

科學圖書大庫

函數與圖形探趣

譯者 嚴夢輝

徐氏基金會出版

4
8

科學圖書大庫

函數與圖形探趣

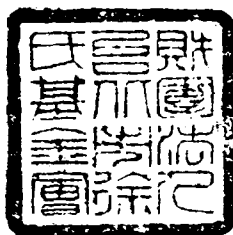
譯者 嚴夢輝

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會
監修人 徐銘信 發行人 王洪鎧

科學圖書大庫

版權所有



不許翻印

中華民國六十九年四月十日六版

函數與圖形探趣

基本定價 1.20

譯者 嚴夢輝 空軍電子學校教官

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(67)局版臺業字第1810號

出版者 臺北市徐氏基金會 臺北市郵政信箱53-2號 電話 7813686 號
發行者 臺北市徐氏基金會 郵政劃撥賬戶第 15795 號
承印者 大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號 電話 9719739

譯者絮語

雖然，這是一本薄薄的小冊子，但是它的趣味性之濃，啓發性之強，創造性之高，卻大大地出於我們的意料之外。它給我們帶來了一種新鮮的感覺，一種美妙的意境和一種深遠的啓示。

這本小冊子，就是當今歐洲鼎鼎大名的數學家 I. M. Gelfand 教授所主編的函授教材之一。1964 年，他在「未來科學家培養計劃」下，創辦了一所別開生面的數學函授學校，入學對象是初中三年級稟賦優異的少年學生，但必須通過極為嚴格的考試和極為劇烈的競爭。例如 1968 年在數十萬優秀的報考者當中，只錄取了八千名。函授學校給學生的訓練，不過是課外科學活動之一，並不影響正常課業。天才學生在二年內便更完成函授教育；他們的數學程度，不但媲美大學水準，並且對數學已有深入的了解，也有領悟新觀念新方法的能力，進而養成獨立研究的習慣。

芝加哥大學數學系有一個特別組織，稱爲「歐洲最近數學著作調查小組」。他們認爲這套函授教材，除了給初中高年級學生閱讀之外，對於數學教師，大專高中

學生都有極大的參考價值。函授教材之一的這本小冊子，就是該小組接受美國國家科學基金會的資助，由 Thomas Walsh 和 Randell Magee 兩位先生編譯成英文的。

歐美各國教育家，認為科學教育如同藝術教育一樣，要特別重視幼苗的發掘和培養，譯者頗有同感；而優良的少年課外讀物，尤應大力提倡。所以不自量力的把這本小冊子從英譯本轉譯過來。爲了引起少年讀者的閱讀興趣，譯文力求避免一般教科書嚴肅沉悶的氣氛，盡量使用淺顯通俗的文字，甚至有些數學名詞和用語，也大膽地把它們口語化了，希望讀起來比較輕鬆些，生動些，也親切些。

蒙徐氏基金會不棄，約譯這本小冊子，並迅速出版，謹向出版部的先生們致謝。譯者並以十二萬分的誠意，歡迎各界人士以及青少年讀者朋友們的批評和指教！

於若谷齋

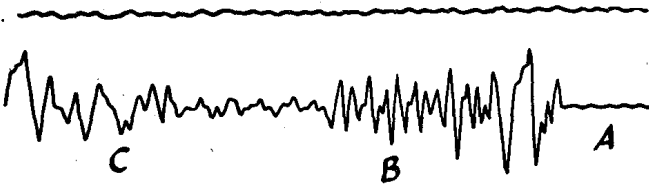
59年6月3日

於若谷齋

目 錄

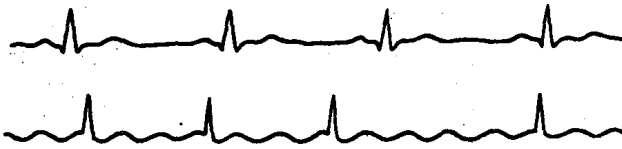
譯者絮語	III
開宗明義	1
第一章 一些例子	9
第二章 線性函數	22
第三章 函數 $y = x $	26
第四章 二次三項式	39
第五章 線性分式函數	55
第六章 冪函數	66
第七章 有理函數	80
第八章 一些獨立解答的問題	89
答案及提示	103
(附有符號⊕的問題和練習)	

