复 变 函 数

路见可 钟寿国 刘士强 编著

（修 订 版）

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

复变函数/路见可,钟寿国,刘士强编著.—3版(修订版)
—武汉:武汉大学出版社,2001.9
ISBN 7-307-03374-7

Ⅰ.复… Ⅱ.①路… ②钟… ③刘… Ⅲ.复变函数 Ⅳ.O174.5

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第069389号

责任编辑:顾素萍 责任校对:黄添生 版式设计:支 笛

出版:武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)
(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn 网址:www.wdp.whu.edu.cn)
发行:新华书店湖北发行所
印刷:武汉市珞南印刷厂
开本:850×1168 1/32 **印张:**9 **字数:**230千字
版次:1993年12月第1版 2001年9月第3版
2001年9月第3版第1次印刷
ISBN 7-307-03374-7/O·245 **定价:**14.50元

目　录

第一章　复数和复函数

§1.1 复　　数

1. 复数域

读者已熟悉了实数域 **R**. 在历史上,求解最简单的二次方程 $x^2+1=0$ 便遇到了困难,它在 **R** 中显然无根,因此就想象有一种新的数,$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 为其根,因此 $-\mathrm{i}$ 也是它的根. 这样,$x^2+1=0$ 就也有两个根 $\pm\mathrm{i}$. 如果允许 i 参加四则运算,并服从实数的通常运算法则,就像一个代数文字那样,但遇到 i^2 则可改为 -1. 这样,如读者所知,一般的二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 也就总有两个根. 然而在很长时间内,人们怀疑是否真的有这种数存在,因而把 i 起名为"虚数",意即假想的数. 直到后来发现它有非常现实的意义(见下段),并依靠它可以解决不少过去不能解决的问题,还发现它有十分广泛的应用,才得到普遍的承认.

下面我们从逻辑上定义由实数域 **R** 添加 i 后生成的复数域 **C**. 在实数域 **R** 上面,添加一个新的形式的数 i,此数称为虚数单位,并允许它和实数一起可以进行加法、减法、乘法的运算($1\times\mathrm{i}$ 仍记为 i,$(-1)\times\mathrm{i}$ 记为 $-\mathrm{i}$,$0\times\mathrm{i}$ 记为 0),并假定它们仍服从交换律、结合律、分配律;此外还规定 $\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=\mathrm{i}^2=-1$(可以证明,这样一些规定是和谐的,即不会导致矛盾). 于是,这样的数一般可写成 $z=a+b\mathrm{i}$ $(a,b\in\mathbf{R})$,称为**复数**. 称 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$ 为 z 的**共轭复数**.

我们有

$$(a+b\mathrm{i})\pm(c+d\mathrm{i})=(a\pm c)+(b\pm d)\mathrm{i},$$

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i,$$

当且仅当 $a=b=0$ 时，才称 $a+bi=0$；故 $a+bi\neq0$ 就意味着 a,b 中至少有一个不为零. 除法也就可自然地作出如下：

$$\begin{aligned}\frac{c+di}{a+bi}&=\frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}\\&=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+\frac{ad-bc}{a^2+b^2}i \quad (a+bi\neq0).\end{aligned}$$

换句话说，只要在上式左端分子、分母中各乘以分母($\neq0$)的共轭复数便可计算除法. 这样，复数的四则运算可完全遵循实数的类似运算进行.

所有复数的集合按照以上运算法则并遵从 $i^2=-1$ 的规则，构成一域，称为**复数域**，并记作 C.

复数 $z=a+bi$ 中的 a 称为 z 的实部，记作 $\operatorname{Re} z$；b 称为 z 的虚部，记作 $\operatorname{Im} z$ (两复数当且仅当它们的实、虚部分别相等时才称为**相等**). 当 $b=0$ 时 $z=a+0i=a$ 就是**实数**；当 $a=0$ 时 $z=a+bi=bi$ 称为**纯虚数**. 注意 $0=0+0i$ 既是实数，也是纯虚数[①]. 因为 $z=a+bi$ 的共轭复数 $\bar{z}=a-bi$，显然 $\bar{\bar{z}}=z$，即 z 和 $\bar{z}$ 互为共轭复数. 此外，我们有明显的等式：

$$\operatorname{Re} z=\frac{z+\bar{z}}{2},\quad \operatorname{Im} z=\frac{z-\bar{z}}{2i};$$

当 $\operatorname{Im} z=0$ 即 $z=\bar{z}$ 时 z 是实数，而当 $\operatorname{Re} z=0$ 即 $z=-\bar{z}$ 时 z 是纯虚数.

