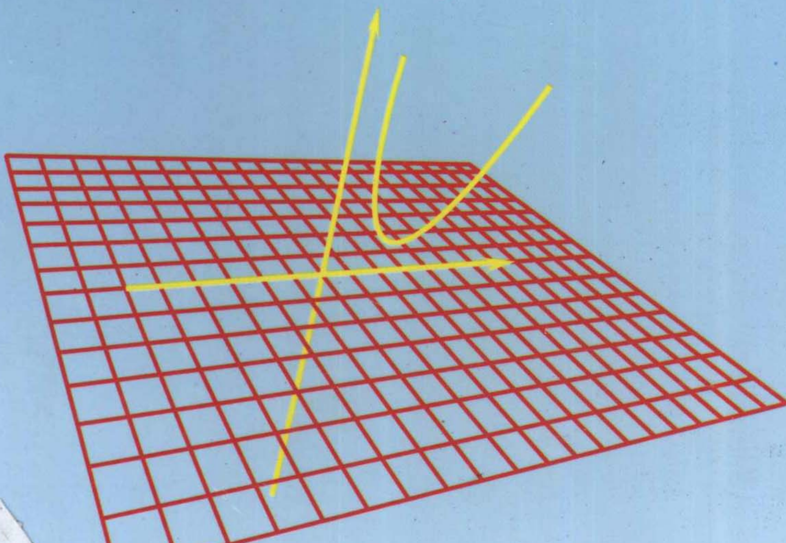
函数方程

FUNCTIONAL EQUATIONS

张伟年 杨地莲 邓圣福 著



四川教育出版社

FUNCTIONAL EQUATIONS

函数方程

张伟年 杨地莲 邓圣福 著

四川教育出版社 · 2002年

图书在版编目(CIP)数据

函数方程/张伟年　杨地莲　邓圣福编著.—成都：四川教育出版社，2002.6

ISBN 7-5408-3601-6

Ⅰ.函…　Ⅱ.张…　Ⅲ.泛函方程-基本知识　Ⅳ.0177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 048353 号

责任编辑：何　杨
装帧设计：王　凌
封面设计：刘　洪
四川教育出版社出版发行
(成都盐道街 3 号　邮政编码 610012)
四川大学树德电子工程公司照排
四川新华印刷厂印制
(成都人民北路 16 号　邮政编码 610081)
开本 880×1230　1/32
印张 6.875
插页 2
字数 135 千
2002 年 6 月第一版
2002 年 6 月第一次印刷
印数：1—3000 册
ISBN 7-5408-3601-6/G·3378
定价：12.00 元

*　*　*

本书若出现印装质量问题，请与工厂调换
电话：(028)83191287

序

在数学研究的许多领域包括微分方程、动力系统、泛函分析、代数学、几何学、拓扑学、概率论等都涉及函数方程问题，在计算机科学中迭代理论和方法也涉及函数方程问题，在航空技术、遥感技术、经济学理论、心理学理论等诸多方面也提出了许多函数方程模型．函数方程因此一直受到广泛关注，是当今数学研究的一个十分重要的课题．

对函数方程的研究在国际上非常活跃，以波兰 M.Kuczma、加拿大 J.Aczél、美国 A.Sklar、法国 J.Dhombres、德国 W.Benz、奥地利 L.Reich、丹麦 H.Stetkaer、匈牙利 Z.Daroczy、西班牙 J.GarciaRoig、日本 S.Haruki 等为代表的研究集体在近几十年里取得了丰硕的成果．一年一度的 ISFE（国际函数方程研讨会）集中展现了这一领域的成就而在世界上很有影响．

张伟年同志和他所带领的研究小组在函数方程领域长期奋斗，成绩斐然．这本书收集了他们多年苦心学习和研究所得，深入浅出，较为系统地介绍了函数方程的基本理论和最新成果，而且溶知识性和趣味性于一体，值得一读．相信这本书会有一个较大的读者面．不仅能够吸引从事高等教育和研究的学者，而且也能赢得广大中学师生的青睐．

