

中学

数学手册

魏 庚 人
张 德 荣

陕西科学技术出版社

62

中学数学手册

魏庚人 张德荣

陕西科学技术出版社

中学数学手册

魏庚人 张德荣

陕西科学技术出版社出版

(西安北大街 131 号)

陕西省新华书店发行 国营五二三厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 15.5 字数 327,800

1981 年 12 月第 1 版 1981 年 12 月第 1 次印刷

印数 1—34,000

统一书号: 7202·15 定价: 1.30 元

出版说明

为了提高教学质量，根据教育部教学大纲的要求和现行教材，我们组织编写了一套中学数、理、化教学参考读物，陆续出版。

编写说明

本书是根据中学数学教学大纲的内容及中学数学教学的需要编写的，可作为中学师生参考用书。内容包括数学概论、代数、几何、平面三角、平面解析几何、微积分初步、概率初步、集合论初步、逻辑代数初步、数学表十个部分。限于篇幅，每个部分中，仅就主要理论和方法作概括的论述。

本书在编写方面有如下特点：

1. 列出主要公式，一般不加证明，但对较为复杂的问题也给出简易证明。如算术平均数不小于几何平均数这一不等式，及弓形面积的近似公式都使用了易于理解的证明方法。对一些难以分辨的问题，则详细讨论，以期彻底解决。如增根与遗根问题以及三角方程不同通解值的等效问题都讨论较详。

2. 从不同角度分析同一问题，以期重点深入。如三角中的加法定理，在 α ， β 为任意角时，给出三种证明。又如极值问题的微积分解法和初等数学（代数，几何，三角）解法都作了介绍。

3. 适当地概括和提高。如辛坡森公式是许多立体体积的总公式。又如逻辑代数中同构的概念归纳了不同代数结构的共同规律。

4. 简明介绍一些重大数学问题的发展概况和我国数学家的卓越贡献。如几何三大问题以及勾股定理和圆周率的求

法。

5. 理论联系实际。如用蚌线三等分角，用蔓叶线倍立方。又如研究天体运行轨道，预知在 1985 年 11 月能看到哈雷彗星。在介绍数学表的编制时，既讲了对数表和三角函数表的编制方法，也讲了 e 和 π 的求法。此外，还选进大量例题，以加深对理论的理解。

限于时间，书中不妥甚至错误之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

目 录

第一章 数学概论

- 一 什么是数学.....(1)
- 二 定义和元名.....(3)
- 三 推证和公理.....(3)
- 四 四种命题的关系.....(6)
- 五 充分条件与必要条件.....(7)
- 六 命题的证明.....(8)

第二章 代 数

- 一 数的概念.....(20)
- 二 代数式.....(25)
- 三 指数和对数.....(32)
- 四 比和比例.....(34)
- 五 方程.....(37)
- 六 不等式.....(56)
- 七 函数.....(72)
- 八 数列.....(78)
- 九 排列、组合、二项式定理.....(82)
- 十 行列式.....(86)
- 十一 e 是怎么算出来的.....(88)
- 十二 对数表是怎样编成的.....(89)

第三章 几 何

一	平面几何中的论证	(92)
二	平面几何中的计算	(101)
三	平面几何中的轨迹	(118)
四	平面几何中的作图	(122)
五	立体几何中的计算	(138)

第四章 三 角

一	锐角的三角函数	(145)
二	任意角的三角函数	(148)
三	三角函数的性质和图象	(151)
四	和角、倍角、半角等的三角函数	(161)
五	三角函数表是怎么编制的	(177)
六	三角形解法	(178)
七	反三角函数	(187)
八	三角方程	(191)
九	三角学的实际应用	(206)

第五章 平面解析几何

一	平面直角坐标系	(216)
二	曲线与方程	(219)
三	直线	(221)
四	圆	(225)
五	椭圆	(231)
六	双曲线	(236)
七	抛物线	(240)
八	坐标变换和一般二元二次方程	(244)
九	参数方程	(250)

十	极坐标及极坐标方程.....	(255)
十一	点和曲线位置关系的例题.....	(265)
十二	圆锥曲线的应用.....	(270)

