硕士研究生入学考试

数学精读

李相朋 孙清华 欧贵兵 潘国祥

考研

湖南大学出版社

硕士研究生入学考试

数学精读

李相鹏　孙清华　欧贵兵　潘国祥

——应考内容方法与技巧归纳

——考试题型与典型例题分析

——历届考研真题解析与总结

——未来考研试题分析与预测

湖南大学出版社

2002年·长沙

内 容 提 要

本书是硕士研究生入学考试用书.主要内容有高等数学;线性代数;概率论与数理统计.全书分三篇26章.每章首先介绍考试内容和要求,指出重点,然后介绍本章的主要概念、定理和常用公式,精选了许多典型例题,按考试题型分类,并作详细分析,给出多种解法;对历届考研真题进行了认真的解析和总结.对未来考研试题作了分析和预测.本书除可供考研青年复习数学外,还可供在校大学生学习参考.

图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学考试数学精读/李相鹏等编.—长沙:湖南大学出版社,2002.5

ISBN 7—81053—493—9

Ⅰ.硕… Ⅱ.李… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第038694号

硕士研究生入学考试数学精读

Shuoshi Yanjiusheng Ruxue Kaoshi Shuxue Jingdu

李相鹏 孙清华 欧贵兵 潘国祥

□责任编辑 李立鹏 俞 涛

□出版发行 湖南大学出版社

社址 长沙市岳麓山 邮码 410082

电话 0731-8821691 0731-8821315

□经 销 湖南省新华书店

□印 装 长沙环境保护学校印刷厂

□开本 787×1092 16开 □印张 30.5 □字数 764千

□版次 2002年5月第1版 □2002年5月第1次印刷

□印数 1~7 000册

□书号 ISBN 7—81053—493—9/O·37

□定价 38.00元

前　言

在大学生争取未来的拼搏中，考研是人生的一条重要途径，越来越多的大学生走上了考研的成功之路，所以他们迫切需要一本适合自己的卓有成效的考研辅导书，帮助自己把握考试的要求，掌握考试必需的知识与技巧，提高考试解题的能力. 为此，我们在总结自己多年教学和辅导考研的基础上，精心编写了这本《硕士研究生入学考试数学精读》，供广大考生参考.

考研辅导书与教材不同，它是复习应考用的. 它在对应试内容进行系统复习的基础上，特别注重解题的训练，强调技巧性、方法性、针对性和实战性.《硕士研究生入学考试数学精读》具有以下特点：

1. 强调了考试要求. 突出《全国攻读硕士学位研究生入学考试大纲》的考试内容和考试要求，摒弃了一切与考试无关的内容与超过考纲的知识及习题，使本书的每一项内容和每一道习题都能使考生学有所用，练有所得. 使读者可以利用较少的时间，达到最好的复习与训练效果. 内容特别精炼，重点非常突出.

2. 强调了方法、技巧与典型例题分析. "工欲善其事，必先利其器". 本书对历年考研试卷分析中发现的问题和考生在复习中出现的问题进行了归纳、分析，对各种题型进行了归类整理、总结提高，通过典型例题分析，介绍了分析问题的思路，解题的方法、技巧和可以推广的范围. 具备典型性、针对性和实战性，使考生经过这些例题的熏染和训练，能够举一反三、触类旁通，起到事半功倍的作用.

3. 强调了考研真题的分析. "知己知彼，百战不殆". 通过对考研真题的分析，掌握历年考研的考点、重点和难点，考查的角度、深度和题型，对考研的取胜是极其重要的. 本书作者经过自己的思考，对一些关键的题型进行了分析研究，将有助于考生开拓思路、融会贯通，给复习备考以更佳的效果.

4. 对历年试卷进行了分析，对未来考研进行了预测. 根据《全国攻读硕士学位研究生入学考试数学考试大纲》所提供的信息和历年考研数学试卷反映的情况，对考研的重点和考点进行了更深入的分析，更突出了必须掌握的问题和可能出现的新动向，作为考生复习备考的参考.

本书在编写和出版中得到湖南大学出版社的大力支持和帮助，在此表示衷心的感谢.

本书高等数学部分由李相鹏、潘国祥撰写，线性代数部分由欧贵兵撰写，概率论与数理统计部分由孙清华撰写. 由于时间仓促，错漏之处在所难免，敬请读者批评指正.

