

Demeter G. Fertis 原著  
陳俊豪 譯述

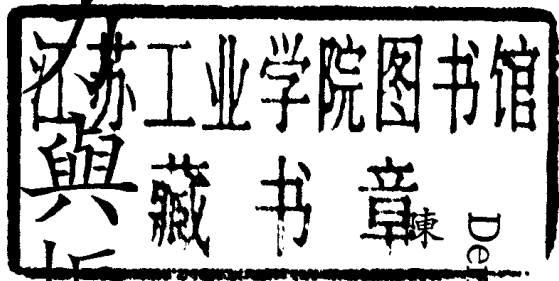
# 結構動力與振動學

工程叢書

中國工程師學會出版

工程叢書

結構動  
力與振動學



Demeter G. Fertis 原著  
俊豪 譯述

中國工程師學會出版

特價新台幣 110 元

版權所有  
翻印必究

出版者：中國工程師學會  
總經銷：科技圖書股份有限公司  
台北市博愛路一八五號二樓  
電話：3 1 1 0 9 5 3  
郵政劃撥儲金 15697 號  
六十八年十一月二版

# 原作者序

本書係為土木、機械工程學系四年級以及研究所一年級修習「結構動力學」及「振動學」而編寫，亦為從事土木、機械和航空實際工作之工程師之參考用書。

，本書兼顧實際與理論，且特別強調實際應用。對於各類工程問題，明晰地介紹最適切之分析與應用方法。不偏於理論，亦不過份強調實用。提供各種結構動力分析方法，以解決實際工程問題的需要。這方面的教材，係作者歷年來在懷俄明州立大學、愛荷華大學、愛科隆大學等所講授者。

第一章介紹結構振動學之基本知識，使讀者對於結構動力反應有較深刻的了解。第二章廣泛處理各種彈簧 - 質量系動力反應，包括各式外力型態，阻尼情況。除理論分析外，並介紹數值分析法。第三章討論理想化剛架及簡單結構之動力反應。第四章為無限自由度系統理論分析方法。第五章為振態分析方法，先計算振動自然頻率及振態形狀，以應用於各種結構系統。本章的一部份內容與第六章之其他適用振動方法，包括傳遞矩陣以及動態鉸等觀念。第七章為有關變化勁性斷面結構構件問題，對於複雜結構系統，提供一簡化分析方法。第八章、第九章複習富利葉轉換、拉卜拉斯轉換及變分法分析。本章除理論外，對於實際結構之動力及振動問題亦加明確討論。第十章為結構動力反應之近似解分析法，此類方法較具實用性，提供一簡單而合理的方法以計算單一自由度及多自由度彈性及彈塑性系統。第十一章研討結構承受爆震及地震之分析，包括理論的探討以及實際的應用。

最後一章為近十年來深引人們注目的隨機外力問題，所討論之隨機統計分析方法，對於結構承受地震力之動力分析，特具應用價值。

Demeter G. Fertis 夫安帝斯

# 結構動力與振動學

## 目 錄

### 第一章 結構振動學概論

1-1 引 言	1
1-2 週期運動之基本現象及其定義	2
1-3 各種系統之運動微分方程式	6
1-4 拉格朗日方程式	11
1-5 單一自由度彈簧 - 質量系之自由振動	16
1-6 黏滯性阻尼下之自由振動	19
1-7 庫倫性阻尼下之自由振動	21
1-8 遲滯性阻尼下之自由振動	24
1-9 兩自由度彈簧 - 質量系之自由振動	25
1-10 黏滯性阻尼下之二自由度系統	29
1-11 均一梁之自由振動	31
1-12 正規化振態之正交性	35
1-13 韌性矩陣	36
1-14 勁性矩陣	37
1-15 勁性係數之計算	40
練 習	44

### 第二章 彈簧 質量系統之動力反應

2-1 引 言	49
2-2 無阻尼下之簡諧激發力	50
2-3 阻尼下之簡諧激發力	52
2-4 衝 量	53
2-5 一般的外力行態	54
2-6 特殊型態之外力函數	56
2-7 數值分析	67
2-8 單一自由度彈塑性系統	72

