

273

0174.543

L 86(3)

复变函数

路见可 钟寿国 刘士强 编著

(修订版)

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

复变函数/路见可,钟寿国,刘士强编著.—3版(修订版)
—武汉:武汉大学出版社,2001.9
ISBN 7-307-03374-7

I. 复… II. ①路… ②钟… ③刘… III. 复变函数 IV.
O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 069389 号

责任编辑:顾素萍 责任校对:黄添生 版式设计:支 笛

出版:武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)
(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn 网址:www.wdp.whu.edu.cn)
发行:新华书店湖北发行所
印刷:武汉市珞南印刷厂
开本:850×1168 1/32 印张:9 字数:230千字
版次:1993年12月第1版 2001年9月第3版
2001年9月第3版第1次印刷
ISBN 7-307-03374-7/O·245 定价:14.50元

版权所有,不得翻印;凡购买我社的图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题者,请与当地图书销售部门联系调换。

目 录

第一章 复数和复函数	1
§ 1.1 复数	1
1. 复数域	1
2. 复数的几何表示	2
3. 球极投影、复球面、无穷远点、扩充复平面	6
习题 1.1	8
§ 1.2 复变函数	9
1. 复变函数的概念	9
2. 复变函数的极限与连续性	10
3. 同伦概念和区域的连通性	11
4. 辐角函数	15
习题 1.2	20
§ 1.3 复数列和复级数	22
1. 复数列和复数项级数	22
2. 复函数列和复函数项级数	23
习题 1.3	24
第一章习题	24
第二章 解析函数基础	26
§ 2.1 解析函数	26
1. 导数及其几何意义	26
2. 解析函数概念	30
习题 2.1	32
§ 2.2 一些初等解析函数	33
1. 多项式和有理函数	33

2.	指数函数	33
3.	三角函数和双曲函数	35
4.	对数函数	37
5.	幂函数和根式函数	40
6.	初等多值函数分枝问题	44
7.	有理函数的对数	48
8.	有理函数的方根	51
9.	反三角函数和反双曲函数	54
	习题 2.2	55
	第二章习题	57
第三章	复积分	59
§ 3.1	复积分概念	59
1.	复积分的定义及计算	59
2.	复积分的基本性质	62
	习题 3.1	63
§ 3.2	基本定理	64
1.	柯西积分定理	65
2.	原函数	71
	习题 3.2	75
§ 3.3	基本公式	76
1.	柯西积分公式	76
2.	柯西导数公式	78
3.	柯西不等式	81
4.	莫瑞勒(Morera)定理	81
	习题 3.3	82
§ 3.4	反常复积分	83
1.	反常复积分的定义	83
2.	柯西主值积分	85
3.	高阶奇异积分	88
	习题 3.4	91

第三章习题	91
第四章 解析函数的级数理论	93
§ 4.1 一般理论	93
1. 复函数项级数的逐项积分和逐项求导	93
2. 幂级数及其和函数	94
习题 4.1	97
§ 4.2 泰勒展式及惟一性定理	98
1. 解析函数的泰勒展式	98
2. 解析函数的惟一性	105
3. 最大模原理	107
习题 4.2	109
§ 4.3 罗朗展式及孤立奇点	111
1. 解析函数的罗朗展式	112
2. 求罗朗展式的方法	114
3. 解析函数的孤立奇点	118
4. 整函数和亚纯函数	125
习题 4.3	127
第四章习题	129
第五章 留数理论	131
§ 5.1 留数及其计算	131
1. 留数概念	132
2. 无穷远点处的留数	135
3. 边界点的情形	137
习题 5.1	139
§ 5.2 留数定理及其推广	140
1. 留数定理	140
2. 推广的留数定理	143
习题 5.2	147

§ 5.3	应用于积分计算	147
1.	单值解析函数的应用	148
2.	多值解析函数的应用	153
3.	高阶奇异积分的应用	161
	习题 5.3	161
§ 5.4	辐角原理和儒歇(Rouché)定理	163
1.	辐角原理	163
2.	儒歇定理	165
	习题 5.4	167
	第五章习题	168
第六章	解析开拓	171
§ 6.1	解析开拓的概念和方法	171
1.	基本概念	171
2.	透弧开拓	172
3.	幂级数开拓	178
	习题 6.1	181
§ 6.2	完全解析函数及单值性定理	183
1.	完全解析函数和黎曼面	183
2.	单值性定理	185
	习题 6.2	190
	第六章习题	190
第七章	共形映照	191
§ 7.1	分式线性映照	191
1.	共形性	192
2.	映照群、不动点	194
3.	三对对应点决定分式线性映照	194
4.	保圆周及侧	195
5.	保对称点	198