最后，祝考生们好运！

编　者

2002 年 4 月

目　次

第一篇　高等数学

第一章　极限与连续

考试要求及内容 …… (1)
第一讲　函数复习 …… (1)
第二讲　概念、定理与公式 …… (4)
第三讲　典型题型分析 …… (11)
第四讲　考研真题分析及预测 …… (22)
习题一 …… (25)
习题一参考答案 …… (27)

第二章　导数与微分

考试要求及内容 …… (28)
第一讲　概念、定理与公式 …… (28)
第二讲　典型题型分析 …… (35)
第三讲　考研真题分析及预测 …… (38)
习题二 …… (43)
习题二参考答案 …… (44)

第三章　微分学的基本定理及其应用

考试要求及内容 …… (45)
第一讲　概念、定理与公式 …… (45)
第二讲　典型题型分析 …… (50)
第三讲　考研真题分析及预测 …… (60)
习题三 …… (66)
习题三参考答案 …… (67)

第四章　一元函数积分学及其应用

考试要求及内容 …… (68)
第一讲　概念、定理、公式与法则 …… (68)
第二讲　典型题型分析 …… (82)
第三讲　考研真题分析及预测 …… (91)
习题四 …… (101)
习题四参考答案 …… (104)

第五章　微分方程

考试要求及内容 …… (105)
第一讲　概念、定理与公式 …… (105)
第二讲　典型题型分析 …… (114)
第三讲　考研真题分析及预测 …… (120)

习题五 …… (129)
习题五参考答案 …… (130)
第六章　向量代数与空间解析几何
考试要求及内容 …… (132)
第一讲　概念、定理与公式 …… (132)
第二讲　典型题型分析 …… (140)
第三讲　考研真题分析及预测 …… (145)
习题六 …… (147)
习题六参考答案 …… (148)
第七章　多元函数微分学
考试要求及内容 …… (149)
第一讲　概念、定理与公式 …… (149)
第二讲　典型题型分析 …… (158)
第三讲　考研真题分析及预测 …… (165)
习题七 …… (168)
习题七参考答案 …… (169)
第八章　重积分
考试要求及内容 …… (170)
第一讲　概念、定理与公式 …… (170)
第二讲　典型题型分析 …… (175)
第三讲　考研真题分析及预测 …… (187)
习题八 …… (190)
习题八参考答案 …… (191)
第九章　曲线积分与曲面积分
考试要求及内容 …… (192)
第一讲　概念、定理与公式 …… (192)
第二讲　典型题型分析 …… (197)
第三讲　考研真题分析及预测 …… (209)
习题九 …… (215)
习题九参考答案 …… (216)
第十章　无穷级数
考试要求及内容 …… (217)
第一讲　概念、定理与公式 …… (217)
第二讲　典型题型分析 …… (225)
第三讲　考研真题分析及预测 …… (233)
习题十 …… (236)
习题十参考答案 …… (238)

第二篇　线性代数

第一章　行列式

考试要求及内容 …… (239)
第一讲　概念、定理与公式 …… (239)
第二讲　典型题型分析 …… (242)
第三讲　考研真题分析及预测 …… (250)
习题一 …… (253)
习题一参考答案 …… (255)

第二章　矩阵

考试要求及内容 …… (256)
第一讲　概念、定理与公式 …… (256)
第二讲　典型题型分析 …… (260)
第三讲　考研真题分析及预测 …… (274)
习题二 …… (279)
习题二参考答案 …… (281)

第三章　向量

考试要求及内容 …… (283)
第一讲　概念、定理与公式 …… (283)
第二讲　典型题型分析 …… (287)
第三讲　考研真题分析及预测 …… (296)
习题三 …… (302)
习题三参考答案 …… (304)

第四章　线性方程组

考试要求及内容 …… (306)
第一讲　概念、定理与公式 …… (306)
第二讲　典型题型分析 …… (308)
第三讲　考研真题分析及预测 …… (315)
习题四 …… (318)
习题四参考答案 …… (320)

第五章　相似矩阵(特征值与特征向量)