2-9 二自由度或多自由度系統	80
2-10 富利葉級數	84
習 題	88

### 第三章 理想化梁、鋼架與簡單房屋

3-1 引 言	91
3-2 理想化梁	92
3-3 理想化單層剛架及房屋	94
3-4 兩層剛架及房屋	103
3-5 多層剛架及房屋	109
習 題	115

### 第四章 無限自由度系統

4-1 引 言	121
4-2 單跨度梁之振動	122
4-3 梁振動之起始時間條件	125
4-4 連續梁之振動	127
4-5 梁之動力反應	135
4-6 由於支承運動之動力反應	141
4-7 板之運動微分方程式	143
習 題	146

### 第五章 振動模態分析

5-1 引 言	149
5-2 彈簧 - 質量系振動模態方程式	152
5-3 理想化剛架或房屋	154
5-4 無限自由度系統之振態方程式	159
5-5 梁之動力反應	161
5-6 移動載荷	163
5-7 簡支承板之振態方程式	165
5-8 簡支承板之動力反應	168
5-9 集中參數系統動力及反應	171
5-10 司托杜拉法及迭代程序	173

5-11 用勁性係數之迭代程序	180
5-12 較高振動頻率及振態形狀	184
5-13 橋梁之振動	188
5-14 考慮剛架中韌性梁之動力反應	193
習題	198

## 第六章 振動學解法

6-1 引言	201
6-2 雷利方法	202
6-3 解自由受撓振動之麥克拉司德解法	211
6-4 彈簧 - 質量系之傳遞矩陣	216
6-5 利用傳遞矩陣解彈簧 - 質量系振動	221
6-6 受撓振動系統之傳遞矩陣	225
6-7 傳遞矩陣法解受撓振動	230
6-8 連續梁之傳遞矩陣	234
6-9 動態鉸觀念	242
習題	247

## 第七章 勁性變化構件之結構物

7-1 引言	251
7-2 梁之動力反應	253
7-3 等價系統之理論及方法	253
7-4 梁之自然頻率與振態形狀	264
7-5 勁性變化構件所組成之剛架的動力反應	277
7-6 彈性支承梁	283
習題	288

## 第八章 富利葉與拉卜拉斯轉換

8-1 引言	295
8-2 週期性激發力及分立譜	296
8-3 非週期性激發力	299
8-4 單自由度彈簧 - 質量系之動力反應	303
8-5 承受單位衝量之動力反應	308

8-6	二自由度或多自由度系統之動力反應	310
8-7	褶 積	313
	習 題	314

## 第九章 變分法

9-1	引 言	317
9-2	變分法基本性質	318
9-3	極值之必要條件	320
9-4	移動性邊界條件之泛函數	324
9-5	索及桿之振動	328
9-6	梁之橫向自由振動	331
9-7	均一彈性梁之縱向振動	334
9-8	板之振動	337
	習 題	340

## 第十章 動力反應之近似解法

10-1	引 言	343
10-2	基本觀念	344
10-3	轉換因數之推導	346
10-4	轉換因數表	351
10-5	彈塑性反應圖表	361
10-6	梁之動力反應	366
10-7	混凝土版之動力反應	370
	習 題	376

## 第十一章 爆震與地震

11-1	引 言	379
11-2	核子爆發之動力作用	380
11-3	封閉矩形結構動力載荷	390
11-4	作用於封閉矩形結構動力載荷之計算	394
11-5	作用於矩形開孔結構之動力載荷	400
11-6	作用於開放剛架結構之動力載荷	403
11-7	圓柱狀表面結構之動力載荷	405



11-8 結構物承受爆震波載荷之動力分析	408
11-9 地震問題	411
11-10 地震強度	414
11-11 單層結構之地震反應	416
11-12 多層結構之地震反應	419
11-13 地震反應之振態分析	423
11-14 多層結構之非彈性反應	429
11-15 地震反應之隨機分析法	431
11-16 地震設計時實際之考慮事項	432
習 題	433

