线性代数

（非数学专业）

林金桢　吴秀琼　陈巧华　编

中山大学出版社

线性代数

林金桢　吴秀琼　陈巧华　编

中山大学出版社

线 性 代 数

林金桢等 编

中山大学出版社出版发行
广东省新华书店经销
广州红旗印刷厂印装

850×1168毫米 32开本 7.75印张 190千字
1987年12月第1版 1987年12月第1次印刷
印数 1—3000册
ISBN 7-306-00047-0/O·3

统一书号：13339·26 定价：1.35元

内 容 提 要

本书内容主要包括：行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的相似对角形、二次型、线性空间与线性变换以及欧氏空间等。旨在提供必需的基础理论。选材精，篇幅短，力求在较短的时间内讲授较广的知识，适用于对内容和授课时数有不同的要求的非数学专业。读者对象：综合性大学、师范院校的物理类专业和其它非数学专业师生，以及业余大学、电视大学师生等。

前　言

本书是我们根据多年的教学实践，专门为非数学专业的读者的需要而编写的。旨在提供必需的基础理论知识；适用于对内容和授课时数有不同要求的各专业；选材精，篇幅短，能在较短时间内讲授较广的知识。

针对非数学专业读者的特点，本书由浅入深，由特殊到一般讲述代数的基本内容。着力于在叙述和推理方面以较明确的思路引导读者思考。我们对每个基本概念尽可能赋予确切的有关背景与几何直观；需要的证明，在要求逻辑严谨的同时，努力做到采用较简捷的方法和通俗浅显的叙述，方便读者阅读。

本书内容包括：行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的标准型、二次型、线性空间与线性变换、内积空间。在每章（或节）中都配有适当的习题，供读者进行练习。本书可供约60教学时（包括习题课）者使用。若只有30至40学时的，可讲到第五章止，并对其中某些定理或性质的证明，依实际情况酌情处理。

本书可作综合性大学、师范院校的物理类专业以及生物、化学、地理、经济管理等的各个专业的教材。本书还可作为业余大学、电视大学以及大专学校的线性代数的教学参考书。

马麟俊老师审阅了本书，提出了宝贵的修改意见，在此向他表示诚挚的感谢。

本书由陈巧华主笔第一、二章，吴秀琼主笔第三章，林金桢主笔第四、五、六、七章，并负责全书统编工作。

由于水平所限，本书肯定有缺点、错误，诚恳地希望读者给予批评指正。

编　者

一九八七年四月于中山大学

目　录

第一章 行 列 式

§1 行列式的定义

一、排列

在中学代数里我们已经学习过二阶和三阶行列式。例如，三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \quad (1.1.1)$$

它是由所谓"对角线"展开法而得到的。我们知道，用这种方法即使只对四阶行列式也无法赋以意义了。正如研究二、三元线性方程组而引进了二、三阶行列式一样，为了讨论 n 元线性方程组就要考虑 n 阶行列式。因此，我们首先碰到的一个问题是如何定义 n 阶行列式。为此，我们详细研究三阶行列式的结构，找出它们内在的规律，然后根据这种规律来形式地定义 n 阶行列式。可以看出，为了得到（1.1.1）后边所有的项——行列式的不同行不同列的三个元素之积，只须在乘积 $a_{1p}a_{2q}a_{3r}$ 中使第二个指标 p, q, r 取 1，2，3 的所有可能的 3！种不同的排列：

$$123,\ 231,\ 312,\ 132,\ 213,\ 321 \quad (1.1.2)$$

另一方面，每一乘积都带有符号，而且乘积前面正负号的选择看来与 1，2，3 按不同次序的排列有关。因此，先要对排列的概

念进行讨论。

由 n 个数 1，2，…，n 组成的一个有序数组称为一个 **n 阶排列**。

例如，123，231都是 3 阶排列。

n 阶排列的总数是

$$n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1=n!$$

$123\cdots n$是按自然顺序（即递增的次序）构成的排列，称为 **n 阶标准排列**。

在一个排列里，如果某一个较大的数排在某一个较小的数前面，就说这两个数构成一个**反序**。在一个排列里出现的反序总个数叫做这个排列的**反序数**。我们用记号$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的反序数。

例如在排列132里，3 比 2 大，但是 3 排在 2 的前面，构成一个反序；在排列321里，2 排在 1 前面，3 排在 1 和 2 前面，都构成反序，$\tau(321)=3$。