6. 三个特殊的分式线性映照	200
习题 7.1	204
§ 7.2 共形映照的一般理论	205
1. 单叶解析函数的性质	205
2. 黎曼映照定理	208
3. 边界对应定理	211
习题 7.2	213
§ 7.3 几个初等函数的映照	214
1. 指数与对数函数映照	214
2. 幂函数映照	216
3. 儒可夫斯基(Жуковский)函数映照	218
4. 余弦函数映照	220
习题 7.3	222
§ 7.4 综合实例	223
1. 已知函数求映照区域	223
2. 已知对应区域求映照函数	224
习题 7.4	235
第七章习题	237

第八章 调和函数

§ 8.1 调和函数的概念及其性质	240
1. 调和函数与解析函数的关系	240
2. 极值原理	243
3. 波阿松(Poisson)公式及均值公式	244
习题 8.1	246
§ 8.2 狄里克来(Dirichlet)问题	247
1. 一般狄里克来问题	247
2. 波阿松积分的性质	248
3. 圆域上的狄里克来问题	250
4. 上半平面的狄里克来问题	250
习题 8.2	252

§ 8. 3 许瓦兹(Schwarz)-克里斯多非(Christoffel)	
公式	252
1. 一般公式	252
2. 例	256
习题 8. 3	260
第八章习题	261

第九章 解析函数在平面场中的应用..... 263

§ 9. 1 解析函数的流体力学意义	263
1. 复环流	264
2. 复势	265
3. 源(汇)点、涡点	267
4. 偶极子	268
习题 9. 1	269
§ 9. 2 柱面绕流与机翼升力计算	269
1. 圆盘绕流	270
2. 一般截面绕流	272
3. 机翼升力计算	273
习题 9. 2	275

第一章 复数和复函数

§ 1.1 复数

1. 复数域

读者已熟悉了实数域 \mathbf{R} . 在历史上, 求解最简单的二次方程 $x^2+1=0$ 便遇到了困难, 它在 \mathbf{R} 中显然无根, 因此就想象有一种新的数, $i=\sqrt{-1}$ 为其根, 因此 $-i$ 也是它的根. 这样, $x^2+1=0$ 就有两个根 $\pm i$. 如果允许 i 参加四则运算, 并服从实数的通常运算法则, 就像一个代数文字那样, 但遇到 i^2 则可改为 -1 . 这样, 如读者所知, 一般的二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 也就总有两个根. 然而在很长时间内, 人们怀疑是否真的有这种数存在, 因而把 i 起名为“虚数”, 意即假想的数. 直到后来发现它有非常现实的意义(见下段), 并依靠它可以解决不少过去不能解决的问题, 还发现它有十分广泛的应用, 才得到普遍的承认.

下面我们从逻辑上定义由实数域 \mathbf{R} 添加 i 后生成的复数域 \mathbf{C} . 在实数域 \mathbf{R} 上面, 添加一个新的形式的数 i , 此数称为虚数单位, 并允许它和实数一起可以进行加法、减法、乘法的运算($1 \times i$ 仍记为 i , $(-1) \times i$ 记为 $-i$, $0 \times i$ 记为 0), 并假定它们仍服从交换律、结合律、分配律; 此外还规定 $i \cdot i = i^2 = -1$ (可以证明, 这样一些规定是和谐的, 即不会导致矛盾). 于是, 这样的数一般可写成 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$), 称为复数. 称 $\bar{z} = a - bi$ 为 z 的共轭复数.

