内 容 简 介

本书介绍两类积分变换，即傅里叶变换和拉普拉斯变换的基本知识，阐述了变换的定义、性质及应用，其中对 δ 函数的叙述条理清晰，易于掌握和理解。书末附有习题答案或解答，便于读者对照学习。

本书可作为工科有关专业（本科）《积分变换》课程的教材，亦可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

积分变换/刁元胜编著．—广州：华南理工大学出版社，2003.2
ISBN 7-5623-1896-4

Ⅰ.积… Ⅱ.刁… Ⅲ.积分变换-高等学校-教材 Ⅳ.O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 003625 号

总 发 行：华南理工大学出版社
（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
发行部电话：020-87113487 87111048（传真）
E-mail：scut202@scut.edu.cn
http://www2.scut.edu.cn/press
责任编辑：傅穗文
印 刷 者：中山市新华印刷厂有限公司
开 本：850×1168 1/32 **印张**：4.75 **字数**：123 千
版 次：2003 年 2 月第 1 版第 1 次印刷
印 数：1～3 000 册
定 价：9.00 元

总　　序

在世纪交替之际,经济竞争日益激烈,人才与技术是保证在竞争中立于不败之地的关键。发达国家科学界已得出共识:"数学科学对于经济竞争是必不可少的。数学是一种关键性的、普遍的、可实行的技术。"(引自:"数学科学·技术与经济竞争力",《美国数学科学委员会报告》)在新形势下,大学数学教育工作者当奋力而为。国家教委(现为教育部——编者注)为了推动面向21世纪的大学教育改革,在一些有条件的大学建立了基础学科教学基地,其目的在于:为面向21世纪的教学改革,在有关高校先走一步,摸索经验,以资借鉴。华南理工大学应用数学系有幸被国家教委定为工科数学教学基地,我们深感这一任务光荣而艰巨。基地建设的任务与目标,国家教委都有明确的指示,具体实施方案则要求我们探索。改革要做的事情是多方面的,但是其中最基础性的工作之一,就是实施改革方案的教材建设。它是改革思想的具体体现。

面对当今的生产力发展水平,工科数学教材改革的原则是什么呢?我们认为必须考虑到下述几方面的需要。

一、对原有教学内容要作适当增删

原有的高等数学、工科数学及根据专业需要而开设的某些应用数学的选修课程,大都有国家教委颁布的"基本要求"作指导。这些基本要求是在当时历史条件下制定的,它基本反映了基础学科的继承性与当时教学体系的需要。但时至今日,随着计算机技术的日益普及,以及对学生应用数学知识,解决实际问题能力的要

求日益提高,原有教材的内容显然需要加以调整。如:对原有教材中较多依靠特殊技巧处理计算题的训练,由于有了性能很高的数学软件的支持,上述训练内容可适当减少,这种减少并不影响学生对数学基本概念的理解,还可腾出时间来让学生去学习更有用的数学知识。又如:在概率论与数理统计课程中,过去的重点放在概率论,而在实际中非常有用的数理统计内容所占比重较少,从培养学生解决实际问题能力出发,合理的安排应该与原安排相反,将重点放在数理统计的教学上。类似需要调整原有教学内容之处,还可以举出一些,这里不详加罗列。另外,对原有教学内容薄弱之处,我们认为应当适当加强。