我们熟知，实数间有大小的区别，但复数间不能比较大小，这是复数域和实数域的一个重要不同，需特别注意.

2. 复数的几何表示

在平面解析几何中，取定一直角坐标系 Oxy 后，可用一有序

① 有的作者把 $z=bi$ 仅当 $b\neq0$ 时才称作纯虚数；这样，0 不算作纯虚数. 但这样做是不方便的，我们不采用这种说法.

实数对(a,b)表示平面中任何一点P，称(a,b)为P的坐标，a为横坐标，b为纵坐标（图1-1）.

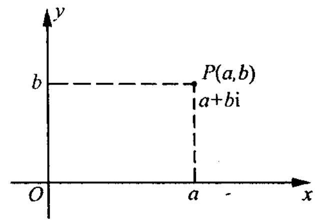

图 1-1

如果我们用复数$a+bi$来表示P的位置显然也是可以的，也就是说，取定一直角坐标系Oxy后，就可建立复数$a+bi$和点$P(a,b)$之间的一个一一对应的关系. 这时我们称这个取定直角坐标系的平面为复平面，仍用**C**表示；$a+bi$称为P点的复坐标或复数表示. 这是复数的一种几何表示法. x轴上的点的复坐标是实数，因此x轴也称为**实轴**；y轴上点的复坐标是纯虚数，因此y轴也称为**虚轴**.

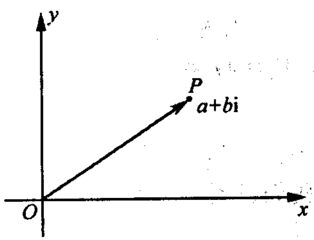

图 1-2

复数还可用来表示平面向量. 如图1-2，由复数$a+bi$决定了点P（如前），因此亦决定了一向量$\overrightarrow{OP}$；反之向量$\overrightarrow{OP}$决定一复数：P的复坐标. 当然，复数0和零向量相对应. 向量的这种复数表示也很有用. 例如，向量的加减法和复数的加减法是等价的. 即，设

$$\overrightarrow{OP}=a+bi,\quad \overrightarrow{OQ}=c+di,$$

按平行四边形规则，如$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$，正好有

$$\overrightarrow{OR}=(a+c)+(b+d)i$$

（图1-3）. 这在几何上立即可以证明.

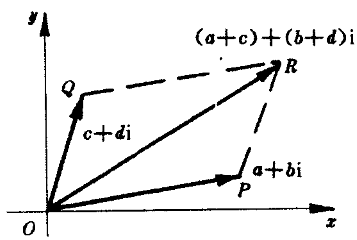

图 1-3

向量的数乘仍与复数和实数的乘法一致：如$\overrightarrow{OP}=a+bi$，

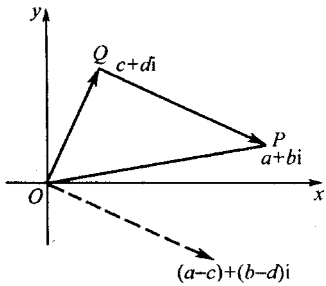

图 1-4

λ 为实数，则

$$\lambda\overrightarrow{OP}=\lambda(a+b\mathrm{i})=\lambda a+\lambda b\mathrm{i}.$$

但向量的内积和外积就和复数的乘法间没有自然的一致性了，这也是应引起注意的.