我们有

$$(a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (b \pm d)i,$$

$$(a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i,$$

当且仅当 $a=b=0$ 时,才称 $a+bi=0$;故 $a+bi \neq 0$ 就意味着 a, b 中至少有一个不为零. 除法也就可自然地作出如下:

$$\begin{aligned} \frac{c+di}{a+bi} &= \frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} \\ &= \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + \frac{ad-bc}{a^2+b^2}i \quad (a+bi \neq 0). \end{aligned}$$

换句话说,只要在上式左端分子、分母中各乘以分母($\neq 0$)的共轭复数便可计算除法. 这样,复数的四则运算可完全遵循实数的类似运算进行.

所有复数的集合按照以上运算法则并遵从 $i^2 = -1$ 的规则,构成一域,称为**复数域**,并记作 C .

复数 $z = a+bi$ 中的 a 称为 z 的实部,记作 $\operatorname{Re} z$; b 称为 z 的虚部,记作 $\operatorname{Im} z$ (两复数当且仅当它们的实、虚部分别相等时才称为相等). 当 $b=0$ 时 $z = a+0i = a$ 就是实数;当 $a=0$ 时 $z = a+bi = bi$ 称为**纯虚数**. 注意 $0 = 0+0i$ 既是实数,也是纯虚数^①. 因为 $z = a+bi$ 的共轭复数 $\bar{z} = a-bi$,显然 $\overline{\bar{z}} = z$,即 z 和 \bar{z} 互为共轭复数. 此外,我们有明显的等式:

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i};$$

当 $\operatorname{Im} z = 0$ 即 $z = \bar{z}$ 时 z 是实数,而当 $\operatorname{Re} z = 0$ 即 $z = -\bar{z}$ 时 z 是纯虚数.

我们熟知,实数间有大小的区别,但复数间不能比较大小,这是复数域和实数域的一个重要不同,需特别注意.

2. 复数的几何表示

在平面解析几何中,取定一直角坐标系 Oxy 后,可用一有序

^① 有的作者把 $z = bi$ 仅当 $b \neq 0$ 时才称作纯虚数;这样,0 不算作纯虚数. 但这样做是不方便的,我们不采用这种说法.

实数对 (a, b) 表示平面中任何一点 P , 称 (a, b) 为 P 的坐标, a 为横坐标, b 为纵坐标 (图 1-1).

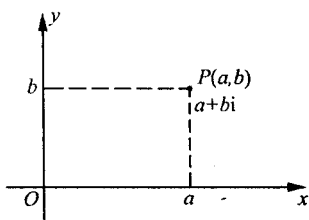


图 1-1

如果我们用复数 $a+bi$ 来表示 P 的位置显然也是可以的, 也就是说, 取定一直角坐标系 Oxy 后, 就可建立复数 $a+bi$ 和点 $P(a, b)$ 之间的一个一一对应的关系. 这时我们称这个取定直角坐标系的平面为复平面, 仍用 C 表示; $a+bi$ 称为 P 点的复坐标或复数表示. 这是复数的一种几何表示法. x 轴上的点的复坐标是实数, 因此 x 轴也称为实轴; y 轴上点的复坐标是纯虚数, 因此 y 轴也称为虚轴.

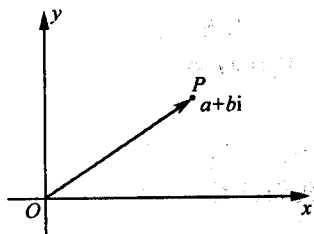


图 1-2

复数还可用来表示平面向量. 如图 1-2, 由复数 $a+bi$ 决定了点 P (如前), 因此亦决定了一向量 \vec{OP} ; 反之向量 \vec{OP} 决定一复数: P 的复坐标. 当然, 复数 0 和零向量相对应. 向量的这种复数表示也很有用. 例如, 向量的加减法和复数的加减法是等价的. 即, 设

$\vec{OP} = a+bi$, $\vec{OQ} = c+di$,
按平行四边形规则, 如 $\vec{OR} = \vec{OP} + \vec{OQ}$, 正好有

$$\vec{OR} = (a+c) + (b+d)i$$

(图 1-3). 这在几何上立即可以证明.