二、在工科数学教学中,对重要概念的讲授应系统地训练数学建模的思维程序,还应增加独立的数学模型课程

从广义来说,所有的数学理论都是某种特定的数学模型。但由于数学科学强烈地依靠逻辑推理,自19世纪到20世纪这段时间,自德国数学家希尔伯特(Hilbert)的几何基础与法国数学家柯西(Cauchy)的形式化的数学分析理论问世之后,在数学界形成了一股主要靠逻辑推理与高度抽象化方法来发展数学的强大浪潮。这一过程使得数学科学取得了辉煌的、前所未有的成绩。它将工业革命初期人们为了解决实际问题所提出的一些朴素的数学思想加以完善,形成完整的数学理论,并因此也出现了不少新的数学理论,如非欧几何就是依靠逻辑推理方法而发现的。依靠逻辑推理发展数学,在今天仍然具有强大生命力,而且也是数学区别于其他科学的基本特征。但是,任何一门科学的特征都不可强调得过分,如果将逻辑推理手段放在数学方法唯一优先的地位,则不可避免地要带来消极影响,首先,它会带来数学思维的枯竭。近期以来,基础数学研究多以某些历史难题为线索,显得比较沉闷,新的理论出现较少;相反,应用数学的新思想、新方法则蓬勃发展。其次,若

仅用逻辑推理作为数学的主要手段进行数学教育，学生学了抽象的数学理论，往往不知如何去使用它来解决实际问题。这一缺陷已是世界各国普遍感到头痛的问题。最后，科学思维的源泉毕竟还是来自实践，逻辑推理方法并不见得总是成功的。非阿基米德几何的兴衰就是一例，由于它仅仅依靠逻辑推理，没有明确的应用背景，在数学的发展中遭到了淘汰。有些有名的数学问题，现在仍然吸引了一批知名数学家参加研究，虽然也是必要的，但在可见的将来，却难以期望它对社会经济的发展有直接的推动。数学模型课程，强调直接从实际问题中提出数学问题，然后选择恰当的数学方法加以解决，教学生善于从实际问题中提出数学问题。对于广大学习数学课程的学生来说，这也是提高其数学素质的重要途径，是培养学生用数学工具解决实际问题的桥梁。而且，在建立数学模型解决实际问题的过程中，同样可以加强对学生逻辑推理能力的训练。所以，在工科数学教育的全过程中，贯彻数学建模思想，应是当今工科数学教材建设中的一个重要方面。

三、增加数学实验，让现代计算机的高科技成果能及时溶于古老的数学科学中，大大提高数学解决实际问题的能力

现代计算机科学取得了举世瞩目的成就。大量的功能强大的数学软件的出现、计算机辅助教学(CAI)技术的发展，使得过去很多繁琐的数学计算变得轻而易举，很多抽象难懂的数学概念可以直观显示，很多一时还找不到恰当数学模型描述的复杂系统可通过计算机模拟，求得其满足应用需要的数值解。在计算机技术日益普及的新时代，若数学科学不抓住这一机遇，用最先进的技术手段武装自己，将会大大降低数学科学的作用与地位。在工科数学课中引入计算机技术，应当是编写新教材的指导思想之一。完成这一任务的恰当手段，就是在相关课程中增加数学实验，或在需要的专业单独开设数学实验课。

根据上述三方面的设想，在工科数学基地的教材建设中，必须编写新的教材，如《经济数学模型》、《数学实验》、《市场调查与市场预测的数学方法》；同时，也要将传统的高等数学、工科数学等课程根据上述原则加以改造。这就要求我们编写与时代要求相适应的工科系列教材。我们希望通过这套教材的陆续出版，能对面向21世纪的数学教育改革做一些探索性的工作。同时，我们也热切希望国内的同行、专家参加并指导我们的编写工作。这套教材包括了我系参加此项工作的教师教学与教材研究成果，借此对各位辛勤工作的老师表示感谢。

华南理工大学应用数学系　汪国强

1997年12月20日

前 言

在数学中常用变换的方法来简化问题或运算,如在线性代数中的坐标变换;在积分中的变量代换使积分运算化简;在微分方程中作自变量或未知函数的变换,往往可以简化方程,便于求出方程的解;在复变函数论中的保角变换,可使区域变换为较简单的区域,使某些问题容易解决。由此可见,变换的思想是数学中简化问题的常用方法。积分变换的理论和方法也是简化问题的一种重要而有效的数学方法,它不仅应用于许多数学分支,而且在物理与工程技术上都有广泛的应用,特别在自动控制和电信技术上,积分变换是分析问题的重要而有效的手段。