開宗明義



第1圖

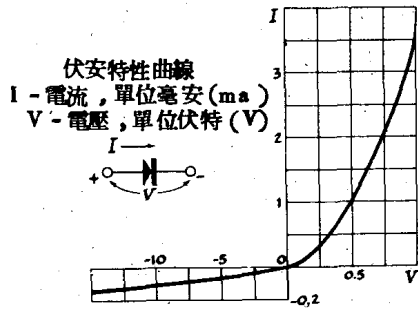
在第1圖裡面，讀者瞧見的兩根曲線，是由地震計描繪下來的痕跡；地震計是一種記錄地殼變動的儀器。頂上一根，記錄時剛好大地一片靜寂，安然無恙；底下一根，是一次地震發生的訊號。



第2圖

第2圖是兩張心電圖。上面一張表示正常的心跳；下面一張是從一個心臟病人那兒記錄下來的。

第3圖表示一種半導元素的所謂特性曲線，也就是說，它把電流強度和電壓之間的關係顯露了出來。



第3圖

地震學家分析一張地震圖，便能找出什麼時候什麼地點發生地震了，並且可以確定震動的強度和震動的情況。醫生用心電圖來檢查病人，能夠判斷心臟活動的毛病出在那裡；做了心電圖的判讀，對於病情的正確診斷，大有幫助。一根半導元素的特性曲線，可使無線電工程師在裝置設計上選擇最有利的條件。

所有這些各行各業的人，他們研究某些函數時，都要用上諸如此類的函數圖形。

可是，函數是什麼東西呢？函數圖形又是什麼玩意兒？

在沒有說到函數的嚴密定義之前，讓我們先談一點函數的概念吧。用描述性的說法，一個函數的

成立是這樣的：有某一種數量，數學家管它叫變數，常用字母 x 代表它，當我們給 x 每一個值時，便有另外一種數量 y 的一個值來對應它，這種數量 y 就管它叫函數。

舉例來說，一次地震發生時，地球表面位移的大小，在每一片刻時間都有一定的值，也就是位移的多少是時間的函數。在半導元素中的電流強度是電壓的函數，因為對於每一個電壓值，都有一個一定的電流強度值來對應。

可以做這種說法的例子很多：球的體積是半徑的函數；垂直向上拋擲的石塊，它上昇的高度是初速的函數；例子之多，真是不勝枚舉。

現在我們言歸正傳，回到嚴密的定義上面來。說到數量 y 是數量 x 的函數，首先要指出可以取用的 x 值。在變數 x 裡面，這些「許可的」值，管它叫可取值 (admissible values)；由數量 x 或變數 x 中全部可取值構成的集合，管它叫函數 y 的定義域 (domain of definition)。

譬如我們說球的體積 V 是半徑 R 的函數，那麼 $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ 這個函數的定義域，就是所有大於零的數；因為球半徑 R 的值，只許用正數的緣故。

不管什麼時候，只要一提到函數，就必須指出它的定義域。

定義(一)

如果：(1) 可取的 x 值已經指定，就是函數的定義域已經知道；(2) 對於 x 的每一個可取值，恰好有變數 y 的一個值來對應；那麼我們說 y 是變數 x 的函數 (function)。

有人把「變數 y 是變數 x 的函數」這句話換個樣子，寫做

$$y = f(x).$$

(讀法：「 y 等於 x 的 f 。」)

當 x 等於 a 時，用 $f(a)$ 的記法表示函數 $f(x)$ 的數值。舉個例子來看，如果

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1},$$

那麼

$$f(2) = \frac{1}{2^2 + 1} = \frac{1}{5},$$

$$f(1) = \frac{1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2},$$

$$f(0) = \frac{1}{0^2 + 1} = 1, \text{ 等等。}$$

對於 x 的每一個值，要找出 y 的對應值，應該有一個法則才行；法則的表達可用各種不同的方式，並不是一成不變，墨守成規，非要比着葫蘆畫個瓢不可。如果告訴讀者 y 是 x 的函數，那麼只消查對下面兩件事就行了：(1) 已經說出定義域，就是可以假定的 x 值都已經指明；(2) 已經說出一個法則，根據這一法則，對於 x 的每一個可取值，都有一個 y 的唯一值來相配，什麼樣兒的法則才能夠如此呢？