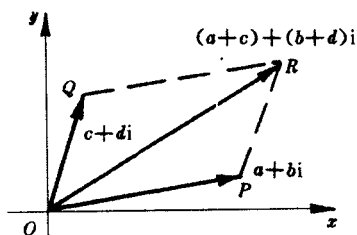


图 1-3

向量的数乘仍与复数和实数的乘法一致: 如 $\vec{OP} = a+bi$,

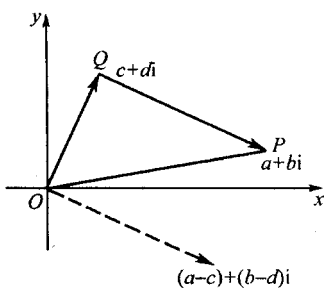


图 1-4

λ 为实数, 则

$$\lambda \overrightarrow{OP} = \lambda(a+bi) = \lambda a + \lambda bi.$$

但向量的内积和外积就和复数的乘法间没有自然的一致性了, 这也是应引起注意的.

还应注意, 若 P 和 Q 的复坐标分别为 $a+bi$ 和 $c+di$, 它们分别表示向量 \overrightarrow{OP} 和 \overrightarrow{OQ} , 则

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{QP}$$

(图 1-4); 另一方面, \overrightarrow{QP} 作为

一自由向量, 当把起点 Q 移到原点 O 时, 它所对应的复数正好是

$$(a-c) + (b-d)i = (a+bi) - (c+di).$$

我们不妨仍记 $\overrightarrow{QP} = (a-c) + (b-d)i$. 这在以后的计算中也是非常有用的. 若称 $\sqrt{a^2+b^2}$ 为复数 $z=a+bi$ 的模或绝对值, 记为 $|z|$, 则由平行四边形法则, 容易导出复数加减法的重要三角不等式. 即若 z_1, z_2 都是复数, 则

$$|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1-z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

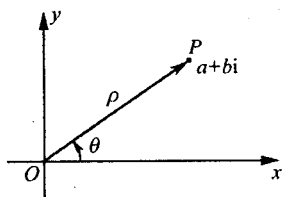


图 1-5

我们已看到复数 $a+bi$ 可看作向量 \overrightarrow{OP} , 另一方面, 向量 \overrightarrow{OP} 可由其大小和方向决定: \overrightarrow{OP} 的大小为 $|OP| = \rho = \sqrt{a^2+b^2}$, 其方向可由 \overrightarrow{OP} 的倾角 θ 来决定 (θ 可加减 2π 的整数倍).^① 这也相当于 P 点的极坐标表示 (把 O 点作为极点, x 轴作为极轴) (图 1-5). 这

样, 对于复数 $a+bi$ 来说, 它也可由 ρ, θ 决定, 其中 ρ 为复数 $a+bi$ 的绝对值, 也可写为 $|a+bi|$, 而 θ (可加减 2π 的整数倍) 称为它的

① 注意, 零向量没有确定的方向或倾角.

辐角, 记为 $\text{Arg}(a+bi)$. 亦即, 如果 $z=a+bi$, 则

$$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2},$$

$$\text{Arg } z = \text{Arg}(a+bi) = \theta + 2k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

复数的这种表示法, 称为极坐标表示. 由于 k 可以取任何整数, 因此 $\text{Arg } z$ 是多值的.

当然, 以上的讨论已默认了 $z \neq 0$. 若 $z=0$, 当然有 $|z|=0$, 但 $\text{Arg } 0$ 没有意义.

注意, $|z_1-z_2|$ 恰好是 z_1, z_2 之间的距离, 而 $\text{Arg}(z_2-z_1)$ 是从 z_1 到 z_2 的向量的倾角.

由极坐标和直角坐标的关系

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta,$$

立即可知一个复数 $x+yi$ 也可写成 $x+yi = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$. 复数的这种表示称为三角表示.

利用复数的三角表示法可以讨论复数之积、商、幂、方根的运算法则. 例如, 如果

$$x_1 + y_1 i = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1),$$

$$x_2 + y_2 i = \rho_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2),$$

则有

$$(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

由此可见, 两复数相乘(除), 其乘积(商)的模为模的乘积(商), 而乘积(商)的辐角为辐角的和(差)^①(都可相差 2π 的整数倍). 同理, 如果

$$x + yi = \rho(\cos \theta + i \sin \theta),$$

则当 n 为正整数时, 有

$$(x + yi)^n = \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

而把开方看作乘方的逆运算时, 有

① 两复数相除时, 需分母不为零.

$$(x+yi)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{2k\pi + \theta}{n} + i \sin \frac{2k\pi + \theta}{n} \right),$$

$$k=0, 1, 2, \dots, n-1.$$

这就是我们熟知的复数 $x+yi$ 的 n 次方根, 其中 $\sqrt[n]{\rho}$ 为算术根. ①

由本段的讨论可以看出, 复数确有非常现实的意义, 而并不是虚无缥缈的了. 我们仍沿用“虚数”这一字眼, 纯粹只是历史的原因罢了.