积分变换就是通过积分的方法,把一个函数变换为另一个函数。设已知函数为 $f(t)$,通过积分,可得到一个新的函数 $F(s)$,即

$$F(s)=\int_a^b K(s,t)f(t)\mathrm{d}t,$$

式中,$K(s,t)$是已知的二元函数,可以对不同的变换选取不同的形式。$K(s,t)$称为积分变换的核,不同的核就有不同的积分变换。当然,这种从函数 $f(t)$变换到函数 $F(s)$的变换,必须是一一对应的。否则,作逆变换后,若得到两个原来的函数 $f(t)$,就不符合工程问题解惟一的情况,以致积分变换无实用价值。本书只介绍最常用的傅里叶(Fourier)变换与拉普拉斯(Laplace)变换,着重讨论它们的定义、性质与应用。

在讨论积分变换时必然会遇到单位脉冲函数(δ 函数),δ 函数不是普通常义下的函数,而是广义函数。它的定义及有关性质、

运算和定理等，在高等数学范围内是无法给出严格的数学论述的，不管如何讲述都会有不严谨的地方。它的严格数学论述只能放在广义函数论中进行。本书从连续质量分布的密度过渡到集中质量分布的密度来切入 δ 函数，会比较容易理解它的定义与性质。

由于有些不是绝对可积函数不能作常义下的傅里叶变换，常义函数的傅里叶变换可以是广义函数等，因此也只有把傅里叶变换推广到广义函数论中才能得到非常漂亮的结论：傅里叶变换是从缓增广义函数空间到自身的同构。

本书是作为工科有关专业(本科)的《积分变换(工程数学)》教材而编写的，在学习《高等数学》与《复变函数》的基础上，可以阅读本书。讲授不带"＊"号的内容约需16学时，带"＊"号的内容供有关专业选用。本书附有习题答案或解答，便于读者对照学习。

本书的出版得到了华南理工大学教务处及应用数学系领导的关心和支持；洪毅教授和杨纶标教授审阅了书稿，并提出了许多宝贵意见；也得到教研组诸位同事的关心。在此致以衷心感谢！

书中不妥之处，恳请读者批评指正。

编著者

2002年10月

目　录

1 傅里叶变换

本章从傅里叶(Fourier)级数引出傅里叶积分定理和傅里叶变换,然后叙述傅里叶变换的性质。本章还介绍了重要的 δ 函数及其性质,以及与它有关的傅里叶变换。这些内容是傅里叶变换的理论基础,在工程技术中有着广泛的应用。另外,利用傅里叶积分定理得到某些含参变量积分公式的方法,在数学上也是一种有意义的简便方法。

1.1 傅里叶积分与傅里叶变换

1.1.1 傅里叶积分与傅里叶变换

设 $f(t)$是在$(-\infty,+\infty)$内定义的实值函数,它在任意有限区间$[-l,l]$内满足**狄里克雷**(Dirichlet)**条件**:

1°. 连续或至多有有限个第一类间断点;

2°. 至多有有限个极值。

则 $f(t)$在$(-l,l)$内的连续点 t 可展开成傅里叶级数

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{l}+b_n\sin\frac{n\pi t}{l}\right) \tag{1-1}$$

其中系数

$$\begin{cases} a_0=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(\tau)\mathrm{d}\tau, \\ a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(\tau)\cos\frac{n\pi\tau}{l}\mathrm{d}\tau, \\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(\tau)\sin\frac{n\pi\tau}{l}\mathrm{d}\tau, \end{cases} \quad n=1,2,\cdots \tag{1-2}$$

若 t 是 $f(t)$ 的间断点，式(1-1)右端级数等于 $\frac{1}{2}[f(t-0)+f(t+0)]$。

再设 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内绝对可积，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\tau)|\mathrm{d}\tau<+\infty \tag{1-3}$$

将系数 a_n, b_n 的表达式代入式(1-1)后，可得

$$f(t)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\tau)\mathrm{d}\tau+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\tau)\cos\frac{n\pi(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau$$