中国科学院院士

张景中

2001 年 2 月 24 日于广州

前 言

据说唐太宗李世明曾给他的大臣们出过这样一道字谜："目加两点不是貝，貝减两点不是目"，要他们猜出两个字. 这着实难倒了大臣们一番. 其实，我们经常被这样那样的谜所难倒. 明天出行我们想知道天是否下雨，到了一个陌生的地方人们会探究这地下是否蕴藏着石油和矿物，当身体感到不适我们就想知道生了什么病，到了医院医生就会考虑什么药最恰当. 我们生活在一个充满谜的世界. 大千世界中有的东西是浮于表面为人所知的，而有的东西则潜伏在现象的背后需要人们去探索. 简单的二元一次方程、一元二次方程也是一道道谜，它们给出的是未知数和已知数之间的关系. 求解这些方程就是要发现我们表面上未知的数，就是在破解这一道道谜.

我们要寻找的未知量不仅仅是数的形式，还包括数的变化规律. 函数是描述事物变化发展规律的一种数学方式. 以函数为未知量的方程就是函数方程. 函数方程是一个古老的数学分支，自从有了函数的概念，人们就没有停止对它的追求. 函数方程也是当今十分活跃的研究领域，无论以迭代为主要运算形式的迭代方

程还是以微分为主要运算形式的微分方程都是以函数为未知量的方程，它们在实际应用中扮演着非常重要的角色．函数方程还历来都是中学奥林匹克数学竞赛的重要内容，很多初等数学概念和问题都会涉及到它．

任何一种方程都是一些运算方式将未知的和已知的联系在一起．在函数方程中起主要作用的运算是函数的复合或迭代．我们可以做一个实验：将二次函数$f(x)=x(1-x)$做一次又一次的迭代，即$f(f(x))$、$f(f(f(x)))$、……我们发现$f(x)$是一个较简单的函数，它的图像只有一个“峰”，而迭代下去，“峰”变得越来越多，单调性变得越来越复杂．如果说迭代使事物从简单走向复杂，那么通过分析和求解函数方程往往能够揭示复杂现象背后的机理．

我们想通过这本书向读者介绍函数方程的基本思想、基本方法和基本问题．本书共分八章，包括函数与方程、函数迭代、函数方程初等解法、函数方程相关问题、迭代根、迭代方程、线性与非线性函数方程、函数方程的稳定性等内容．本书力图能贴近读者，由浅入深，不仅使从事基础教育的数学教师、数学爱好者以及中学生能从中受益，而且能引导读者走向纵深，吸引更多的人投身到函数方程的理论研究和应用中去．我们也希望通过这本书抛砖引玉，与从事函数方程理论研究的同仁们加强交流，共图发展，为函数方程理论和应用做出更大的贡献．

函数方程是一个浩瀚的大海．本书尚不能全面收集函数方程的类型和解法，也未能对函数方程的理论和方法作出详尽阐述．关于函数方程，还有大量的知识需要我们去学习，还有大量的课题需要我们去研究，还有大量的疑问期盼着与读者一道去澄清．我们坚信，沿着这条路走下去，那些困扰我们的科学之谜必将一个个大白于天下．

在此，我们要深深地感谢张景中院士和杨路研究员，他们为

我国函数方程领域作出过开拓性的贡献，而且在学术上为我们指引了一条光明大道．我们要感谢国家自然科学基金会、教育部多年来对我们研究工作的大力支持，感谢四川大学的同仁对我们工作学习的帮助．

作　者

2001 年 2 月 22 日于四川大学

目录

第一章 函数与方程

第二章 迭代：从简单到复杂

第三章 初等解法

第四章 相关问题

第五章 迭代根

第六章 迭代方程

第七章 线性与非线性方程

第八章 稳定性问题

第一章
函数与方程

1. 描述变化

在现实生活中我们会遇到一些相对固定的量和一些不断变化着的量，例如行进中的火车所载货物的重量就是相对固定的量，我们称之为**常量**，而火车离开车站的距离却是变化着的量，我们称之为**变量**.我们的数学不仅要研究那些固定数值之间的运算，还要研究这些变量的变化趋势，不仅要研究“静止”的数学，还要研究“运动”的数学.我们要问气温是怎样变化的、股价是怎样涨跌的、人口是怎样增减的……

在同一个自然现象的发生过程中往往牵涉多个量的变化.这些变量不是孤立地在变化，而是相互联系相互依赖的.例如正方形面积随边长变化而变化，密闭容器中气体压力随温度变化而变化，一天中气温随时间变化而变化.因此，变量之间的关系也是数学研究的重要内容.

