高等学校教学用書

高等代数

上 册

張禾瑞 郝鈵新編

高等教育出版社

高等学校試用教材

高 等 代 数

上 册

張禾瑞 郝鈵新編

高等教育出版社

本書是根据中华人民共和国教育部編訂的师范学院数学系高等代数試行教学大綱編写的。可作为师范学院数学系高等代数的試用教材，又师范專科学校使用本書作为試用教材时，可根据其教学大綱刪去書中某些章节。

全書分上，下册出版。

高 等 代 数

上 册

張禾瑞　郝鈵新編

高等教育出版社出版 北京琉璃廠170号

（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）

京华印書局印刷　新华書店总經售

統一書号13010·266　開本850×1168 1/32　印張6 11/16　字數169,000　印數0001—8,000

1957年12月第1版　1957年12月北京第1次印刷　定價（8）￥0.80

序

一、这本書是按照中华人民共和国教育部頒布的师范学院数学系高等代数試行教学大綱編写的。我們并且作了一些安排，使得师范專科学校也可以無困难地采用这本書。

二、我們力求本書結構清楚，論証严格，但同时在照顧初进大学学生的接受能力方面也給与了極大的注意。

三、根据我們試教的經驗，在师范学院教学計划的規定的时間內，講完本書的全部內容是沒有困难的。在特殊情况下，§34 根的存在定理和 §38 代数基本定理的証明可以略去。如果不預备講圓規直尺作圖問題，关于向量空間的 §14 也可以略去。

四、师范專科学校使用本書作为教材时，可以根据教学大綱删去其中某些章节。

五、每节后面都附有一些習題，以供选擇。这些習題一部分可以留作家庭作業，一部分可以作为課堂習作的內容。为适应学生的不同程度，習題中也有較費思考的，但这只是少数。

六、我們主要参考了以下几本書：庫洛什，高等代数教程；奧庫涅夫，高等代数；里亞平，高等代数教程；張禾瑞，近世代数基础。至于其他的参考書不再一一列举了

七、本書所用的名詞，除極个別的以外，都采自中国科学院編訂的“数学名詞”。

八、在編写过程中，一些同志提出了不少宝貴意見。北京大学数学力学系代数教研組把他們搜集的習題提供我們参考。在这里一并表示感謝。

希望本書讀者多加指正。

作 者 1956年10月

目　录

第一章 行列式

§1. 数环和数体

中学代数的內容是多种多样的，大体包括以下題材：数的概念的發展，多項式及方程，無理式及無理方程，不等式，級数，指数，对数，排列組合等等。但从近代科学分类眼光来看，其中的不等式，級数，指数，对数，排列組合等都不屬于代数的范圍。事实上，中学代数仅是一个教学科目，其中包含着数学教育初步所需的必要內容。作为大学基础課程之一的高等代数与中学代数性質不同。在高等代数里，代数被当作一門科学来加以討論，为了保持科学的系統性，高等代数不討論中学代数中的那些非代数的內容。

高等代数的主要內容是多項式論以及与这一概念有密切关系的一些題材，如行列式，矩陣等。这些題材都是学習其他数学科目以及物理等所不可少的知識。我們要注意一点，这里所說的多項式論是包括方程論在內的。按近代数学的观点，方程論屬于多項式論的范疇。

多項式是比較古典的題材，但这并不是說，处理这一題材的方法也必須是古老的。我們將引入一些近世代数的基本概念。这样能够使多項式的理論得到更全面更系統的处理，同时也为进一步学習代数打开門徑。

这些近世代数的基本概念是比較抽象的，初学高等数学的人接受起来可能有些困难，所以其中的大部分只能以后逐漸引入。但是有兩个基本概念比較具体也比較簡單，我們还是要一开始就介紹它們；这样才能保持本課程的一定的科学系統性。这兩个概念就是数环和数体。

我們在中学代数里曾經遇到四种数目，就是整数，有理数，实数和复数。以下我們分别把全体整数，全体有理数，全体实数和全体复数叫做整数集，有理数集，实数集和复数集。数环和数体就是由这四个数集中总結出来的概念。这兩个概念是很重要的，它們在近代数学的許多部門中都有着非常广泛的应用。