考试要求及内容 …… (322)
第一讲　概念、定理与公式 …… (322)
第二讲　典型题型分析 …… (324)
第三讲　考研真题分析及预测 …… (333)
习题五 …… (336)
习题五参考答案 …… (337)

第六章　二次型

考试要求及内容 …… (339)

第一讲　概念、定理与公式 …… (339)
第二讲　典型题型分析 …… (341)
第三讲　考研真题分析及预测 …… (347)
习题六 …… (349)
习题六参考答案 …… (350)

第三篇　概率论与数理统计

第一章　随机事件与概率
考试要求及内容 …… (352)
第一讲　概念、定理与公式 …… (352)
第二讲　典型题型分析 …… (357)
第三讲　考研真题分析及预测 …… (371)
习题一 …… (372)
习题一参考答案 …… (373)
第二章　随机变量及其概率分布
考试要求及内容 …… (374)
第一讲　概念、定理与公式 …… (374)
第二讲　典型题型分析 …… (376)
第三讲　考研真题分析及预测 …… (385)
习题二 …… (386)
习题二参考答案 …… (387)
第三章　二维随机变量及其概率分布
考试要求及内容 …… (388)
第一讲　概念、定理与公式 …… (388)
第二讲　典型题型分析 …… (391)
第三讲　考研真题分析及预测 …… (403)
习题三 …… (403)
习题三参考答案 …… (405)
第四章　随机变量的数字特征
考试要求及内容 …… (407)
第一讲　概念、定理与公式 …… (407)
第二讲　典型题型分析 …… (409)
第三讲　考研真题分析及预测 …… (422)
习题四 …… (422)
习题四参考答案 …… (424)
第五章　大数定律与中心极限定理
考试要求及内容 …… (426)
第一讲　概念、定理与公式 …… (426)
第二讲　典型题型分析 …… (428)

第三讲　考研真题分析及预测 …………………………………………………………………………… (435)
习题五 ……………………………………………………………………………………………………… (435)
习题五参考答案 …………………………………………………………………………………………… (437)
第六章　数理统计的基本概念
考试要求及内容 …………………………………………………………………………………………… (438)
第一讲　概念、定理与公式 ……………………………………………………………………………… (438)
第二讲　典型题型分析 …………………………………………………………………………………… (440)
第三讲　考研真题分析及预测 …………………………………………………………………………… (448)
习题六 ……………………………………………………………………………………………………… (448)
习题六参考答案 …………………………………………………………………………………………… (450)
第七章　参数估计
考试要求及内容 …………………………………………………………………………………………… (451)
第一讲　概念、定理与公式 ……………………………………………………………………………… (451)
第二讲　典型题型分析 …………………………………………………………………………………… (454)
第三讲　考研真题分析及预测 …………………………………………………………………………… (461)
习题七 ……………………………………………………………………………………………………… (462)
习题七参考答案 …………………………………………………………………………………………… (463)
第八章　假设检验
考试要求及内容 …………………………………………………………………………………………… (464)
第一讲　概念、定理与公式 ……………………………………………………………………………… (464)
第二讲　典型题型分析 …………………………………………………………………………………… (466)
第三讲　考研真题分析及预测 …………………………………………………………………………… (469)
习题八 ……………………………………………………………………………………………………… (469)
习题八参考答案 …………………………………………………………………………………………… (470)
附录　2002 年全国硕士研究生入学考试数学一试卷及参考答案 ………………………………… (471)

第一篇　高等数学

第一章　极限与连续

考试要求及内容

函数的概念及表示法，函数的有界性，单调性，周期性和奇偶性，复合函数，反函数，分段函数和隐函数，基本初等函数的性质及其图形，初等函数，简单应用问题的函数关系的建立，数列极限与函数极限的定义以及它们的性质，函数的左极限与右极限，无穷小和无穷大的概念及其关系，无穷小的性质及无穷小的比较.

极限的四则运算，极限存在的两个准则，两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

函数连续的概念，函数间断点的类型，初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质.

第一讲　函数复习

一、函数的概念及表示法

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 若对于 D 中的每一个 x 值，按照一定的法则 f，变量 y 总有一个确定的值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$.

表示法：公式法，图像法，列表法等.

注　函数的两个要素：定义域 D 及法则 f. 两个函数相等 $\Longleftrightarrow$ 其 D 与 f 完全相同.