定义 1.1 设 x，y 是两个变量，当变量 x 在集合 X 中取定一个数值时，按照确定的规律 f，得到 Y 内惟一一个数值 y 与之相

对应,我们称 f 是 X 上的**函数**,记为 $f: X\to Y$. 函数 f 在 x 的值记为 $y=f(x)$. x 称为**自变量**, y 称为**因变量**, X 称为函数 f 的定义域,集合 $f(X)=\{y \mid y=f(x), x\in X\}$ 称为函数 f 的**值域**.

例 1.2 跳水选手从 10 米跳台跳水的动作被摄录下来用作技术分析. 选手起跳时刻记作 0 秒,而距离水面 h 时的时刻记作 t. 如果简单作为自由落体来看,我们可以得到这样的函数关系: $t=\sqrt{\dfrac{2(10-h)}{g}}$,其中 h 为自变量、t 为因变量、$g=9.8$ 米/秒^2. 这个函数的定义域为 $[0,10]$,值域为 $\left[0,\sqrt{\dfrac{20}{g}}\right]$.

如果对不同的 x 函数 f 都取同样的值 c,即 $f(x)\equiv c$,则称 f 为**常值函数**. 如果对每个 $x\in X$ 函数 f 的取值也是 x,即 $f(x)=x$,则称 f 为**恒同**(函数),简记为 id. 有的函数不能简单用一个式子来表达,例如符号函数 $y=\mathrm{sgn}(x)$,当 $x>0$ 时 $y=1$;当 $x=0$ 时 $y=0$;当 $x<0$ 时 $y=-1$. 显然,

$$y=\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1, & \forall x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & \forall x<0\end{cases}$$

如果函数在不同范围内用不同的式子表示,这样的函数称为**分段函数**. 对分段函数求值时,不同的点对应的值应代入其相应范围的式子中.

例 1.3 记关于 x 的函数 $y=1-2a-2a\cos x-2\sin^2 x$ 的最小值为 $f(a)$,

(1)试用 a 写出 $f(a)$ 的表达式,

(2)试决定能使 $f(a)=\dfrac{1}{2}$ 的 a 的值,并对此 a,求 y 的最大值.

〔解〕$y=1-2a-2a\cos x-2(1-\cos^2 x)$

$$=2(\cos x-\frac{a}{2})^2-\frac{1}{2}a^2-2a-1.$$

(1)当 $a>2$ 时,则当 $\cos x=1$ 时,y 取最小值 $1-4a$;当 $a<-2$ 时,则当 $\cos x=-1$ 时 y 取最小值 1;当 $-2\leqslant a\leqslant 2$ 时,则当 $\cos x=\frac{a}{2}$ 时 y 取最小值 $-\frac{1}{2}a^2-2a-1$.因此

$$f(a)=\begin{cases}1-4a, & \text{当 } a>2 \text{ 时},\\ -\frac{1}{2}a^2-2a-1, & \text{当 } -2\leqslant a\leqslant 2 \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } a<-2 \text{ 时}.\end{cases}$$

(2)注意到当 $a>2$ 时,$f(a)=1-4a<-7$;当 $a<-2$ 时,$f(a)=1$,故要使 $f(a)=\frac{1}{2}$,则 $a\in[-2,2]$且 $-\frac{1}{2}a^2-2a-1=\frac{1}{2}$.解得 $a=-1$.此时 $y=2(\cos x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$,因此当 $\cos x=1$ 时,y 取最大值 5.