## 第十二章 隨機性結構動力學

12-1 引 言	437
12-2 或然率，隨機變數及分佈函數	438
12-3 期望值	441
12-4 關聯函數	442
12-5 功譜分析	443
12-6 結構系統承受隨機外力之動力反應	448
12-7 用或然率處理之設計過程	456
習 題	459
附錄 1 矩陣運算之基本法則	461
附錄 2 參考資料及文獻	475

# 1

---

## 結構振動學概論

### 1-1 引言

結構動力學 ( structural dynamics ) 之內容，為研討結構物承受隨時間而變化之外力作用下，該結構物之反應分析及設計。舉例言之，裝有振動

## 2 結構動力與振動學

機械之結構物，承受移動載重之橋梁結構，承受爆震力、風力之結構，或受隨機地震力影響之房屋結構及基礎。諸如此類，必須考慮結構動力學之分析及設計。

結構物在此種形式之外力作用下，必呈振動現象。因此，有關振動學的知識，在結構動力學分析上，佔了很重要的分量。本章首先討論結構物振動之基本觀念與方法。

### 1-2 週期運動之基本現象及其定義

物體作重複運動 ( repetitive motion ) 之現象，稱為振動 ( vibration )。振動學是動力學中一部門應用知識。因此，牛頓之運動定律，將適用於研討物體振動現象。假若此種重複運動，對平衡位置而言，每次重複的時間間隔相同，則稱為週期性運動 ( periodic motion )。每次重複所須時間  $t$ ，稱為週期 ( period )，每單位時間內之重複次數，稱為振動之頻率 ( frequency of vibration )  $f_n$ 。

$$f_n = \frac{1}{\tau} \quad (1-1)$$

完成一週期之運動現象，即稱為重複一次 ( a cycle )。此外，振動之頻率，通常另有一定義，以希臘字母  $\omega$  表之，以單位時間徑度量表示之。

振動現象，可分為自由振動 ( free vibration ) 與強迫振動 ( forced vibration ) 兩種。自由振動之起因，僅由物體本身之慣性質量，而不涉及外界激發力。此種振動頻率，通常以本身有關之自然頻率振動。自然頻率中之最低者，稱為基本頻率 ( fundamental frequency )。

假若，外界振動力系 ( vibrating force system )，作用於物體，物體

即依外力之頻率振動。此外界之振動力系可能為波浪、風、聲、爆震、地震或人為的外力等。在上述情況下，每種干擾的振動、傳遞至物體上，使物體依外力之頻率而振動。假若物體的自然頻率與外力頻率相符合，即產生共振（resonance）現象。當共振現象發生後，振幅逐次遞增而達無限大。但實際上，當振幅超過某一允許值，即使是短暫一瞬時間，結構系統即視為失效（loss of integrity）。

幸而，結構物之自由振動通常是簡諧振動（harmonic vibration）。簡諧振動在數學上可以正弦或餘弦函數表示。簡諧運動（armonic motion）必定是週期性運動，但週期性運動（periodic motion）並不一定簡諧運動。

如圖 1-1 a，質點  $P$  以等角速度  $\omega$  作圓周運動。假設  $P'$  為  $P$  在水平或垂直直徑上之投影，則  $P'$  之運動，即為簡諧運動。假設  $t=0$  時， $P$  之位置在  $A$ ，在任一時間  $t$ ，其角位移  $\theta = \omega t$ ，而投影  $P'$  則從原點算起之位移（displacement） $y$ 。

$$y = r \sin \omega t \quad (1-2)$$

$P'$  之線性速度（linear velocity）為

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = r\omega \cos \omega t \quad (1-3)$$

其線性加速度（linear acceleration）為

$$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} = -r\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 y \quad (1-4)$$