函数表示法仅与 D、f 有关，而与变量 x,y 用什么字母代替无关.

例 1.1　设 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 存在，且 $f(x)=x^2+2x\lim\limits_{x\to 1}f(x)$，则与 $f(x)$ 等价的函数是(　　)

(A) $y=\int_0^x(x^2-2x)\mathrm{d}x$；　　　(B) $y=\int_0^1(x^2-2x)\mathrm{d}t$；

(C) $y=\int f'(x)\mathrm{d}x$；　　　(D) $y=\mathrm{e}^{\ln(x^2-2x)}$.

解　<u>(B)</u>

分析　设 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=l$，则 $f(x)=x^2+2lx$，两边取极限，得 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2lx)$，即 $l=1+2l\Rightarrow l=-1$，故 $f(x)=x^2-2x$.

(A) $y=\frac{1}{3}x^3-x^2$，(B) $y=x^2-2x$，(C) $y=f(x)+c$，(D) $y=\mathrm{e}^{\ln(x^2-2x)}$，其定义域为 $x<0$，或 $x>2$. 故(B)入选.

例 1.2　设 $f\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)=2f(x)+x$，求 $f(x)$.

解 令 $t=\dfrac{x+1}{2x-1}$，即 $2tx-t=x+1$，亦即 $x=\dfrac{t+1}{2t-1}$，从而

$$f(t)=2f\left(\frac{t+1}{2t-1}\right)+\frac{t+1}{2t-1}，\text{即 } f(x)=2f\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)+\frac{x+1}{2x-1}.$$

将原式代入，得
$$f(x)=2(f(x)+x)+\frac{x+1}{2x-1}.$$

整理得
$$f(x)=\frac{4x^2-x+1}{3(1-2x)}.$$

二、函数的性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义，若对于 $\forall\ x,y\in X$ 恒有

$$f(x)=f(-x)\ (\text{或 } f(-x)=-f(x)),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数(或 $f(x)$ 为奇函数).

几何意义：偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称.

运算性质：1) 奇函数之和为奇函数，偶函数之和为偶函数；2) 偶数个奇函数(偶函数)之积为偶函数，奇数个奇函数之积为奇函数；3) 一奇一偶的函数乘积为奇函数.

函数奇偶性的判别：(1) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的. 若函数的定义域关于原点不对称，则该函数不是奇或偶函数；(2) 按奇偶的定义或运算法则来判断；(3) 按 $f(x)+f(-x)=0$ 来判别 $f(x)$ 为奇函数.

例 1.3 设 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，令 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，则

$$\begin{aligned}f(x)+f(-x)&=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\ln(-x+\sqrt{x^2+1})\\&=\ln[(x+\sqrt{x^2+1})(-x+\sqrt{x^2+1})]=\ln 1=0,\end{aligned}$$

所以 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 为奇函数.

2. 周期函数

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义，若存在一个常数 $T\neq 0$，满足：$\forall\ x\in X$，有 $x\pm T\in X$，且 $f(x\pm T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为以 T 为周期的周期函数，并把满足上式的最小正数 T 称为 $f(x)$ 的周期.

几何意义：自变量每增加或减少一固定的距离 T 后，图形重复出现.

周期函数的性质：

1° 若 T 为 $f(x)$ 的周期，则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\dfrac{T}{|a|}$；

2° 若 $f(x),g(x)$ 均是以 T 为周期，则 $f(x)\pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数；

3° 若 $f(x),g(x)$ 分别是以 $T_1,T_2(T_1\neq T_2)$ 为周期的函数，则 $f(x)\pm g(x)$ 是以 T_1,T_2 的最小公倍数为周期的函数.

函数周期性的判定主要依据周期函数的定义，有时也用其性质.

3. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 X 上有定义，若 $\exists\ M>0$，使得对于一切 $x\in X$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 X 上有界.

几何意义：$y=f(x)$ 的图形介于直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.

注 1° 函数 $f(x)$ 有无界是相对于某个区间而言的；

2° $f(x)$ 在 X 上无界 $\Leftrightarrow\forall\ M>0,\exists\ x(M)\in X$，使得 $|f(x(M))|>M$；

3° 无界函数与无穷大的区别：无穷大一定是无界函数，但无界函数不一定是无穷大.