令 $l\to+\infty$，利用式(1-3)有

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\tau)\mathrm{d}\tau\to0,$$

则 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续点 t 上，有

$$f(t)=\lim_{l\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\tau)\cos\frac{n\pi(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau$$

记 $\omega_0=\frac{\pi}{l}$，$\omega_n=n\omega_0$，$(n=1,2,\cdots)$；$\Delta\omega_n=\omega_{n+1}-\omega_n=\omega_0$，上述极限可看成函数

$$g_l(\omega)=\int_{-l}^{l}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

积分和的极限。按照积分的定义，有

$$\begin{aligned}f(t)&=\lim_{\substack{\Delta\omega_n\to0\\(l\to\infty)}}\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}g_l(\omega_n)\Delta\omega_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}g_{\infty}(\omega)\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{1-4}$$

以上只是形式地推导，由下面的定理 1 可知，式(1-4)必须在一定的条件下才成立。

把积分公式(1-4)写成复数的形式。记虚数单位 $\mathrm{j}=\sqrt{-1}$，由于 $\cos\omega(t-\tau)$ 是 ω 的偶函数，而 $\sin\omega(t-\tau)$ 是 ω 的奇函数，所以式(1-4)可写成

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)[\cos\omega(t-\tau)+\mathrm{j}\sin\omega(t-\tau)]\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-\tau)}\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \qquad (1\text{-}5)
\end{aligned}
$$

若引入新函数

$$
\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau
$$

称$\hat{f}(\omega)$为函数 $f(t)$的傅里叶变换，也可记为$\hat{f}(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$。有下面的定理。

定理 1(傅里叶积分定理) 若 $f(t)$在$(-\infty,+\infty)$内绝对可积，且在任意有限区间$(-l,l)$内满足狄里克雷条件，则在连续点 t，公式(1-5)成立，它也可写成

$$
f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \qquad (1\text{-}6)
$$

若 t 是$f(t)$的间断点，则式(1-5)与(1-6)右端的积分等于

$$
\frac{1}{2}[f(t-0)+f(t+0)]
$$

公式(1-5)和(1-6)都称为**傅里叶积分公式**。

定理的证明较繁，这里从略。

有了定理 1 之后，就把式(1-6)定义的变换称为傅里叶逆变换 $f(t)=\mathscr{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)]$，则式(1-5)也就可写成

$$
\mathscr{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)] = \mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[f(t)]] = f(t)
$$

这就是说，对在$(-\infty,+\infty)$内绝对可积且在任意有限区间满足狄里克雷条件的函数 $f(t)$，作一次傅里叶变换后，再作一次傅里叶逆变换，仍得到函数 $f(t)$本身(在连续点 t 上)。即傅里叶逆变换的确是傅里叶变换之“逆”。这样，可引出下面的定义。

定义 1 若 $f(t)$在$(-\infty,+\infty)$内满足傅里叶积分定理的条件，则称函数

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \tag{1-7}$$

为 $f(t)$ 的**傅里叶变换**（简称**傅氏变换**），也可记为 $\hat{f}(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$。$f(t)$称为**象原函数**，$\hat{f}(\omega)$称为**象函数**。而**傅里叶逆变换**定义为

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{1-8}$$

显然，在不考虑函数 $f(t)$在间断点的取值时，**象原函数** $f(t)$ **与象函数**$\hat{f}(\omega)$**在傅里叶变换下是一一对应的**。为此，称 $f(t)$与$\hat{f}(\omega)$构成一个**傅里叶变换对**，记为

$$f(t)\longleftrightarrow\hat{f}(\omega)$$

例 1-1 求单边指数衰减函数

$$f(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\beta t}, & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases}\quad(\beta>0\text{ 为常数})$$

的傅氏变换，并利用傅氏积分公式证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}0, & t<0\\ \pi/2, & t=0\\ \pi\mathrm{e}^{-\beta t}, & t>0\end{cases}$$

解 根据定义，

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega)&=\mathscr{F}[f(t)]=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\beta+\mathrm{j}\omega}=\frac{\beta-\mathrm{j}\omega}{\beta^2+\omega^2}\end{aligned}$$