由于本书讨论的对象是复数, 因此以后讲到的数如无特别声明, 一概指的是复数.

思 考 题

1. 解释集合等式

$$\text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2,$$

$$\text{Arg}(z_1/z_2) = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2$$

的意义, 其中 $z_1, z_2 \neq 0$.

2. 说明作为集合等式 $\text{Arg } z^2 = 2\text{Arg } z$ 是错误的.

3. 球极投影、复球面、无穷远点、扩充复平面

历史上, 为了绘制地图的需要, 有一个球极投影法, 使球面上的点和平面上的点之间建立一种对应. 由于平面上的点可用复数表示, 因此球面上的点也可用复数表示, 就构成所谓复球面. 具体说明如下.

设想一球面 S , 不妨认为是中心在原点的单位球面, 设 xOy 平面为 π (图 1-6). 在球面上任取一点 P , 从“北极”点 N 引一射线通

① 若强调算术根, 有时写为 $\sqrt[+]{\rho}$. 例如 $\sqrt[+]{1} = 1$, 而

$$\sqrt[+]{1} = \sqrt[+]{1} \left(\cos \frac{2k\pi}{2} + i \sin \frac{2k\pi}{2} \right) = \pm 1.$$

根据上下文的意思两种根号容易区别. 对算术根, 为书写简单, 亦可省去“+”号, 把“+”号记在心中.

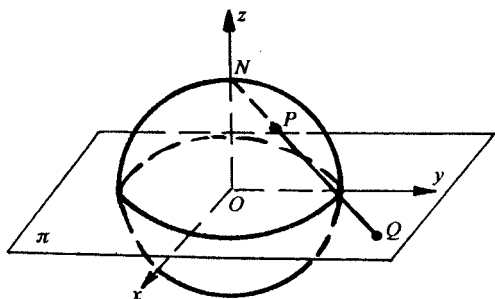


图 1-6

过 P 点并延长交 π 上于点 Q , Q 称为 P 的球极投影.

把 π 视为复平面 C , 设 Q 在 π 上的复坐标为 z . 于是, 球面 S 上的任一点 P (除 N 外) 就和点 Q 或 C 上的 z 对应; 反之, 任给 π 上一点 Q 或 $z \in C$, 也有 S 上一点 P ($\neq N$) 与之相对应. 在通常的拓扑意义下, 这种对应还是双方连续的. 当取动点 P ($\in S$) 趋于 N 时, 其对应点 Q 将在平面 π 中无限远离原点而无极限. 不妨称作点 Q 或 z “趋于无穷远”, 记为 $z \rightarrow \infty$.

如果把平面 π 上无穷远看成一个理想的“点”, 称为无穷远点 (记为 ∞), 那么 π 上无穷远点在球极投影下和球面 S 上的北极点 N 相对应. 复平面 C 加上这个无穷远点 ∞ 就称为扩充复平面, 记为 C_∞ . 这样, 球极投影建立起球面 S 和扩充复平面 C_∞ 的点之间的一一对应. 而且, N 在 S 上的一个邻域, 例如, 以 N 为中心的 S 上的一个小圆邻域将对应于 C_∞ 中以 O 为中心、相当大半径的圆的外域 (包括 ∞ 点). 如果将这个圆的外域 (或任何封闭曲线所围的外域) 包括 ∞ 点在内看作 ∞ 点的邻域, 则球极投影还可以看作 C_∞ 和 S 之间的双方连续对应, 即拓扑映射. 因此, S 也称作复球面.

最后还有一点要略加说明. 数学分析中讲过的开集、闭集、(开) 区域、闭区域、邻域等定义在复平面 C 中仍成立; 闭矩形套定理、有限覆盖定理亦都成立.