函数有界性的判别：1) 利用有界的定义；2) 闭区间上的连续函数必有界；3) 有极限的数列必有界；4) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在时，$f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有界.

4. 单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 X 上有定义，若对 $\forall\, x_1,x_2\in X, x_1<x_2$，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\ (\text{或}\ f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上是单调增加(或单调减少)的.

函数单调性的判别：1° 按单调性的定义；2° 在已知 $y=f(x)$ 可导的情况下，利用导数来判定.

三、复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，而函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D_g，值域为 R_g. 若 $D_f\cap R_g\neq\varnothing$，则 $y=f(g(x))$ 为 x 的复合函数. 其定义域包含在 D_g 之中.

求两个或两个以上函数的复合函数的方法通常有三种：

1. 代入法：直接将函数中的自变量用另一个函数的表达式来替代(适用于初等函数的复合).

2. 分析法：抓住最外层函数定义域的各区间段，结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析，从而得出复合函数.

例 1.4 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0;\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0;\\ x+2, & x>0.\end{cases}$ 求 $g[f(x)]$.

解 $g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0;\\ f(x)+2, & f(x)>0.\end{cases}$ 当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=-x<0$；而当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2>0$，所以 $g[f(x)]=\begin{cases}2+x, & x\geqslant 0;\\ x^2+2 & x<0.\end{cases}$

3. 图示法：借助于图形的直观性求得复合函数的一种方法(适用于分段函数). 具体步骤为：

1° 画出中间变量 $u=g(x)$ 的图像；

2° 将 $y=f(u)$ 的分界点在 xou 平面上画出(这是若干条平行于 x 轴的直线)；

3° 写出 u 在不同区间段上 x 所对应的变化区间；

4° 将 3° 所得结果代入 $y=f(u)$ 中，便得 $y=f[g(x)]$ 的表达式及相应的 x 变化区间.

例 1.5 设 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)$，$g(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

解 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$

令 $u=g(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x<0;\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

1° 作出 $u=g(x)$ 的图像，见图 1.1.1.

2° 在图 1.1.1 上画出 $y=f(u)=\begin{cases}u, & u\geqslant 0\\ 0, & u<0\end{cases}$ 的分界点 $u=0$ 的图像(x 轴).

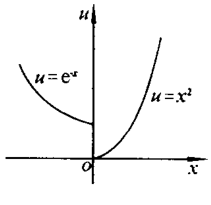

图 1.1.1

3° 从图中可看出，当 $x<0$ 时，$u=e^{-x}>0$，当 $x\geqslant 0$ 时，$u=x^2>0$.

4° 将 3° 代入 $y=f(u)$，得

$$f[g(x)] = \begin{cases} e^{-x}, & \text{当 } x < 0 \text{ 时}, \\ x^2, & \text{当 } x \geqslant 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

四、反函数

设有 $y = f(x)$，$D_f = X$，$R_f = Y$，若 $\forall\ y \in Y$，有惟一确定的 $x \in X$，使得 $f(x) = y$，由此对应关系在 Y 上确定一个函数，称为 $y = f(x)$ 的反函数，记为 $x = f^{-1}(y)$. 习惯上，记 $y = f(x)$ 的反函数为 $y = f^{-1}(x)$.

注　函数 $y = f(x)$ 与反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的关系如下：

1° 若 $D_f = X$，$R_f = Y$，则 $D_{f^{-1}} = Y$，$R_{f^{-1}} = X$；

2° $f(f^{-1}(y)) = y(\forall\ y \in Y)$. $f^{-1}(f(x)) = x(\forall\ x \in X)$；

3° $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于 $y = x$ 对称，而 $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 的图形重合.

4° $y = f(x)$，$x \in X$ 存在反函数 $\Longleftrightarrow \forall\ x_1, x_2 \in X$，若 $x_1 \neq x_2$，则 $f(x_1) \neq f(x_2)$.

求反函数的步骤：

从 $y = f(x)$ 中解出 $x = f^{-1}(y)$，并指出 $x = f^{-1}(y)$ 的定义域. ii) 将 $x = f^{-1}(y)$ 中 x 与 y 对换即得 $y = f(x)$ 的反函数. 其定义域为 $R_f = \{y \mid y = f(x), x \in D_f\}$.