且讓我們舉幾個例子來談一談吧。

1. 假定有人對我們說 x 是任何一個實數， y 可用

$$y = x^2$$

求出來。這便是用一個公式 $y = x^2$ 來表達函數的方式。

一個法則也可以寫成條文的樣子。

2. 下面是表達函數 y 的一種方式：如果 x 是一個正數，那麼 y 等於 1 ；如果 x 是一個負數，那麼 y 等於 -1 ；

如果 x 等於零，那麼 y 等於零。

我們用條文式的法則，另外再舉一個函數的例子。

3. 每個數 x ，都可寫做 $x = y + \alpha$ 這樣一個式子，式子裡面的 α ，是小於一而不是負的數， y 是整數。既然每個數 x 都有一個唯一的數 y 來對應，顯然 y 是 x 的函數了。這一函數，它的定義域是整個實數軸；它有一個名稱，叫做「 x 的整數部分」，用這樣的式子來表示它：

$$y = [x].$$

例如：

$$[3.53] = 3, [4] = 4, [0.3] = 0, [-0.3] = -1.$$

在以後的練習裡面，我們將要用上這一函數。

4. 有一個函數 $y = f(x)$ ，是用公式

$$y = \frac{\sqrt{x+3}}{x-5}$$

來給它規範的（下定義）。讓我們研究一下，什麼定義域才算合理？

如果用公式來表達一個函數，通常我們要考慮的，是它的自然定義域 (Natural domain of definition)。所謂自然定義域，就是凡能使公式中所規定的運算發生效果的那些數，統統把它們取出來所構成的一個集合。這樣說來，我們這個函數的定義域是不含 5 這個數的（因為 $x = 5$ 時，分式的分母便要「化為烏有」了），同時也不含小於 -3 的 x 值（因為 $x < -3$ 時，根號下面的式子是負的）。因此，函數

$$y = \frac{\sqrt{x+3}}{x-5}$$

的定義域，全部所包括的數都滿足下面二項關係：

$$x \geq -3, \quad x \neq 5.$$

一個函數可以借圖形的幫助，用幾何方式來代表它。構作某一函數的圖形時，我們要考慮 x 的某一可取值跟 y 的對應值。例如，假定 x 的值是一個數 a ， y 的對應值便是一個數 $b = f(a)$ 。 a 跟 b 這一「數對」，我們用平面中的一點來代表，坐標是 (a, b) 。對於 x 的所有可取值，都有這種點可讓我們標繪出來。用這種方法所得到的點集合，便是函數的圖形 (graph)。

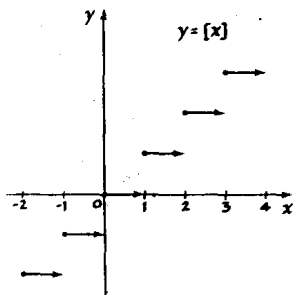
定義(二)

函數圖形就是點集合，這些點的橫標是變數 x 的可取值，縱標是函數 y 的對應值。

例如，第 4 圖描繪出來的就是函數

$$y = [x]$$

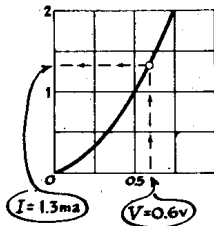
的圖形。



第 4 圖

這個圖形構成了一個直線線段的無限集合。箭頭表示這些線段右邊的端點不屬於這個圖形（但是左邊的端點都屬於這個圖形，所以畫上黑圈圈）。

圖形可以當做規範函數的法則，例如，從某一種半導元素的特性曲線



第 5 圖

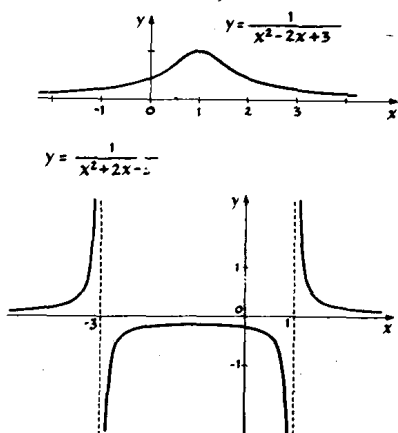
來決定函數是可能的：請看第 5 圖，如果變數 V 等於 0.6 伏特，那麼函數 I 便等於 1.3 毫安。

用圖形來代表函數的確方便，因為只要仔細瞧一瞧圖形，馬上可以區別兩個函數彼此有什麼不同。

請讀者再看一下第 1 圖底下那根曲線。憑這一圖形，就算是最外行的人，也會認出地震的訊號（ B 和 C 兩部分）。更仔細地察看一下，當然又可發現 B 和 C 這兩部分的波動，各有不同的特性（地震學家必會指出 B 的部分代表所謂 P 型波動，這種波動的進行，是深入地殼的；而 C 的部分，代表一種只在地球表層進行的 S 型波動）。