由傅氏积分公式可得

$$\mathscr{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta - \mathrm{j}\omega}{\beta^2 + \omega^2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{\beta\cos\omega t + \omega\sin\omega t}{\beta^2 + \omega^2}\mathrm{d}\omega$$
$$= \begin{cases} f(t), & t \neq 0 \\ \frac{1}{2}[f(-0) + f(+0)], & t = 0 \end{cases}$$

由上式立刻推出所要证明的积分公式。

现在对$\hat{f}(\omega)$再作一个傅里叶变换，当$-t$是$f(t)$的连续点时，可得

$$\hat{\hat{f}}(t) = \mathscr{F}[\hat{f}(\omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$
$$= 2\pi\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(-t)}\mathrm{d}\omega\right]$$
$$= 2\pi f(-t) \tag{1-9}$$

若$-t$是$f(t)$的间断点，左端的广义积分等于$\pi[f(-t-0)+f(-t+0)]$。公式(1-9)称为**对称公式**，它是傅里叶积分定理的另一表示形式。在已知$f(t)$与$\hat{f}(\omega)$是一个傅里叶变换对时，由对称公式可知，$\hat{f}(t)$与$2\pi f(-\omega)$也是一个傅里叶变换对，即

$$\begin{cases} f(t) \longleftrightarrow \hat{f}(\omega) \\ \hat{f}(t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega) \end{cases} \tag{1-10}$$

***注 1** 这里出现的$f(t)$在$(-\infty,+\infty)$上的广义积分，均按**柯西**(Cauchy)**主值**意义下取值，即定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{N} f(t)\mathrm{d}t$$

一般情况下，若按柯西主值意义收敛，原广义积分按普通意义不一定收敛。但是，若在普通意义下收敛就推出按柯西主值意义下一

定收敛。以后出现的广义积分也一样按柯西主值意义下取值。

*注 2　在 n 维情况下，记 $\boldsymbol{t}=(t_1,t_2,\cdots,t_n)$，$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$，$\boldsymbol{\omega t}=\omega_1 t_1+\omega_2 t_2+\cdots+\omega_n t_n$ 表示向量 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{t}$ 的数量积。若 $f(\boldsymbol{t})=f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 对每个变量都满足傅里叶变换的条件时，则 $f(\boldsymbol{t})$ 的傅里叶变换为

$$\hat{f}(\boldsymbol{\omega})=\mathscr{F}[f(\boldsymbol{t})]=\int_{R^n} f(\boldsymbol{t})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{\omega t}}\mathrm{d}\boldsymbol{t} \tag{1-11}$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{t}=\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n$，$R^n$ 表示 n 维实数空间。相应地，傅里叶逆变换为

$$f(\boldsymbol{t})=\mathscr{F}^{-1}[\hat{f}(\boldsymbol{\omega})]=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n}\hat{f}(\boldsymbol{\omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{\omega t}}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} \tag{1-12}$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}=\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2\cdots\mathrm{d}\omega_n$。它们与一维情况下的形式相同。

例 1-2　求矩形脉冲函数

$$f(t)=\begin{cases}1, & |t|\leqslant a\\ 0, & |t|>a\end{cases}\quad (a>0)$$

的傅氏变换 $\hat{f}(\omega)$，且利用傅氏积分公式证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\omega}\sin a\omega\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega=\begin{cases}\pi/2, & |t|<a\\ \pi/4, & |t|=a\\ 0, & |t|>a\end{cases} \tag{1-13}$$

并利用对称公式求 $g(t)=\dfrac{\sin at}{\pi t}$ 的傅氏变换。

解　由傅氏变换的定义

$$\hat{f}(\omega)=\mathscr{F}^{-1}[f(t)]=\int_{-a}^{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{-1}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\Big|_{-a}^{a}=\frac{2\sin a\omega}{\omega}$$

根据傅氏积分定理，有

$$\mathscr{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin a\omega}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$