对于分段函数的反函数求法，只要分别求出各区间段的反函数及定义域即可.

五、初等函数

由六类基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算而得到的可以用一个式子表示的函数称为初等函数.

注　1° 六类基本初等函数即指：

$y = c$(常数)；$y = a^x(a > 0, a \neq 1)$；$y = \log_a x(a > 0, a \neq 1)$；

$y = \sin x, \cos x, \tan x, \cot x$；$y = \arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$；$y = x^\alpha$；

2° 六类基本初等函数的性质与图像要弄清.

第二讲　概念、定理与公式

一、概念

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Longleftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N(\varepsilon)$，当 $n > N(\varepsilon)$ 时，有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a \Longleftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ X(\varepsilon) > 0$，当 $|x| > X(\varepsilon)$ 时，有 $|f(x) - a| < \varepsilon$.

类似地可定义：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$.

3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \Longleftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ 时，有 $|f(x) - a| < \varepsilon$.

类似地可定义：$f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = a$ 及 $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = a$.

4. 无穷小量

若 $f(x)$ 在自变量的某个变化过程中，以“0”为极限，则称 $f(x)$ 是这个自变量变化过程的无穷小量.

例如：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$，则 $f(x)$ 为“$x \to x_0$”时的无穷小量.

5. 无穷大量

若 $f(x)$ 在自变量的某个变化过程中，$|f(x)|$ 无限增大，则称 $f(x)$ 为自变量这个变化过程的无穷大量.

例如：若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 即 $\forall\, M>0$，$\exists\,\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)|>M$，则 $f(x)$ 为"$x\to x_0$"时的无穷大量.

注意：1° 无穷大量实际上是极限不存在的一种形式.

2° 无穷大量与无界函数的区别：无穷大量一定是无界函数，而无界函数不一定是无穷大量.

3° 无穷大量与无穷小量的关系：在同一个自变量变化过程中

$$\begin{cases} f(x)\text{ 为无穷小},f(x)\neq 0,\text{则}\dfrac{1}{f(x)}\text{ 为无穷大}, \\ f(x)\text{ 为无穷大},\text{则}\dfrac{1}{f(x)}\text{ 为无穷小}. \end{cases}$$

6. 无穷小量阶的比较(重点)

设 $\alpha(x)$，$\beta(x)$ 是在同一个自变量变化过程"▭"中的两个无穷小量，且$\lim\limits_{▭}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=l$. 若

1° $l=0$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 在"▭"中的高阶无穷小. 记为 $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

2° $l\neq 0$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 在"▭"中的同阶无穷小.

3° $l=1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是在"▭"中的等价无穷小，记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

注　1° 若 $\alpha(x)$ 与 $\beta^k(x)$ 为同阶无穷小，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小.

2° 常见的等价无穷小量，有

$$x\to 0\text{时},\sin x\sim x,\ln(1+x)\sim x,\arcsin x\sim x,e^x-1\sim x,\arctan x\sim x,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,$$

$$a^x-1\sim x\ln a,(1+x)^\alpha\sim\alpha x.$$

3° 在求极限过程中，极限函数中的乘积无穷小因子可用其等价无穷小替换.

例 1.6　求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}$.

解　令 $x^x-1=t$，则当 $x\to 1$ 时，$t\to 0$. 而又 $t\sim\ln(1+t)$. 所以 $x^x-1\sim\ln x^x=x\ln x$，故

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x\ln x}=1.$$

例 1.7　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin x\cos x}{x^3\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\dfrac{1}{2}$.

4° 若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$，如何确定 $f(x)$ 是$(x-a)$ 的几阶无穷小？常用的方法为

利用洛必达法则：确定 $k>0$，使得$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{(x-a)^k}=A\neq 0$，则 $f(x)$ 是$(x-a)$ 的 k 阶无穷小.

用 Taylor 公式：

$$f(x)=f(a)+f'_{(a)}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+0((x-a)^n).$$

如果 $f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$，而 $f^{(n)}(a)\neq 0$，则 $f(x)$ 是$(x-a)$ 的 n 阶无穷小.