一个排列的反序数可能是偶数也可能是奇数，有偶数个反序的排列叫做一个**偶排列**；有奇数个反序的排列叫做一个**奇排列**。

例如，231有两个反序，是一个偶排列；321有 3 个反序，是一个奇排列。

在 1，2，3 所有的六个排列中，有三个偶排列，就是123，231和312，另外三个是奇排列。这一事实并不是偶然现象，可以证明，在 n 个数的所有 $n!$ 个排列中，偶排列与奇排列各占一半。

把一个排列中某两个数互换，而其余的数保持不动，那么就得到一个新的排列，对于排列所施行的这样一个变换，叫做一个**对换**。

现在我们来讨论，对一个排列施行一个对换，排列的奇偶性

有什么变化，关于这个问题有如下定理

定理 1　每一个对换都改变排列的奇偶性。

证明　首先看一个特殊情形，就是被对换的两个数是相邻的。设给定的排列为

$$\overbrace{\cdots}^{A}\ jk\ \overbrace{\cdots}^{B}, \tag{1.1.3}$$

其中 A 与 B 都代表若干个数。若 A 与 B 的数不动，把 j 与 k 对换变成

$$\overbrace{\cdots}^{A}\ kj\ \overbrace{\cdots}^{B}, \tag{1.1.4}$$

比较这两个排列的反序数，经过这个对换后，属于 A 或 B 的数的位置没有改变，所以这些数所构成的反序数没有改变，同时 j，k 与 A 或 B 中的数构成的反序数也没有改变。因此，若在排列(1.1.3)中 $j>k$，则经过对换，整个排列的反序数减少一个；若 $j<k$，则经过对换，反序数就增加一个。不论是那种情形，排列的奇偶性都有改变。

现在来看一般情形，设 j 与 k 之间有 S 个数，这时给定的排列为

$$\cdots j\, i_1 i_2 \cdots i_s k \cdots \tag{1.1.5}$$

先让 j 向右移动，依次与 i_1，i_2，$\cdots$，i_s 交换，这样经 S 次相邻两个数的对换后，(1.1.5)式变为

$$\cdots i_1\, i_2 \cdots i_s\, j\, k \cdots \tag{1.1.6}$$

再让 k 向左移动，依次与 j，i_s，$\cdots$，i_2，i_1 交换，经过 $S+1$ 次相邻两个数的对换后，(1.1.6)式变为

$$\cdots k\, i_1\, i_2 \cdots i_s j \cdots \tag{1.1.7}$$

这正是对 (1.1.5) 式施行对换 j 与 k 而得到的排列，而它是经过

2S + 1 次相邻的对换实现的。因为每经过一次相邻两个数的对换，排列都改变奇偶性，由于 2S + 1 是奇数，故(1.1.7)式与(1.1.5)式奇偶性相反。

二、行列式的定义

引进了排列概念之后，可将三阶行列式 D 定义为：三阶行列式表示 3！项的代数和，每项是取自 D 的不同行不同列的三个元素之积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

这里 $j_1j_2j_3$ 是 1，2，3 的一个排列。每个项前面带有正负号，当 $j_1j_2j_3$ 是偶排列时带正号，当 $j_1j_2j_3$ 是奇排列时带负号。以式子表示可写成

$$D=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对 1，2，3 的所有 3 阶排列求和。读者不妨自行验证一下（这是有益的工作），上述对三阶行列式的定义与已知的结果一致。

将三阶行列式的这一定义办法，平行地推广到一般情形，这就有

定义 1 n^2 个数 a_{ij}（$i=1,2,\cdots,n$；$j=1,2,\cdots,n$）构成的 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于所有取自 D 的不同行不同列的 n 个元素之积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和，这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 1，2，…，n 的一个排列，每个项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 前面有正负号，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时带正号，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时带负号。这一定义可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和。

由定义可知，n 阶行列式的展开式有 $n!$ 项，特别地当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|$ 就是数 a。

例 1 设四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}$$

根据定义，D 是 $4!=24$ 项的代数和，但在这个行列式中，除了 $acfh$，$adeh$，$bdeg$，$bcfg$ 这四项外，其余的项都至少含有一个因子 0，因而等于 0。而上面四项的列标排列依次是1234，1324，4321，4231，其中第一个和第三个是偶排列，其余两个是奇排列。因此

$$D=acfh-adeh+bdeg-bcfg$$

例 2 计算右上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这是一个 n 阶行列式，按行列式定义，它有 $n!$ 项，其各项的一般形式为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