把 B 和 C 兩部分的一些值，並排寫成兩個表，試由這兩個表，區別兩段曲線的不同。（我們不能列出一個長表，把整根曲線的值都包括進去，因為這樣做法，可能要寫滿整整的一頁。在這一頁邊上，讀者所看到的兩個表，只是 B 和 C 兩段曲線的一小部分。）

P 型波動 (時間間隔 : 0.2 秒)	S 型波動 (時間間隔 : 0.4 秒)
0.1	0.2
0.1	0.5
-1.6	2.5
-1.7	4.9
-2.4	7.1
-3.0	6.1
-4.5	3.8
-3.8	0.4
-2.9	0.2
-1.1	0.7
0.8	1.5
3.3	2.5
5.1	3.2
3.7	2.8
0.0	0.4
-2.0	-2.2
-4.4	-3.3
-5.8	-4.5
-3.8	-4.8
-1.6	-4.8
	-4.8
	-3.7
	-3.5
	-4.4
	-6.6



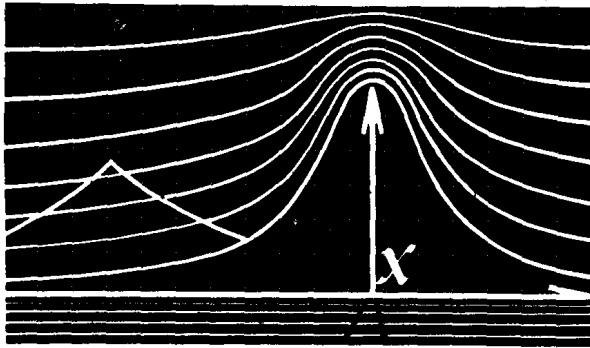
第 6 圖

第 6 圖表示由非常相像的公式來規範的兩個函數圖形，這兩個公式是

$$y = \frac{1}{x^2 - 2x + 3} \quad \text{及} \quad y = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$$

這兩個函數本質上的差別，當然也可以從公式觀察出來。但是，如果瞧一瞧它們的圖形，這種差別便立刻原形畢露了。

不管什麼時候，要說明一個函數的一般性質，以及要找出一個函數的顯著特徵，正是「人心不同，各如其面」，應該端詳一番它的外表，一個圖形便少不了啦。所以，一位工程師或科學家一旦找到他所傾心的函數，不管是寫成公式也好，描成圖表也好，他都要抓起一支鉛筆，把這個函數的圖形勾畫出來，看看它到底是怎樣的「德行」，什麼樣兒的「長相」。



第一章

一些例子

①

函數圖形的定義，如果照字義解釋，那麼要構作某一函數的圖形，必須把變數跟函數的對應值，毫無遺漏地全部配成對兒，然後用它們的坐標把所有的點一一描繪出來。但是，在極大多數的情形，這個辦法實際上是行不通的，因為這種點太多了，多得無窮無盡，你畫一輩子也畫不完。所以，只好用一根光滑曲線把屬於圖形的少數幾點連起來，這是一種退而求其次的辦法。

現在我們用這個辦法，來試作函數

$$y = \frac{1}{1+x^2} \quad (1)$$

的圖形。

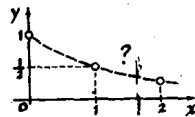
先選擇變數的一些值，求出函數的對應值，把它們寫下來列成一個表（請看第1表）。我們再用計算所得的坐標，把代表它們的點描好，暫時用虛線連一連（第1圖）。

現在我們來查證一下，在圖形上兩點之間的那一段曲線，看看畫得對不對。

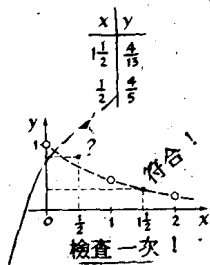
$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

x	y
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{10}$

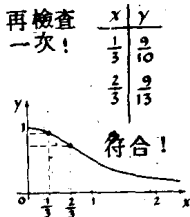
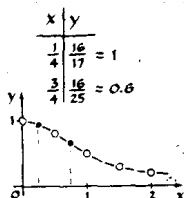
第1表