2. 函数性质

函数往往呈现各种各样的基本性质,如单调性、凹凸性、奇偶性、有界性、周期性等.

(1)单调性

定义 2.1.1 设函数 $y=f(x)$的定义域为 X,若对 $\forall x_1,x_2\in X$,当 $x_1<x_2$ 时,有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2),(f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称函数 $y=f(x)$在 X 上**单调增加(减少)**或**单调递增(减)**.如果等号恒不成立,则称函数 $y=f(x)$在 X 上**严格单调增加(减少)**或**严格单调递增(减)**.见图 1.1、图 1.2.

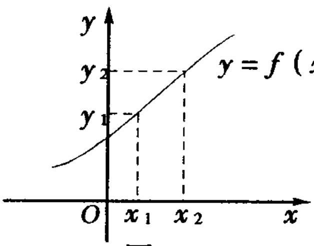


图 1.1

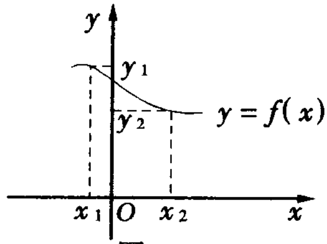


图 1.2

单调递增函数和单调递减函数统称为**单调函数**.

例如函数 $y=\frac{1}{2}x+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是严格单调递增的函数(见图 1.3), $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调函数,但在 $[0,+\infty)$ 上是严格单调递增的函数,在 $(-\infty,0]$ 上是严格单调递减的函数(见图 1.4).

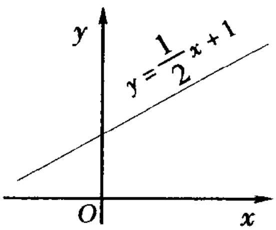


图 1.3

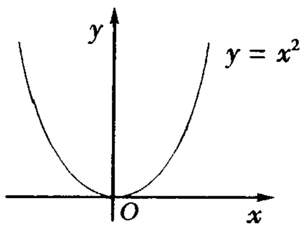


图 1.4

由上面的定义,我们很容易得到下面一些性质.

性质 2.1.2　设 $f(x)$ 在区间 I_1 和区间 I_2 上都是单调增加(减少),且 $I_1\cap I_2\neq\varnothing$,则 $f(x)$ 在 $I_1\cup I_2$ 上也单调增加(减少).

性质 2.1.3　若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域相同.当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都单调增加(减少)时,则 $f(x)+g(x)$ 也单调增加(减少);当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都恒大于 0,且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都单调增加(减少)时,则 $f(x)\cdot g(x)$ 也单调增加(减少).

例 2.1.4　证明 $y=f(n)=(1+\frac{1}{n})^n$, $n\in\mathbf{N}$,是单调增加的.

〔证明〕$f(n)=(1+\frac{1}{n})^n=1+\frac{n}{1!}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)-(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

$$f(n+1)=(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})$$

$$+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n-1})(1-\frac{2}{n+1})+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1}).$$

在这两个展式中,除前两项相同外,后者的每一项都大于前者的相应项,且后者最后还多了一数值为正的项,因此有

$$f(n+1)-f(n)>0,$$

故 $y=f(n)$是单调增加的.

(2)凹凸性

$f(x)=x^2$ 与 $g(x)=x^{1/2}$在$(0,+\infty)$上都是单调递增的,然而,如图 1.5 所示,两条曲线增长的方式却不同. $f(x)$向上弯而 $g(x)$向下弯. 在数学上我们习惯地称 $g(x)$是凹的而 $f(x)$是凸的. 准确地说,函数 $f(x)$称为是**凸(凹)**的,如果对定义域内任意两点 x_1 和 x_2 都有 $f(\frac{x_1+x_2}{2})\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$(或 $f(\frac{x_1+x_2}{2})\geqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$),也就是说,连接曲线上任意两点$(x_1,f(x_1))$、$(x_2,f(x_2))$间的弦之中点$(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2})$位于曲线上

相应点的上(下)面,见图 1.6.例如,函数 $y=\sin x$ 在$[0,\pi]$上是凹的,在$[\pi,2\pi]$上是凸的.