由于以后主要是討論多項式，所以我們就借着多項式来介紹这兩个概念。

在討論多項式时有一个很重要的問題，就是多項式系数的范圍。比方說，分解多項式 x^4+x^2-6 的因子，在整数或有理数的范圍內是：

$$x^4+x^2-6=(x^2-2)(x^2+3);$$

在实数范圍內是：

$$x^4+x^2-6=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^2+3);$$

在复数范圍內是：

$$x^4+x^2-6=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{3}i)(x-\sqrt{3}i).$$

由此可見，在不同的范圍內討論多項式所得的結果可能不同，所以系数范圍問題在多項式理論中占一个很重要的地位。在中学代数里，多項式系数的范圍就是整数集，有理数集，实数集或复数集，不过在那里沒有把范圍問題明确提出来。高等代数作为一門科学，对于这样一个基本問題必須加以明确。

我們把任意若干个数的全体叫做一个数集。比方說，全体偶数是一个数集，1, 2, 3, 4, 5 五个数也做成一个数集。我們問，在討論多項式时，是否任意一个数集都可以取作系数的范圍；假如不然，什么样的数集才能取作系数的范圍？能够回答这一問題，才能对系数范圍問題有一个总的而明确的了解

为了达到这一目的，讓我們看一看，在討論多項式时，所以能够用整数集，有理数集，实数集和复数集作为系数的范圍，到底是由于这四个数集的哪些特性。

先来看一个很簡單的数集，就是由 1, 3, 5, 7, 9 五个数組成的数集。我們說，我們不能用这个数集作为多項式的系数范圍来討論多項式。比方說，看兩个多項式：$x+3$, $x+5$。这兩个多項式的系数都屬于这个数集，但是假如把它們加一加，减一减，乘一乘，那末所得多項式的系数就都已出了这个范圍。以这个数集作为多項式系数的范圍，連最基本的运算加，减，乘都不能做，因此更無法做进一步的討論。反过来，讓我們看一看上面所說的四种数集。首先看整数集。我們都知道，兩个整数的和，差，积仍然是整数，因此沒有出整数的范圍。其次兩个有理数的和，差，积也仍然是有理数，而实数集和复数集也有同样性質。事实上，正是这四个数集的这一共同性質，也就是說，不出本身范圍可以做加法，减法和乘法，使得这四个数集能够作为討論多項式的基础。因为在这样的数集上討論多項式至少可以做多項式的加法，减法和乘法，因而有了作进一步討論的起碼条件。

为了把具有这种性質的数集和其他的数集区分开来，我們給这样的数集起一个名字，叫做数环。

定义 1. 令 R 是一个数集。当下列条件被滿足时，就把 R 叫做一个数环：

1) R 至少含有一个数；

2) 若 a, b 屬于 R，那末 $a+b$, $a-b$ 和 $a\cdot b$ 也都屬于 R。

整数集，有理数集，实数集和复数集都是数环。数环是非常多的，我們看几个例子：

例 1. 数零組成一个数环。

例 2. 全体偶数組成一个数环。

例 3. 令 n 是一个固定整数。一切 n 的倍数組成一个数环。

例 4. 一切形式如 $a+b\sqrt{2}$ 的数，此处 a 与 b 是任意整数，組成一个数环。

例 5. 全体奇数不是一个数环。事实上，兩个奇数的和已不

再是奇数。

在一个数环上，也就是說，在一个可以施行加，减，乘三种运算的数集上固然可以討論多项式，但是在一个数环上来討論多项式还是不太方便的，因为在这一情况下，一般不能进行多项式的除法。例如，在整数环上討論多项式时，就不能用 $2x+1$ 去除 x^2+ $+2$。