或

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \quad (1-5)$$

公式 (1-5)，是  $P'$  以起始條件沿圓之垂直直徑運動的微分方程式。該式之一般解為

$$y = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (1-6)$$

常數  $A$ 、 $B$  可由運動之起始條件（initial condition）定得。

公式 (1-2)、(1-3) 與 (1-4) 所表示之位移、速度及加速度，分別以

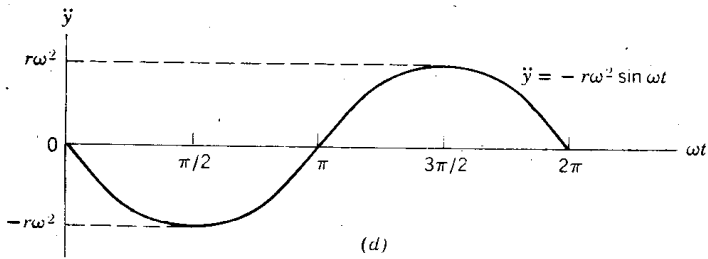
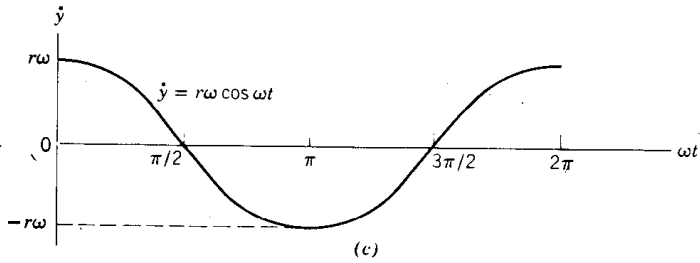
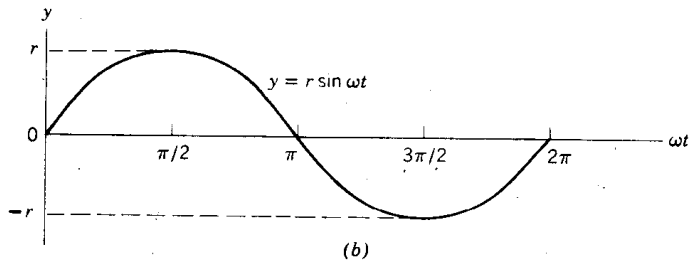
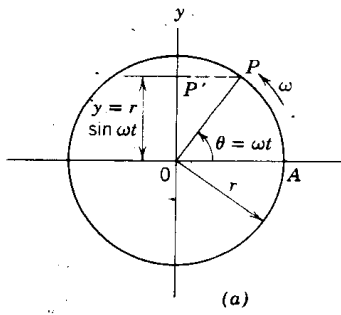


图. 1-1

圖 1-1 b, 1-1 c 及 1-1 d 表示。如圖所示，速度向量與位移向量呈  $90^\circ$  向前，加速度向量與位移向量呈  $180^\circ$  向前。

具阻尼結構 ( damped structure ) 之自由振動之振幅 ( amplitude )，因為沒有外界激發力，故繼續維持其振動狀態，而在結構振動時相對地產生阻力，使振幅逐次消滅。此項阻力損耗能量可使振動減弱。此種現象，稱為阻尼 ( damping )。引起阻尼的因素很多，但通常阻尼所損耗的能量若很小，在工程結構分析上可予省略。

常見的三種阻尼型態，計有黏滯性 ( viscous )、庫倫性 ( coulomb )、遲滯性 ( hysteresis )。黏滯性阻尼通常與物體在低速通過流體介質而起。此種阻力，與物體運動速度成比例。即

$$F_d(t) = -c\dot{y} \quad (1-7)$$

式中  $c$  稱為阻尼常數 ( damping constant )， $\dot{y}$  為速度。 $c$  之單位，定義為單位速度之阻力常數。

庫倫性或乾摩擦性 ( dry friction ) 阻尼與物體在乾燥平面上滑動而起。此時阻力 ( resisting force )  $F_f$  可表示為

$$F_f = \pm \mu N \quad (1-8)$$

式中  $\mu$  為材料動摩擦係數， $N$  為正壓力。此種阻力與正壓力、滑動平面的性質及材料之特性有關。

遲滯性阻尼，通常稱為固態或構造阻尼 ( solid or structural damping )。此種阻力，大致由於材料內摩擦力而起，與變形物體之變位幅度大小成比例，而與振動的頻率無關。阻力的產生，係由物體在變形時，內部層面作相對滑動。由此阻力作功所吸收的能量，將以熱的形式消散。