思 考 题

无穷远点在本课程中作为唯一的非正常复数而引进,那么这个复数的模、辐角、实部、虚部能否规定?无穷远点和数学分析中的无穷大量有何异同?

习 题 1.1

1. 求下列复数的实部和虚部: $\frac{1}{i}$, $\frac{1+i}{1-i}$, $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$, $(1+\sqrt{2}i)^3$.

答: $0, -1; 0, 1; -1, 0; -5, \sqrt{2}$.

2. 求下列复数的模和辐角: $1+i$, $\frac{1-i}{2}$, $-i$, $2-i$.

答: $\sqrt{2}$, $2k\pi + \frac{\pi}{4}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $2k\pi - \frac{\pi}{4}$; 1 , $2k\pi - \frac{\pi}{2}$; $\sqrt{5}$, $2k\pi -$

$\arctan \frac{1}{2}$.

3. 若 $z=x+iy$, 求 z^n 的实部和虚部; 若 z 的模为 ρ , 辐角为 θ , 求 z^n 的实部和虚部 (n 为自然数).

答: (1) 当 $n=2m$ 时 (m 为自然数), z^n 的实部和虚部分别为

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k C_{2m}^{2k} x^{2m-2k} y^{2k}, \quad \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_{2m}^{2k+1} x^{2m-(2k+1)} y^{2k+1};$$

当 $n=2m+1$ 时 (m 为自然数), z^n 的实部和虚部分别为

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k C_{2m+1}^{2k} x^{2m+1-2k} y^{2k}, \quad \sum_{k=0}^m (-1)^k C_{2m+1}^{2k+1} x^{2m-2k} y^{2k+1};$$

(2) $\rho^n \cos n\theta$, $\rho^n \sin n\theta$.

4. 求 $1+i$ 和 $-i$ 的 n 次方根.

答: $(1+i)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{2} \left(\cos \frac{\pi+8k\pi}{4n} + i \sin \frac{\pi+8k\pi}{4n} \right)$, $k=0, 1, \dots, n-1$;

$(-i)^{\frac{1}{n}} = \cos \frac{-\pi+4k\pi}{2n} + i \sin \frac{-\pi+4k\pi}{2n}$, $k=0, 1, \dots, n-1$.

5. 设 $z=x+yi$, 证明:

$$|x| \text{ (或 } |y|) \leq |z| \leq |x| + |y| \quad \text{及} \quad |z| \geq \frac{|x| + |y|}{\sqrt{2}}.$$

6. 证明:对任意复数 z_1, z_2 有

$$|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2).$$

7. 求证: $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$, 并说明其几何意义.

8. 说明 $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ 和 $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$ 中等式成立的充要条件.

9. 指出 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ 的几何意义, 并推广到 $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 0$ 的情形.

10. 若 $|z|=1$, 求证: $\left| \frac{az+b}{bz+a} \right| = 1$.

11. 写出任意直线方程的复数形式.

答: $\beta \bar{z} + \bar{\beta} z + c = 0$ (c 为实数, β 为非零复数, $z = x + yi$).

12. 求证: $z \bar{z} + a \bar{z} + \bar{a} z + b = 0$ 是一圆, 其中 b 为实数, 且 $|a|^2 > b$, 并指出其圆心的位置和半径大小. 若 $|a|^2 = b$ 或 $< b$, 又将如何?

答: 圆心: $-a$, 半径: $\sqrt{|a|^2 - b}$; 一点或虚圆.

13. 证明: 球极投影中, 球面 S 上的点 $P(x_1, x_2, x_3)$ 和 C 中对应点 $z = x + yi$ 之间有关系式:

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1},$$

以及 $z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$.

14. 求证: 在球极投影下, S 上的圆投影成 C 平面上的圆. 在什么情况下, 圆的投影为直线?

答: 过北极的圆周.

§ 1.2 复变函数

1. 复变函数的概念

我们已经熟悉(一元)实变函数

$$f: D(\subset \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}.$$

自然地, 我们定义(一元或单)复变函数(或简称复函数)
 $f: D(\subset \mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}$, 即复变函数 f , 是 \mathbf{C} 中某集合 D 到 \mathbf{C} 的一个映射,