所以要打算很好地討論多项式，系数的范圍应該是能够施行加，减，乘，除四种运算的一个数集。事实上，我們所熟知的四个数集中就有三个具有这种性質。这样的数集叫做数体。

定义 2. 命 P 是一个数环。当下列条件被滿足时，就把 P 叫作一个数体：

1) P 至少含有兩个数；

2) 若 a, b 是 P 中的任意兩个数，且 $b\neq 0$，那末 $\frac{a}{b}$ 也屬于 P。

有理数集，实数集和复数集都是数体。我們再来看几个例子：

例 6. 一切形式如 $a+b\sqrt{2}$ 的数，此处 a 与 b 是任意有理数，組成的数集 P 是一个数体。

事实上，P 显然是一个数环，并且不只含有一个数。

設 $a+b\sqrt{2}$ 与 $c+d\sqrt{2}$ 是 P 中的任意兩个数，且 $c+d\sqrt{2}\neq$ $\neq 0$。此时 $c-d\sqrt{2}$ 也不等于零；因为若是 $c-d\sqrt{2}=0$，那末由于 $\sqrt{2}$ 是無理数，必須 $c=d=0$，因而 $c+d\sqrt{2}$ 也等于零；这与假設矛盾。因此

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}.$$

因为 a, b, c, d 都是有理数，所以 $\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}$ 与 $\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}$ 也是有理数，即 $\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}$ 屬于 P。

例 7. 一切形如 $a+bi$ 的数，此处 a, b 是任意有理数，組成一个数体。

以下几章都是以一个数体作为討論的基础。至于数环，以后才会用到。

在一个任意数体上討論多項式，除了范圍确定以外，还有一个主要优点，就是：这样所得的結果具有一般性。比方說，要解方程組

$$a_1x+b_1y=c_1,$$

$$a_2x+b_2y=c_2.$$

在中学代数里，最初是在有理数的范圍內来討論这一問題的（因为在討論这一問題时实数和复数都还沒有引入）。引入实数和复数后，我們就直接承認，以前所得的結果在实数或复数范圍內都成立。但严格說来，这样做在理論上是有一些欠缺的。假如我們在一般的数体上来討論这一問題，那末所得的結果对于任何一个特殊的数体自然都成立。特別对于有理数体，实数体和复数体来說也都成立。

最后，我們証明数体的一个重要性質。

定理 任何数体都包含有理数体。

証 設 P 是任意一个数体。因为 P 至少含有兩个数，所以 P 一定含有一个不等于零的数 a。因此 $\frac{a}{a}=1$ 也屬于 P。以 1 与它自己重复相加，可得全体正整数，因而全体正整数都屬于 P。另一方面 $a-a=0$ 也屬于 P。所以 P 也含有 0 与任一正整数的差，亦即含有全体負整数。因此全体整数都屬于 P。这样，P 也包含任意二整数的商（分母不为零），因而 P 包含全体有理数。

習　題

1. 下列数集是不是数环？

   i) 全体正整数；

   ii) 一切形如 $a+b\sqrt{3}i$ 的数，此处 a 与 b 是任意有理数；

   iii) 一切形如 $b\sqrt{5}$ 的数，此处 b 是任意整数；

   iv) 一切分母是 2 的非負整数次方冪的不可約分数；

v) 一切形如 $\frac{2n}{2n+1}$ 的数，此处 n 是任意整数。

2. 上題的五个数集中哪些是数体？

3. 有沒有只含兩个数的数环？假如有，举出实例；假如沒有，严格加以証明。

4. 令 P_1 与 P_2 是兩个数体，而 P 是一切既屬于 P_1 又屬于 P_2 的数所成的集合。証明 P 也是一个数体。

5. 在上題里，設 P_1 是一切形如 $a+b\sqrt{2}$ 的数所成的数体，P_2 是一切形如 $a+bi$ 的数所成的数体，这里 a, b 是有理数，那末 P 等于什么？

§2. 二阶和三阶行列式

在关于多項式及方程的討論中，我們从一次方程組开始。

我們將把一次方程組叫做綫性方程組。

与中学代数不同，我們將討論含有任意个未知量任意个方程的綫性方程組。

綫性方程組的一般形式是：

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n&=b_m, \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 代表未知量，$a_{ij}(i=1, 2, \cdots, n, j=1, 2, \cdots, n)$ 代表未知量的系数，$b_1, b_2, \cdots, b_m$ 代表常数項。