第六章 微积分初步

一	函数和极限.....	(275)
二	导数.....	(279)
三	导数的应用.....	(285)
四	微分及其应用.....	(294)
五	不定积分.....	(297)
六	定积分.....	(301)
七	定积分的应用.....	(307)

第七章 概率初步

第八章 集合论初步

一	基本概念.....	(332)
二	映射.....	(334)
三	幂集的运算.....	(335)
四	基数.....	(339)
五	有限集.....	(340)
六	可数集.....	(341)
七	实数集.....	(346)
八	有序集.....	(347)

第九章 逻辑代数初步

一	代数结构.....	(350)
二	逻辑代数的定义及其基本性质.....	(352)
三	真值函数.....	(354)
四	蕴含.....	(359)

五	逻辑代数的原子	(362)
六	析取范式	(364)
七	同构定理	(367)

第十章 数 学 表

一	希腊字母	(368)
二	数学符号	(369)
三	常用计量单位表	(374)
四	质数表	(377)
五	阶乘表	(377)
六	常用常数表	(377)
七	勾股数表	(378)
八	斜三角形边长及面积表	(379)
九	平方表	(380)
十	平方根表	(383)
十一	立方表	(388)
十二	立方根表	(394)
十三	三角函数表	(402)
十四	常用对数表	(448)
十五	反对数表	(452)
十六	正弦对数和余弦对数表	(456)
十七	正切对数和余切对数表	(461)
十八	自然对数表	(468)
十九	指数函数 e^x 和 e^{-x} 表	(471)
二十	弧度和度的换算表	(473)
二十一	积分表	(476)

第一章 数学概论

一 什么是数学

1. 数学的定义 数学是以现实世界的空间形式和数量关系为对象的科学。

2. 数学的三个特征 数学有三个特征：第一是它的抽象性；第二是它的精确性，或者更好地说是逻辑的严格性和结论的确定性；第三是它的应用的广泛性。

3. 初等数学与高等数学 初等数学如中等学校的代数、几何、三角等，研究的对象主要是不变量(常量)或图形，以静止的观点来研究对象的。高等数学如解析几何、微积分等，研究的对象是变量和图形的变化，以运动的观点来研究对象的。

4. 数学的分科 到了十六世纪，初等数学已大体完备了。十七世纪，由于生产力的发展，推动了自然科学和技术的发展，人们获得了变量的概念，这是数学发展史上的一个转折点，从而使运动和辩证法进入了数学，解析几何和微积分就是在这个时期建立起来的。本世纪以来，由于科学技术需要大量的数学知识，促使数学飞速发展。现代的数学在习惯上分成数理逻辑、数论、代数学、几何学、拓扑学、函数论、泛函分析、微分方程、概率论和数理统计、计算数学等分科，同时也产生了一些边缘性学科，如运筹学、控制论等。

5. 中国数学 我国古代的数学是自己发展起来的。古

代数学家的伟大成就还传播到国外，作了有世界意义的数学发展的先驱。十七世纪初，西洋数学流传中国，清代数学家在高等数学方面有光辉的成就。本世纪初，我国开始设立中学，所采用的数学课本，改变多次。解放后采用苏联课本，降低了我国中学数学水平。

6. 中学数学教育的改革 1977年，为了提高中学数学质量，全部课本都要重新编写，数学方面，也作了较大的改革，主要体现在以下两个方面：

(1) 教学目的 中学数学教学的目的是：使学生切实学好参加社会主义革命和建设，以及学习现代科学技术所必需的数学基础知识；具有正确迅速的运算能力、一定的逻辑思维能力 and 一定的空间想象能力，从而逐步培养学生分析问题和解决问题的能力。通过数学教学，向学生进行思想政治教育，激励学生为实现四个现代化学好数学的革命热情，培养学生的辩证唯物主义观点。