还应注意，若 P 和 Q 的复坐标分别为 $a+b\mathrm{i}$ 和 $c+d\mathrm{i}$，它们分别表示向量$\overrightarrow{OP}$和$\overrightarrow{OQ}$，则

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{QP}$$

（图 1-4）；另一方面，$\overrightarrow{QP}$作为一自由向量，当把起点 Q 移到原点 O 时，它所对应的复数正好是

$$(a-c)+(b-d)\mathrm{i}=(a+b\mathrm{i})-(c+d\mathrm{i}).$$

我们不妨仍记$\overrightarrow{QP}=(a-c)+(b-d)\mathrm{i}$. 这在以后的计算中也是非常有用的. 若称$\sqrt{a^2+b^2}$为复数$z=a+b\mathrm{i}$的模或绝对值，记为$|z|$，则由平行四边形法则，容易导出复数加减法的重要三角不等式. 即若 z_1,z_2 都是复数，则

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,\quad |z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|.$$

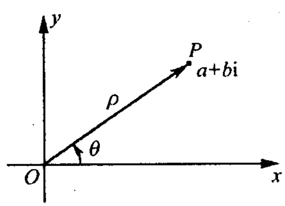

图 1-5

我们已看到复数 $a+b\mathrm{i}$ 可看作向量$\overrightarrow{OP}$，另一方面，向量$\overrightarrow{OP}$可由其大小和方向决定：$\overrightarrow{OP}$的大小为$|OP|=\rho=\sqrt{a^2+b^2}$，其方向可由$\overrightarrow{OP}$的倾角 θ 来决定（θ 可加减 2π 的整数倍）.[①]这也相当于 P 点的极坐标表示（把 O 点作为极点，x 轴作为极轴）（图 1-5）. 这样，对于复数 $a+b\mathrm{i}$ 来说，它也可由 ρ,θ 决定，其中 ρ 为复数 $a+b\mathrm{i}$ 的绝对值，也可写为$|a+b\mathrm{i}|$，而 θ（可加减 2π 的整数倍）称为它的

① 注意，零向量没有确定的方向或倾角.

辐角，记为 $\operatorname{Arg}(a+bi)$. 亦即，如果 $z=a+bi$，则

$$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2},$$

$$\operatorname{Arg} z=\operatorname{Arg}(a+bi)=\theta+2k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

复数的这种表示法，称为极坐标表示. 由于 k 可以取任何整数，因此 $\operatorname{Arg} z$ 是多值的.

当然，以上的讨论已默认了 $z\neq0$. 若 $z=0$，当然有 $|z|=0$，但 $\operatorname{Arg} 0$ 没有意义.

注意，$|z_1-z_2|$ 恰好是 z_1,z_2 之间的距离，而 $\operatorname{Arg}(z_2-z_1)$ 是从 z_1 到 z_2 的向量的倾角.

由极坐标和直角坐标的关系

$$x=\rho\cos\theta, \quad y=\rho\sin\theta,$$

立即可知一个复数 $x+yi$ 也可写成 $x+yi=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$. 复数的这种表示称为三角表示.

利用复数的三角表示法可以讨论复数之积、商、幂、方根的运算法则. 例如，如果

$$x_1+y_1i=\rho_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),$$

$$x_2+y_2i=\rho_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2),$$

则有

$$(x_1+y_1i)(x_2+y_2i)=\rho_1\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

由此可见，两复数相乘(除)，其乘积(商)的模为模的乘积(商)，而乘积(商)的辐角为辐角的和(差)[①](都可相差 2π 的整数倍). 同理，如果

$$x+yi=\rho(\cos\theta+i\sin\theta),$$

则当 n 为正整数时，有

$$(x+yi)^n=\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta).$$

而把开方看作乘方的逆运算时，有

① 两复数相除时，需分母不为零.

$$(x+y\mathrm{i})^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right),$$

$$k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

这就是我们熟知的复数 $x+y\mathrm{i}$ 的 n 次方根,其中$\sqrt[n]{\rho}$为算术根.①

由本段的讨论可以看出,复数确有非常现实的意义,而并不是虚无缥缈的了.我们仍沿用"虚数"这一字眼,纯粹只是历史的原因罢了.

由于本书讨论的对象是复数,因此以后讲到的数如无特别声明,一概指的是复数.

思 考 题

1. 解释集合等式

$$\mathrm{Arg}(z_1\cdot z_2)=\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2,$$

$$\mathrm{Arg}(z_1/z_2)=\mathrm{Arg}\,z_1-\mathrm{Arg}\,z_2$$

的意义,其中 $z_1,z_2\neq0$.