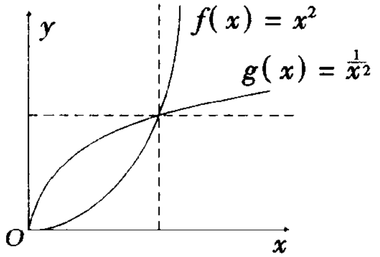


图 1.5

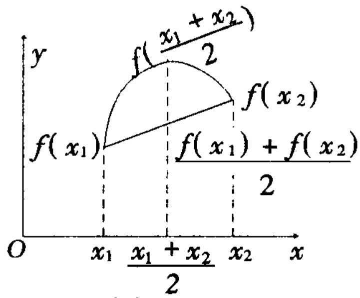


图 1.6

根据凸(或凹)函数的定义,容易证明它们具有如下性质:

性质 2.2.1　若 $f(x)$是区间 $I\subset\mathbf{R}$ 上的凸(凹)函数,则对任意固定点 $x_0\in I$,差商函数$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$在 I 上单调不减(单调不增).

性质 2.2.2　$f(x)$是区间 $I\subset\mathbf{R}$ 上的凸(凹)函数当且仅当对任意 $\alpha\in[0,1]$有

$$f[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2]\leqslant\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2),\ \forall x_1,x_2\in I$$

(或 $f[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2]\geqslant\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2),\ \forall x_1,x_2\in I$).

(3)奇偶性

定义 2.3.1　设函数 $y=f(x)$的定义域为 X,若对 $\forall x\in X$ 有 $-x\in X$ 且满足

$$f(-x)=f(x),(f(-x)=-f(x)),$$

则称函数 $y=f(x)$在 X 上为**偶(奇)函数**.

例如 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$上是一个奇函数,$y=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$上是一个偶函数.

奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称(见图 1.7).因此,在作图时,我们只需作出函数在 $x\geqslant0$ 的部分图

形,$x\leqslant 0$ 的部分可用对称性作出.

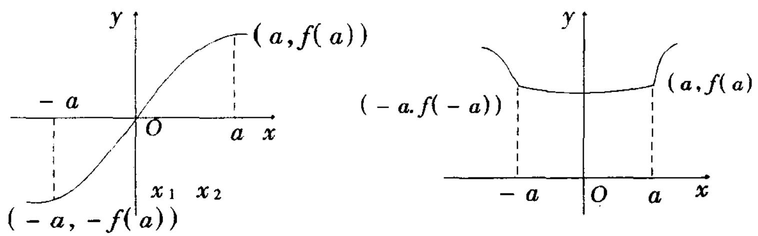


图 1.7

性质 2.3.2 两个偶函数的积、和、差是偶函数,两个奇函数的和、差是奇函数,两个奇函数的积是偶函数,一个奇数与一个偶函数的乘积是奇函数.

性质 2.3.3 若奇函数 $f(x)$在$[a,b]$上单调增加(减少),则 $f(x)$在$[-b,-a]$上也单调增加(减少);若偶函数 $f(x)$在$[a,b]$上单调增加(减少),则 $f(x)$在$[-b,-a]$上单调减少(增加).

性质 2.3.4 设 $f(x)$为定义在$(-\infty,+\infty)$内的任何函数,则 $F_1(x)\equiv f(x)+f(-x)$是偶函数,$F_2(x)\equiv f(x)-f(-x)$是奇函数.

例 2.3.5 讨论符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & \text{当 } x>0 \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时}\\ -1, & \text{当 } x<0 \text{ 时}\end{cases}$$

的奇偶性.

〔解〕由已知可得 $y=\operatorname{sgn}x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,

(1)若 $x>0$,则 $-x<0$,故 $f(-x)=-1=-f(x)$,

(2)若 $x=0$,则 $-x=0$,故 $f(-x)=0=-f(x)$,

(3)若 $x<0$,则 $-x>0$,故 $f(-x)=1=-f(x)$.