假若外力 - 位移曲線如圖 1-2 所示，則每一次運動所損失的能量  $\Delta U$ ，即為圖上圈內所包圍之面積。設  $F$  為彈簧力， $y$  為位移， $Y$  為振動之振幅。由實驗顯示  $\Delta U$  大約與振幅的平方成比例。亦即

$$\Delta U = k \pi c_0 Y^2 \quad (1-9)$$

式中  $k$  為彈簧勁性 ( spring stiffness )， $c_0$  為固態阻尼時之無次材料常數。

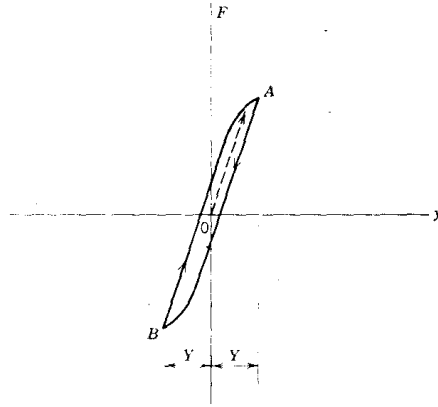


圖. 1-2

### 1-3 各種系統之運動微分方程式

本節將導出各種不同自由度系統之運動微分方程式。工程系統 ( engineering system ) 之自由度 ( degrees of freedom )，即為定義該系統在任意時間  $t$  之質點位置所須最少的獨立座標數。考慮圖 1-3 a 之彈簧 - 質量系，質量  $m$  僅限於在垂直方向運動，並受黏滯阻尼影響。作用於質量  $m$  之外力為  $F(t)$ ， $k$  為彈簧常數，定義為將彈簧拉長單位長所須之力， $y$  為質量  $m$  之垂直位移， $c$  為阻尼常數。假若位移函數  $y(t)$  已知，則質量  $m$  在任一時間  $t$  之位置即可確定。因此，此種系統是為單一自由度系統。