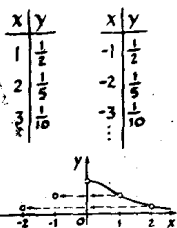
第1圖



第 2 圖



第 3 圖



第 4 圖

爲了達到查證的目的，我們在變數裡面取一個中間值，比方說，取 $x = 1\frac{1}{2}$ ，再計算函數的對應值，得 $y = \frac{4}{13}$ 。這一點 $(1\frac{1}{2}, \frac{4}{13})$ 正好不偏不倚地落在我們的曲線上（第 2 圖），所以這一段曲線我們畫得十分正確。

現在用 $x = \frac{1}{2}$ 試試看。求得 $y = \frac{4}{5}$ ，對應點跑到我們所畫曲線之外的上方去了（第 2 圖）。意思是說，在 $x = 0$ 和 $x = 1$ 之間，函數圖形並不如我們想像那樣地走法。在這段可疑部分，再取 $x = \frac{1}{4}$ 和 $x = \frac{3}{4}$ 兩個值。把這些點統統連起來，我們得到一根比較正確的曲線，用第 3 圖來代表它。取 $(\frac{1}{3}, \frac{9}{10})$ 和 $(\frac{2}{3}, \frac{9}{13})$ 兩點再做一次檢查，這兩點剛好在曲線上。

②

構作圖形左邊的一半，必須對變數的負值另外填一個表，這是輕而易舉的事。例如，

在 $x = 2$ 時，我們得 $y = \frac{1}{2^2+1} = \frac{1}{5}$ ，

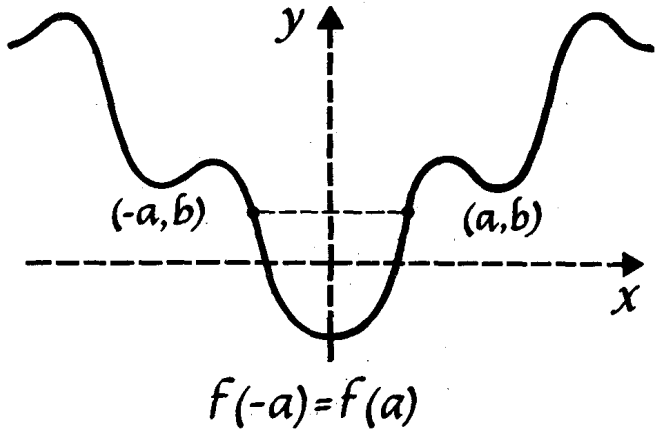
在 $x = -2$ 時，我們得 $y = \frac{1}{(-2)^2+1} = \frac{1}{5}$ 。

意思是說這個圖形同時包含 $(2, \frac{1}{5})$ 和 $(-2, \frac{1}{5})$ 兩點，以 y 軸來說，後一點跟前一點對稱。

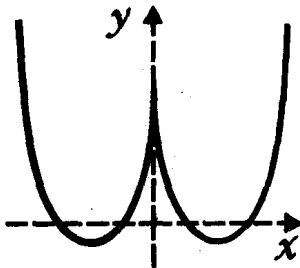
在一般情形，如果 (a, b) 點在圖形的右半邊，那麼它的左半邊便有一點 $(-a, b)$ ，跟 (a, b) 點以 y 軸成對稱。所以，對於 x 的負值，要獲得函數(1)對應圖形的左邊部分，必須以 y 軸當做鏡面，把圖形的右半邊反射進去。

第 5 圖表示這個圖形的全貌。

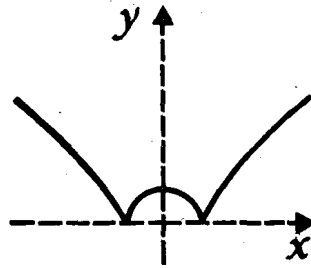
如果我們性子太急，忽忽忙忙地用最初的略圖（第 1 圖和第 2 圖），來構作對於負 x 值的圖形部分，那麼所得的結果，在 $x = 0$ 的處方便有一個「尖角」（Kink）。正確的圖形是沒有這種尖角



某一函數對於變數中絕對值相等而符號相反的任何兩個值（就是 a 和 $-a$ 二值），如果函數的對應值相等，那麼這一函數便管它叫偶函數（even function）。任何偶函數，都有一個對 y 軸成對稱的圖形。



$$y = x^2 - 3|x| + 2$$



$$y = \sqrt{|x^2 - 1|}$$