(2) 教学内容的确定 中学数学教学内容，根据上述教学目的，从适应我国四个现代化的需要出发，同时考虑到学生的接受能力，进行精选。

1° 精选传统的数学内容。应从传统数学内容中精选参加工农业生产和学习现代科学技术所必需的基础知识，删去传统数学中用处不大的内容。

2° 增加微积分、概率统计、逻辑代数（有关电子计算机的数学知识）等初步知识。学习那些知识，对于直接参加社会主义建设和进一步学习现代科学技术都非常必要。

3° 把集合、对应等思想适当渗透到教材中去。这样有利于加深理解这些传统内容，同时也为进一步学习作准备。

这就要把一些高等数学知识下放到中学去讲授,那么,今天的中学数学内容,就不限于初等数学了。这是一个数学现代化的方案,本手册就是为数学现代化而编写的。

二 定义和元名

数学中每出现一个词,必须要确定它的含义以后,大家才有共同的语言,因此就要给它下定义,如第一次提出三角形这个词,就要给三角形下定义:“由不在一直线上的三条线段所围成的封闭图形叫做三角形”。在这个定义中提到了线段这个词,以前给线段下过定义:“把直线上任意两点间的部分叫做线段”。这个定义中提到了点这个词,又怎么给点下定义呢?没有更简单的词给它下定义了。概括起来说,对每一个新词下定义,总要用到旧的词来解释它,如此向前追溯,总会出现一个极简单极明显的词,不能给它下定义,我们把这样的词叫做元名(也叫做不定义的概念)。如代数中的元名有量、集合、对应,以这些元名为出发点,可以定义其它的词。几何中的元名有点、直线、平面,以这三个元名为出发点,可以定义几何中的其它的词。

三 推证和公理

数学中每遇到一个命题或定理,就要用逻辑推理的方式来证明它的真实性。但证明中的根据,常常用到以前的定理,那么以前的定理又是怎么证明的呢?那就用到更以前的定理。如此向前追溯,总会找到极简单又明显的真理,这个真理是已为反复的实践所证实了的,我们把这个不需要证明的真理叫做公理,公理是推理的出发点。

把普通公理和几何公理分述于下：

1. 普通公理

等量公理：

- (1) 等量加等量，和相等。
- (2) 等量减等量，差相等。
- (3) 等量的同倍量相等。
- (4) 等量的同分量相等。
- (5) 在等式或不等式中，一个量可以用它的等量来代替（简称等量代换）。

不等量公理

- (1) 不等量加上或者减去等量，原来大的仍大。
- (2) 不等量乘以或者除以同一个正数，原来大的仍大。
- (3) 不等量加不等量，大量的和大于小量的和。
- (4) 等量减不等量，减去大的，差反而小。
- (5) 第一量大于第二量，第二量大于第三量，则第一量大于第三量。
- (6) 全量大于它的任一部分。

2. 几何公理

- (1) 过任意两点可作一直线，且只可作一直线。
- (2) 两点间以直线为最短。
- (3) 凡平角皆相等。
- (4) 过已知直线外的一个已知点，只可引一条直线平行于已知直线。
- (5) 一条线段可任意延长。
- (6) 已知圆心和半径，可作一圆。
- (7) 几何图形可不变其形状和大小，从一个位置移到另

一个位置。

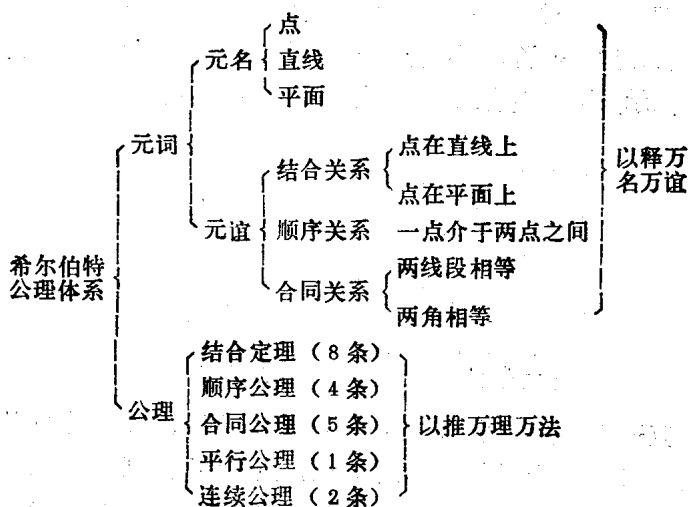
(8) 如果已知直线上的两个点在一个平面内，则这条直线上的所有点都在这个平面内。