2. 说明作为集合等式 $\mathrm{Arg}\,z^2=2\mathrm{Arg}\,z$ 是错误的.

3. 球极投影、复球面、无穷远点、扩充复平面

历史上,为了绘制地图的需要,有一个球极投影法,使球面上的点和平面上的点之间建立一种对应.由于平面上的点可用复数表示,因此球面上的点也可用复数表示,就构成所谓**复球面**.具体说明如下.

设想一球面 S,不妨认为是中心在原点的单位球面,设 xOy 平面为 π(图 1-6).在球面上任取一点 P,从"北极"点 N 引一射线通

---

① 若强调算术根,有时写为$\sqrt[n]{\rho}_{+}$.例如$\sqrt{1}_{+}=1$,而

$$\sqrt{1}=\sqrt{1}_{+}\left(\cos\frac{2k\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{2}\right)=\pm1.$$

根据上下文的意思两种根号容易区别.对算术根,为书写简单,亦可省去"+"号,把"+"号记在心中.

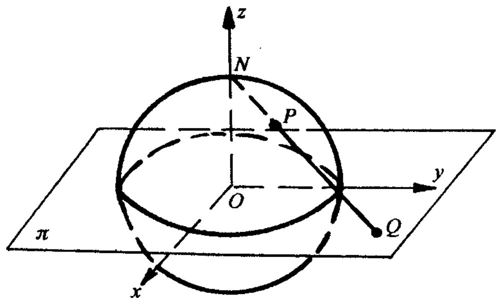

图 1-6

过 P 点并延长交 π 上于点 Q，Q 称为 P 的**球极投影**.

把 π 视为复平面 $\mathbf{C}$，设 Q 在 π 上的复坐标为 z. 于是，球面 S 上的任一点 P(除 N 外)就和点 Q 或 $\mathbf{C}$ 上的 z 对应；反之，任给 π 上一点 Q 或 $z\in\mathbf{C}$，也有 S 上一点 $P(\neq N)$与之相对应. 在通常的拓扑意义下，这种对应还是双方连续的. 当取动点 $P(\in S)$趋于 N 时，其对应点 Q 将在平面 π 中无限远离原点而无极限. 不妨称作点 Q 或 z"趋于无穷远"，记为 $z\to\infty$.

如果把平面 π 上无穷远看成一个理想的"点"，称为**无穷远点**(记为∞)，那么 π 上无穷远点在球极投影下和球面 S 上的北极点 N 相对应. 复平面 $\mathbf{C}$ 加上这个无穷远点∞就称为**扩充复平面**，记为 $\mathbf{C}_\infty$. 这样，球极投影建立起球面 S 和扩充复平面 $\mathbf{C}_\infty$的点之间的一一对应. 而且，N 在 S 上的一个邻域，例如，以 N 为中心的 S 上的一个小圆邻域将对应于 $\mathbf{C}_\infty$中以 O 为中心、相当大半径的圆的外域(包括∞点). 如果将这个圆的外域(或任何封闭曲线所围的外域)包括∞点在内看作∞点的邻域，则球极投影还可以看作 $\mathbf{C}_\infty$和 S 之间的双方连续对应，即拓扑映射. 因此，S 也称作**复球面**.

最后还有一点要略加说明. 数学分析中讲过的开集、闭集、(开)区域、闭区域、邻域等定义在复平面 $\mathbf{C}$ 中仍成立；闭矩形套定理、有限覆盖定理亦都成立.

思考题

无穷远点在本课程中作为惟一的非正常复数而引进，那么这个复数的模、辐角、实部、虚部能否规定？无穷远点和数学分析中的无穷大量有何异同？

习题 1.1

1. 求下列复数的实部和虚部：$\frac{1}{\mathrm{i}}$，$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^2$，$(1+\sqrt{2}\,\mathrm{i})^3$.

答：0，−1；0，1；−1，0；−5，$\sqrt{2}$.

2. 求下列复数的模和辐角：$1+\mathrm{i}$，$\frac{1-\mathrm{i}}{2}$，$-\mathrm{i}$，$2-\mathrm{i}$.