我們將要在一个任意数体上来討論綫性方程組，也就是說，方程組中未知量的系数及常数項都假定屬于任意一个固定的数体 P。

綫性方程組 (1) 的一个解指的是数体 P 中这样的一組数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，用它們分別代 (1) 中的未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 后，(1)的每一方程都变为恒等式。

討論綫性方程組主要的是判定一个方程組是否有解，假如有解，确定解的个数并求出一切解来。关于这样的一般問題將在第二章中徹底解决。

在这一章里，我們先討論形式比較特殊的綫性方程組，卽方程的个数与未知量的个数相等的情形。在討論这一問題的过程中將要用到一个工具，就是行列式。

行列式是一个很重要的概念，它在数学的許多部門中都有着非常广泛的应用。

行列式起源于解含有兩个或三个未知量的綫性方程組。我們先从含有兩个未知量的綫性方程組开始。

我們看綫性方程組

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2&=b_2. \end{aligned} \tag{2}$$

为了求这个方程組的解，我們用 a_{22} 乘第一个方程，用 $-a_{12}$ 乘第二个方程，然后相加，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2.$$

同理可得 $$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

若是 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq0$，那末

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{3}$$

容易驗証，所得未知量 x_1 与 x_2 的值滿足方程組(2)，因此(3)是方程組(2)的一个解。以后我們还可以看出，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq0$ 时，(3)是方程組(2)的唯一解。

現在讓我們来仔細研究一下公式(3)。在这个公式里，x_1 与 x_2 的分母都是 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$。它只含有方程組(2)的未知量的系数。假如把(2)中未知量的系数列成下表：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}. \end{matrix}$$

我們就会看到，由位在表中左上角及右下角的兩个数的乘积减去位在右上角及左下角的兩个数的乘积剛好就是(3)的公分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$。我們把代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 叫做一个二阶行列式，

并且用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

来表示。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 叫做二阶行列式的元素。

我們約定，在一个行列式里，把横排叫做行，縱排叫做列。

現在再来看(3)中的分子。注意一下，就会看到，把分母中的 a_{11} 与 a_{21} 依次换为方程組(2)的常数項 b_1 与 b_2 就得到 x_1 的分子，把分母中的 a_{12} 与 a_{22} 依次换为常数項 b_1 与 b_2 就得到 x_2 的分子。这样，依照上面的符号，可以把这两个分子写成

$$b_1a_{22} - a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad a_{11}b_2 - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix};$$

而公式(3)可以写成行列式的商的形式：

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{4}$$

当含有两个未知量两个方程的綫性方程組的系数所作成的系数行列式不等于零时，可以用公式(4)来求方程組的解。这种求解法是比較簡便的。

例 1. 解方程組

$$2x_1 + x_2 = 7,$$
$$x_1 - 3x_2 = -2.$$

这个方程組的系数行列式是

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$$

因此可以应用公式(4)。用方程組的常数項 7 与 −2 来代替行列式 D 的第一列，就得到 x_1 的分子 D_1，用 7 与 −2 来代替 D 的第二

列就得到 x_2 的分子 D_2:

$$D_1=\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=-19, \qquad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-11.$$

由公式(4)得 $$x_1=\frac{19}{7}, \qquad x_2=\frac{11}{7}.$$

現在看一个含有三个未知量三个方程的綫性方程組

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3&=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3&=b_3. \end{aligned} \tag{5}$$

为了求这个方程組的解，我們分別用 $a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$, $a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}$, $a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$ 乘第一，第二，第三个方程，然后相加。經过簡單的計算我們得出等式:

$$\begin{aligned} (a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}- \\ -a_{11}a_{23}a_{32})x_1=(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}- \\ -a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}). \end{aligned} \tag{6}$$

在等式(6)中，x_1 的系数是

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}- \\ -a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned} \tag{7}$$