利用无穷小的运算性质：

如果当 $x \to a$ 时，$f(x)$，$g(x)$ 分别是 $(x-a)$ 的 m 阶与 n 阶无穷小量，则 $f(x) \cdot g(x)$ 是 $(x-a)$ 的 $m+n$ 阶无穷小. 而 $f(x)+g(x)$ 是 $(x-a)$ 的 $\min(m,n)$ 阶无穷小.

7. 函数的连续性

定义 1 设函数 $y=f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内有定义，给 Δx，使 $x_0+\Delta x \in U(x_0,\delta)$，若

$$\lim_{\Delta x \to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)] = \lim_{\Delta x \to 0}\Delta y = 0,$$

则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

定义 2 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

定义 3 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内任一点均连续，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

定义 4 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，在 $x=a$ 处右连续，在 $x=b$ 处左连续，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

8. 间断点的定义及分类

定义 若 $f(x)$ 在 x_0 处出现如下情形之一

1° $f(x)$ 在 x_0 处无定义；2° $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在；3° $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

间断点 x_0 的类型：

第一类间断点 $\overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} f(x_0+0)$ 与 $f(x_0-0)$ 均存在.

若 $f(x_0+0)=f(x_0-0) \neq f(x_0)$ 或 $f(x_0)$ 无定义，则称 x_0 为可去间断点，若 $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$，则称 x_0 为跳跃间断点.

第二类间断点 $\overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} f(x_0+0)$ 与 $f(x_0-0)$ 中至少有一个不存在. 其中如果 $f(x_0+0)$ 或 $f(x_0-0)$ 为 ∞，则称 x_0 为无穷间断点.

例 1.8 设 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，试证 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

解 $f(0+0)=f(0)+f(0) \Rightarrow f(0)=0$，$f(0)=f(x-x)=f(x)+f(-x) \Rightarrow f(-x)=-f(x)$，从而，$\forall\, x \in (-\infty,+\infty)$，有

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x)-f(x) = f(x+\Delta x)+f(-x) = f(x+\Delta x-x) \\ &= f(\Delta x).\end{aligned}$$

又因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，即 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$，故

$$\lim_{\Delta x \to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} f(\Delta x) = f(0) = 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

例 1.9 求 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{x^2-2x-3}$ 的间断点，并判别类型.

解 $x=0$ 及 $x^2-2x-3=0$ 使 $f(x)$ 无意义，所以 $x=0$，$x=3$，$x=-1$ 为 $f(x)$ 的间断点，又

当 $x=0,3$ 时，由于 $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\ln|x|}{x^2-2x-3}=\infty$，$\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{\ln|x|}{x^2-2x-3}=\infty$，故 $x=0,3$ 为无穷间断点.

当 $x=-1$ 时，由于 $\lim\limits_{x \to -1}\dfrac{\ln|x|}{x^2-2x-3}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x \to -1}\dfrac{\frac{1}{x}}{2x-2}=\dfrac{1}{4}$ 故 $x=-1$ 为可去间断点.

例 1.10 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$，则

(1) 若 $f(x)$ 处处连续，求 a,b 值.

(2) 若 a,b 不是求出的值时，$f(x)$ 有何间断点，并指出它的类型.

解 (1) 首先求出 $f(x)$.

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & |x|>1;\\ \dfrac{1}{2}(a+b+1), & x=1;\\ \dfrac{1}{2}(a-b-1), & x=-1;\\ ax^2+bx, & |x|<1.\end{cases}$$

其次由初等函数的连续性知：当 $|x|>1$ 或 $|x|<1$ 时，$f(x)$ 连续. 最后，只需考察在分段点 $x=\pm 1$ 处的连续性：分别计算

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x}=1,\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(ax^2+bx)=a+b;$$

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}ax^2+bx=a-b,\lim_{x\to-1^-}\frac{1}{x}=-1;$$

所以$f(x)$ 在 $x=1$ 处连续 $\Rightarrow a+b=1=\dfrac{1}{2}(a+b+1)\Rightarrow a+b=1$.

$f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续 $\Rightarrow a-b=-1=\dfrac{1}{2}(a-b-1)\Rightarrow a-b=-1$，

故由此可知：$a=0,b=1$.

(2) 当 $a\neq0$ 或 $b\neq1$ 时

1° 若 $a+b=1$ 而 $a-b\neq-1$，则 $x=1$ 是连续点，$x=-1$ 为第一类间断点.