答：$\sqrt{2}$，$2k\pi+\frac{\pi}{4}$；$\frac{1}{\sqrt{2}}$，$2k\pi-\frac{\pi}{4}$；1，$2k\pi-\frac{\pi}{2}$；$\sqrt{5}$，$2k\pi-\arctan\frac{1}{2}$.

3. 若 $z=x+\mathrm{i}y$，求 z^n 的实部和虚部；若 z 的模为 ρ，辐角为 θ，求 z^n 的实部和虚部（n 为自然数）.

答：(1) 当 $n=2m$ 时（m 为自然数），z^n 的实部和虚部分别为

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_{2m}^{2k}x^{2m-2k}y^{2k},\quad \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_{2m}^{2k+1}x^{2m-(2k+1)}y^{2k+1};$$

当 $n=2m+1$ 时（m 为自然数），z^n 的实部和虚部分别为

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_{2m+1}^{2k}x^{2m+1-2k}y^{2k},\quad \sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_{2m+1}^{2k+1}x^{2m-2k}y^{2k+1};$$

(2) $\rho^n\cos n\theta$，$\rho^n\sin n\theta$.

4. 求 $1+\mathrm{i}$ 和 $-\mathrm{i}$ 的 n 次方根.

答：$(1+\mathrm{i})^{\frac{1}{n}}=\sqrt[2n]{2}\left(\cos\frac{\pi+8k\pi}{4n}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi+8k\pi}{4n}\right)$，$k=0,1,\cdots,n-1$；

$$(-\mathrm{i})^{\frac{1}{n}}=\cos\frac{-\pi+4k\pi}{2n}+\mathrm{i}\sin\frac{-\pi+4k\pi}{2n},\ k=0,1,\cdots,n-1.$$

5. 设 $z=x+y\mathrm{i}$，证明：

$$|x|\,(\text{或}\ |y|)\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|\quad\text{及}\quad|z|\geqslant\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}.$$

6. 证明:对任意复数 z_1,z_2 有

$$|z_1\pm z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2\pm 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2).$$

7. 求证:$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$,并说明其几何意义.

8. 说明 $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$ 和 $|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|$ 中等式成立的充要条件.

9. 指出 $z_1+z_2+z_3=0$ 的几何意义,并推广到 $z_1+z_2+\cdots+z_n=0$ 的情形.

10. 若 $|z|=1$,求证:$\left|\dfrac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right|=1$.

11. 写出任意直线方程的复数形式.

答:$\beta\bar{z}+\bar{\beta}z+c=0$ (c 为实数,β 为非零复数,$z=x+y\mathrm{i}$).

12. 求证:$z\bar{z}+a\bar{z}+\bar{a}z+b=0$ 是一圆,其中 b 为实数,且 $|a|^2>b$,并指出其圆心的位置和半径大小.若 $|a|^2=b$ 或 $<b$,又将如何?

答:圆心:$-a$,半径:$\sqrt{|a|^2-b}$;一点或虚圆.

13. 证明:球极投影中,球面 S 上的点 $P(x_1,x_2,x_3)$ 和 $\mathbf{C}$ 中对应点 $z=x+y\mathrm{i}$ 之间有关系式:

$$x_1=\frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1},\quad x_2=\frac{z-\bar{z}}{\mathrm{i}(|z|^2+1)},\quad x_3=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1},$$

以及 $z=\dfrac{x_1+\mathrm{i}x_2}{1-x_3}$.

14. 求证:在球极投影下,S 上的圆投影成 $\mathbf{C}$ 平面上的圆.在什么情况下,圆的投影为直线?

答:过北极的圆周.

§1.2 复变函数

1. 复变函数的概念

我们已经熟悉(一元)实变函数

$$f:D(\subset\mathbf{R})\to\mathbf{R}.$$

自然地,我们定义(一元或单)复变函数(或简称复函数)$f:D(\subset\mathbf{C})\to\mathbf{C}$,即复变函数 f,是 $\mathbf{C}$ 中某集合 D 到 $\mathbf{C}$ 的一个映射,