我們把这个代数和叫做一个三阶行列式，并且用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{8}$$

来表示。$a_{11}, a_{12}, \cdots$ 叫做这个行列式的元素。

計算三阶行列式有一个規則，就是所謂对角綫規則。

在上面的三阶行列式里，从左上角到右下角的对角綫叫做主对角綫。从右上角到左下角的对角綫叫做第二对角綫。(7)式中有三項的符号是正的。其中的一項是位在主对角綫上三个元素的乘积；其他兩項中的每一項都是位在主对角綫的一条平行綫上的

兩个元素与对角上的元素的乘积。利用第二对角綫可以类似地得出(7)式中有負号的三項的構成規律。这样我們得到了計算三阶行列式的一个方法。我們把計算規則用下面的兩个圖来表示:

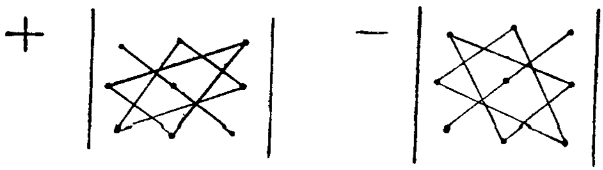

圖 1.

左圖指出計算三阶行列式的正項的規則，右圖指出計算負項的規則。

例 2.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot5+1\cdot1\cdot2+2\cdot(-4)\cdot3-$$

$$-2\cdot3\cdot2-1\cdot(-4)\cdot5-2\cdot1\cdot3=$$

$$=30+2-24-12+20-6=10.$$

現在我們再来看等式(6)，它的右端剛好就是把左端 x_1 的系数中的 a_{11}, a_{21}, a_{31} 分别換成(5)的常数項 b_1, b_2, b_3，換句話說，就是把行列式(8)的第一列換成(5)的常数項而得到的一个三阶行列式，这个行列式用 D_1 来表示:

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

若以 D 表示行列式(8)，那么等式(6)可以写成

$$D\cdot x_1=D_1. \tag{9}$$

同样，以 $a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33}$, $a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}$, $a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23}$ 分别乘(5)中的方程，然后相加可得

$$D\cdot x_2=D_2, \tag{10}$$

以 $a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}$, $a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32}$, $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 分别乘(5)中的方程,然后相加,可得

$$D\cdot x_3=D_3, \tag{11}$$

此处

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

若 $D\neq 0$, 由(9), (10), (11)得

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \qquad x_2=\frac{D_2}{D}, \qquad x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{12}$$

把未知量的值(12)代入方程組(5),不難算出,(5)中的方程都被滿足,因此(12)是方程組(5)的解。以后还会看到,(12)是方程組(5)的唯一解。

例 3. 解方程組

$$\begin{aligned} 2x_1-4x_2+x_3&=1,\\ x_1-5x_2+3x_3&=2,\\ x_1-x_2+x_3&=-1. \end{aligned}$$

首先計算行列式 D:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-8\neq 0.$$

所以可以应用公式(12)。

再計算其余的三个行列式:

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=11.$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=9.$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2 & -4 & 1\\ 1 & -5 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=6.$$

由公式(12)得

$$x_1=-\frac{11}{8},\qquad x_2=-\frac{9}{8},\qquad x_3=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}.$$

習　　題

1. 計算下列三階行列式:

(i) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}$;　　　(ii) $\begin{vmatrix}0 & a & 0\\ b & 0 & c\\ 0 & d & 0\end{vmatrix}$.

2. 証明下列等式:

(i) $a_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix}a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$;

(ii) $\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)$.

3. 利用三階行列式解方程組:

$$\begin{aligned} bx-ay&=-2ab,\\ -2cy+3bz&=bc,\\ cx+az&=0,\end{aligned}$$

其中 a, b, c 均不等于 0。

§3. 排列和置换

在上一节我們由解含兩个未知量和三个未知量的綫性方程組引出了二阶和三阶行列式，并且看到，利用行列式来解綫性方程組是很便利的。因此就会想到，是否可以把二阶和三阶行列式推广为 n 阶行列式，从而利用这一工具来解含有 n 个未知量的綫性方