2° 若 $a-b=-1$ 而 $a+b\neq1$，则 $x=-1$ 是连续点，$x=1$ 为第一类间断点.

3° 若 $a+b\neq1$，且 $a-b\neq-1$，则 $x=1$ 及 $x=-1$ 均是第一类间断点.

二、重要定理与公式

1. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Longleftrightarrow f(x_0+0)=f(x_0-0)=A$.

注 1° 若 $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

2° 当 $x\to\infty$ 时的极限式中含有 $a^x(a>0,a\neq1)$ 或 $\arctan x,\operatorname{arccot}x$，一定要分别求出 $x\to+\infty,x\to-\infty$ 的极限值，若两者相等，则 $x\to\infty$ 时的极限存在，否则不存在；当 $x\to0$ 时的极限式中含有 $|x|$，一般要分别考虑左、右极限.

3° 若 $\exists\ x_n\to x_0,x_n\neq x_0,\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 不存在或 $\exists\ x_n\to x_0(x_n\neq x_0),y_n\to x_0(y_n\neq x_0)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

4° 设 $\alpha(x)\to\infty$，则下列函数的极限不存在；

$$\sin\alpha(x),\cos\alpha(x),e^{\alpha(x)},\arctan\alpha(x),\operatorname{arccot}\alpha(x).$$

2. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Longleftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

例 1.11 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin6x+xf(x)}{x^3}=0$，求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin6x+xf(x)}{x^3}=0\Longleftrightarrow\dfrac{\sin6x+xf(x)}{x^3}=\alpha(x)(\lim\limits_{x\to0}\alpha(x)=0)$

$\Rightarrow\sin6x+xf(x)=x^3\alpha(x)\Rightarrow6x+xf(x)=6x+x^3\alpha(x)-\sin6x$

$\Rightarrow\dfrac{6x+xf(x)}{x^3}=\dfrac{6x-\sin6x}{x^3}+\alpha(x).$

$$\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\left[\frac{6x-\sin6x}{x^3}+\alpha(x)\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{6x-\sin6x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{6-6\cos6x}{3x^2}=2\lim_{x\to0}\frac{1-\cos6x}{x^2}$$

$$=2\cdot\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(6x)^2}{x^2}=36.$$

例 1.12 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+f(x)/\sin x)}{a^x-1}=A(a>0,a\neq1)$，求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

解 因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+f(x)/\sin x)}{a^x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)/\sin x}{x\ln a}=A$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)/\sin x}{x}=A\ln a.$$

注 由题设可知$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sin x}=0$.

3. 极限的局部保号性定理

1° $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0\Rightarrow\exists\ \delta>0$，当 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$.

2° $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $\exists\ U^\circ(x_0,\delta)$，$\forall\ x\in U^\circ(x_0,\delta)$，有 $f(x)>0\Rightarrow A\geqslant0$.

4. 极限的局部有界性定理

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $\exists\ U(x_0,\delta)$，$f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内有界.

5. 极限存在的两个准则

1° 单调有界数列必有极限. 即若 $x_n\nearrow$ 且 $\exists$ 数 M，使得 $\forall\ n\in N$，有 $x_n\leqslant M$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在或若 $x_n\searrow$ 且 $\exists$ 数 m，使得 $\forall\ n\in N$，有 $x_n\geqslant m$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

2° 两边夹法则：设在 $U^\circ(x_0,\delta)$ 内，有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)$，且$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=A$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

6. 无穷小的运算性质定理

1° 有限个无穷小的代数和为无穷小；2° 有限个无穷小的乘积为无穷小；3° 有界函数与无穷小的乘积为无穷小.

例 1.13 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\sqrt{n^2+1}\pi$.

解 因为 $\sin\sqrt{n^2+1}\pi=\sin[(\sqrt{n^2+1}-n)\pi+n\pi]$

$$=(-1)^n\sin(\sqrt{n^2+1}-n)\pi=(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n},$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}\pi=\lim_{n\to\infty}\left[(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right]=0.$$

7. 极限的四则运算法则

设$\lim\limits_{\square}f(x)=A$，$\lim\limits_{\square}g(x)=B$，则

1° $\lim\limits_{\square}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$； 2° $\lim\limits_{\square}f(x)g(x)=AB$，