在行列式中第 n 行的元素除去a_{nn}外全为 0 ，只须考虑 $j_n=n$ 的那些项。在第$n-1$行中，除去$a_{n-1,n-1}$和$a_{n-1,n}$外，其余的元素全为 0 ，j_{n-1}只有取$n-1$和 n 这两个可能，由于$j_n=n$，所以j_{n-1}就不能等于 n 了，从而$j_{n-1}=n-1$。这样逐步推上去，不难看出，在展开式中除去

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这一项外，其余的项全是 0 ，而这一项的列指标所成的排列是一个偶排列，所以这一项带正号，于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

在定义 1 中为确定D中每项前面的符号，我们将 n 个元素的乘积按其所在行的先后次序排列，即

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

然而，由乘法的可交换性，这 n 个元素的次序是可以随意的。一般地可写成$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$，它同样是D中的项，问题是在这种情况下，如何确定该项前面的符号，能否以类似于定义 1 的办法，

由排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 加以确定呢？定义 2 将给予肯定的回答。

定义 2 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

这里 Σ 是对行列式中所有的不同行不同列的 n 个元素的乘积求和。

下面我们说明定义 2 与定义 1 等价。

事实上，只要将乘积 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 的各因子适当对换，便可把它排成

$$a_{1j'_1}a_{2j'_2}\cdots a_{nj'_n}$$

按定义 1，它前面的符号是

$$(-1)^{\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')}$$

现在只须说明

$$(-1)^{\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$$

我们知道，乘积 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 每作一次两因子的对换，元素的行标作成的排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 与列标作成的排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 都同时作了一次对换，即 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 与 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 同时改变奇偶性，因而它们的和

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)$$

的奇偶性不改变，因此在若干次因子对换之后，

$$\begin{aligned}&(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}\\ =&(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')}\\ =&(-1)^{\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')}\end{aligned}$$

定义 2 的好处在于行指标与列指标的地位是对称的。比如我们可以把行列式D写成

$$D=\sum_{i_1 i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)+\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{i_1 j_1}a_{i_2 j_2}\cdots a_{i_n j_n}$$

其中 $j_1 j_2\cdots j_n$ 是某固定的 n 阶排列。特别地有

$$D=\sum_{i_1 i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$$

例3 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将D反时针转90°得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix}$$

证明 $D_1=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$。

证明 令

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \cdots & b_{n-1,n} \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $b_{ij}=a_{j,n+1-i}(i,j=1,2,\cdots,n)$。按定义1，有

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n} \\
&= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_1n}a_{j_2,n-1}\cdots a_{jn1} \\
&= (-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 21)} \\
&\quad\times\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)+\tau(n(n-1)\cdots 21)}a_{j_1n}a_{j_2n-1}\cdots a_{jn1} \\
&= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D
\end{aligned}
$$

习　　题

1. 计算下面排列的反序数
   1) 523146879;
   2) $123\cdots n$;
   3) $n(n-1)\cdots 21$;
   4) $(2k)1(2k-1)2\cdots(k+1)k$;
   5) $k12\cdots(k-1)(k+1)\cdots n$;
2. 写出1，2，3，4的一切排列，并指出奇排列和偶排列各占多少。
3. 证明1，2，…，n的偶排列的总数等于其奇排列总数。
4. 如果排列$i_1i_2\cdots i_{n-1}i_n$的反序数是k，那么排列$i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1$的反序数是多少？
5. 指出下列乘积哪些包含于相应阶数的行列式中，带有怎样的符号。
   1) $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$;
   2) $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$;
   3) $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$;
   4) $a_{12}a_{23}a_{34}\cdots a_{n-1,n}a_{kk}(1\leqslant k\leqslant n)$;
   5) $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}\cdots a_{2n-1,2n}a_{2n,2n-1}$.
6. 选取i和k的值，使得乘积

$a_{4i}a_{63}a_{1j}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$

含于7阶行列式中且带正号。

7. 写出4阶行列式中一切带有负号且含元素 a_{23} 的项。

8. 由行列式定义证明

1）
$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

2）
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

9. 按行列式定义计算

1）
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

2）
$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & y & e & f \\ j & w & g & h \end{vmatrix}$$

3）
$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

4）
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

10. 求出行列式
$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$
包含 x^4 和 x^3 的项。