如由圖 1-3 b 之分離體圖，運用牛頓運動第二定律，可得該系統之運動微分方程式如下：

$$m\ddot{y} = F(t) - ky - c\dot{y}$$

或

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F(t) \quad (1-10)$$

第一章 結構振動學概論

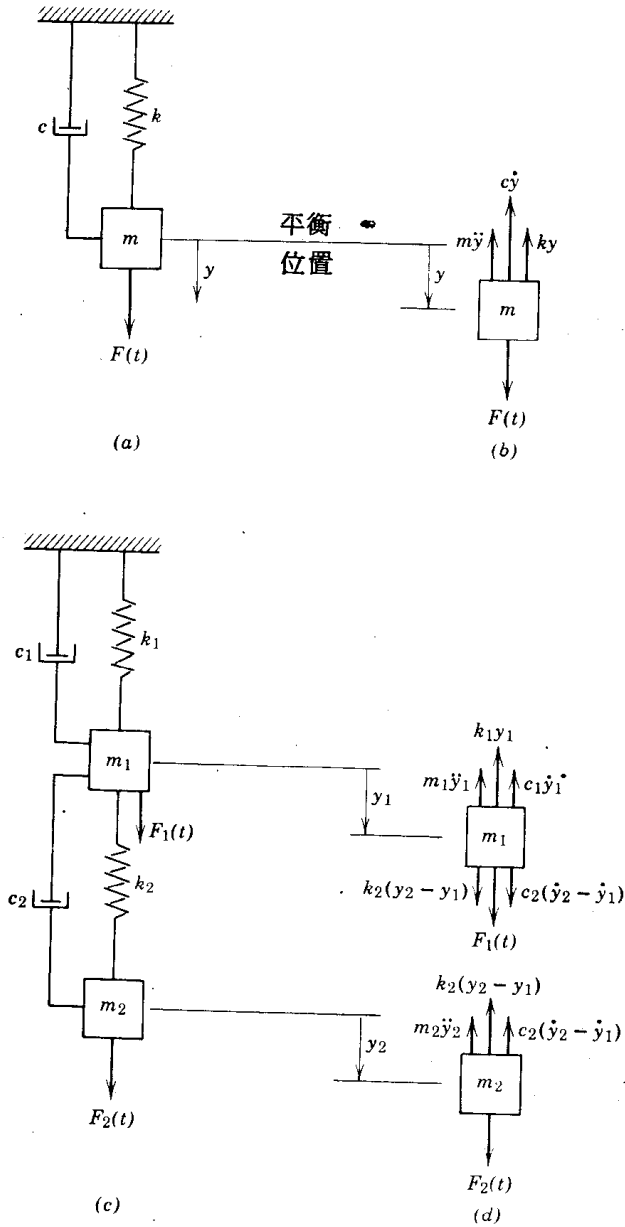


圖. 1-3



## 8 結構動力與振動學

式中  $\ddot{y}$  爲對時間  $t$  的二次微分。公式 1-10 爲具常係數之線性非齊性 (linear nonhomogeneous) 二次微分方程式。解之可得位移函數  $y(t)$ 。設其外力函數  $F(t)$  爲零，則公式 1-10 可改寫成

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0 \quad (1-11)$$

公式 1-11 爲具常係數之線齊性二階 (second-order linear homogeneous) 微分方程式。表示具阻尼影響之單一自由度系統之自由振動。

假若爲黏滯阻尼力  $c\dot{y}$  爲零，則得

$$m\ddot{y} + ky = 0 \quad (1-12)$$

此齊性方程式 (homogeneous equation) 表示彈簧 - 質量系在無阻尼時之自由振動。

圖 1-3 c，設彈簧 - 質量系限於垂直方向運動，該系統有二個獨立座標  $y_1$  與  $y_2$  以描述質量  $m_1$  與  $m_2$  在運動時之位置。因此，系統有二個自由度。該系統又假設受有黏滯阻尼影響。 $c_1$  與  $c_2$  爲阻尼常數。圖 1-3 d 所示之分離體上受外力之質量  $m_1$  與  $m_2$ 。由分離體用垂直方向的動力平衡，導得運動方程式如下：

$$\begin{aligned} -m_1\ddot{y}_1 - k_1y_1 + k_2(y_2 - y_1) - c_1\dot{y}_1 + c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + F_1(t) &= 0 \\ -m_2\ddot{y}_2 - k_2(y_2 - y_1) - c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + F_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

或

$$m_1\ddot{y}_1 + c_1\dot{y}_1 - c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_1y_1 - k_2(y_2 - y_1) = F_1(t) \quad (1-13)$$

$$m_2\ddot{y}_2 + c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_2(y_2 - y_1) = F_2(t) \quad (1-14)$$

公式 1-13 與 1-14 爲二自由度系統之運動微分方程式。由此兩個聯立方程式，可分別求得質量  $m_1$  與  $m_2$  之位移函數  $y_1(t)$  與  $y_2(t)$ 。

阻尼作用下之自由振動，當依時變動力  $F_1(t)$  及  $F_2(t)$  皆爲零時，該系統之運動齊性方程式爲

$$m_1\ddot{y}_1 + c_1\dot{y}_1 - c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_1y_1 - k_2(y_2 - y_1) = 0 \quad (1-15)$$

$$m_2\ddot{y}_2 + c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_2(y_2 - y_1) = 0 \quad (1-16)$$