(9) 如果两个平面有一个公共点，则它们相交于过这点的一直线。

(10) 过不在一直线上的三个点，确定一个平面。

3. 希尔伯特 (Hilbert, 德国人1862—1943年) 几何公理体系

希尔伯特公理体系是对欧几里得 (Euclid, 古希腊人, 公元前三世纪) 几何学严格的公理体系, 在这里, 只作简单的介绍。希尔伯特的公理体系, 包括三个元名, 五个元谊, 五组公理 (共二十条), 列表如下:



建立一组公理, 必须具备公理之间的制约性, 即和谐性

(亦称相容性或无矛盾性)，独立性和完备性。

四 四种命题的关系

判断一件事物的语句，叫做命题。命题有真有假。数学中常见的命题，其形式为：“若 A ，则 B 。”其中假设的部分：“若 A ”，叫做前提，经过判断得到的结果：“则 B ”，叫做结论。以下指出四种命题的关系：

1. **原命题** 若 A ，则 B 。

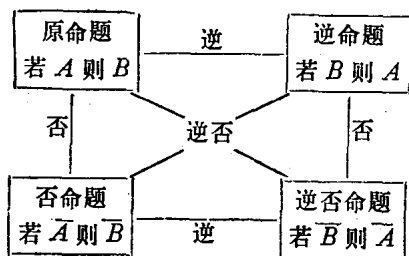
2. **逆命题** 若 B ，则 A 。

3. **否命题** 若非 A ，则非 B 。或写为 若 $\bar{A}$ ，则 $\bar{B}$ 。

4. **逆否命题** 若非 B ，则非 A 。或写为 若 $\bar{B}$ 则 $\bar{A}$ 。

注： $\bar{A}$ 读做非 A 或不 A 。

否命题也叫做对称命题，逆否命题也叫做反申命题。逆命题、否命题、逆否命题都是对原命题来说的，它们的相互关系，图示如下：左右互逆，上下互否，两斜互为逆否。



互逆或互否的两个命题，可以同真，可以同假，也可以一真一假。而互为逆否的两个命题，真则同真，假则同假，虽然形式不同，而实质上是一样的，这叫做逆否命题的等价性。根据这个性质，对于数学上的每一个定理，都可以用逆

否命题的形式，得出与它等价的另一个定理：

例如由“二次方程的判别式若等于0，则其两根相等”，可以得出“二次方程的两根若不相等，则其判别式不等于0。”又如由“平行四边形的对角线互相平分”，可以得“一个四边形对角线若不互相平分，它就不是平行四边形。”

如果一个命题的真实性是能够证明出来的，就把这个命题叫做定理。定理中的前提和结论，为了别于一般命题，前者称为题设，后者称为题断。

定理若 A ，则 B ，可写为 $A \Rightarrow B$ 。

若 B ，则 A ，则写为 $B \Rightarrow A$ 。

若不 A ，则不 B ，则写为 $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$ 。

若不 B ，则不 A ，则写为 $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ 。

若 A 则 B ，与若 B ，则 A ，都成立，则写为

$A \Leftrightarrow B$ 。

五 充分条件与必要条件

1. 充分条件 在定理 $A \Rightarrow B$ 中， A 叫做 B 的充分条件。如 $x=1 \Rightarrow (x-1)(x+4)=0$ 。

$x=1$ 是 $(x-1)(x+4)=0$ 的充分条件；又如内错角相等 $\Rightarrow$ 二直线平行，内错角相等是二直线平行的充分条件。

因为由不同的题设，有时产生相同的题断，所以一个题断的充分条件不一定是唯一的。如 $x=-4$ 也是 $(x-1)(x+4)=0$ 的充分条件。同位角相等也是二直线平行的充分条件。

2. 必要条件 在定理 $A \Rightarrow B$ 中， B 叫做 A 的必要条件。如前例 $(x-1)(x+4)=0$ 是 $x=1$ 的必要条件。