东北师范大学函授講义

高等代数

上册

方嘉琳 編
張立仁 校閱

吉林人民出版社
1957·長春

高 等 代 数

上 册

方 嘉 琳 編
張 立 东 校訂

吉林人民出版社

1957·長 春

东北[illegible] [illegible]代[illegible] 方嘉琳 編

函授 [illegible] 張[illegible]仁 校閲

吉林人民出版社[illegible] [illegible]业許可証出字第1号

長春新生企业公司[illegible] [illegible]店发行

开本：850×1168 1/32 印張[illegible] [illegible]000字 印数：9,500册

1957年7月第1版 [illegible]第1版第1次印刷

統一書号：13091·10 定价(8)：0.55 元

目　次

序　　言

代数这門科学，是一个古老的数学分支，在数学中占有重要的地位。它首先开始于方程的討論。在远古时期就有人从事于这个問題的研究。远在公元前2000年，在古巴比倫就已經能够解决二次方程的問題，利用造表的帮助甚至可以解决一些三次方程的問題。直到十九世紀，在这样長的时間里，代数的基本問題就停留在代数方程的解法及有理函数性質的研究上。

由于研究方程的解法，引导出一些理論。开始时，这些理論仅是解方程的輔助工具，以后逐漸扩展，广泛的应用到数学或其它門科学中，而形成了代数的独立分支。如由于研究代数方程可否用根式求解而产生了群論，对于整个数学的发展有着重要的意义；由于研究綫性方程組的解而发展为向量和矩陣的理論，形成了綫性代数学。它对于数学分析，几何以及物理都有着非常重要的意义。又如环論、体論、伽罗华理論、代数柘朴学等等也都是如此。这些內容就形成了近世代数的基本內容。它的中心問題是研究各种代数結構的性質的，相对而言关于方程的解法及有理函数性質的研究通常称为古典代数。

近世代数的历史虽然較短，近百年来才获得蓬勃的发展，但是它在数学以及有关的某些科学領域里却起着重要的作用。近世代数不仅扩大了代数的研究范圍，改变了代数的研究对象及研究方法，同时代数里的方法和結果也广泛的应用到其它的有关科学里，推动了其它門科学的发展。甚至初看起来似乎与代数无关的某些問題也获得了解决。

代数这門科学在不断的发展和变化着，并不是已經固定了的理論。它所包括的內容又是丰富而广泛的。若問代数是什么？很难用簡短的語言給予一个詳尽而完整的說明。

在高等代数这門課程里，將从事多項式代数与綫性代数的初步研究，这些內容都是学习其它数学科目以及物理，天文等必不可少的知

識。这些題材虽然都是古典的，但是在我們处理的方法和观点上，却要引进一些近世代数的基本概念。这样不仅能更全面更系統地处理了我們的題材，給进一步学习代数打开門徑，同时在本課程中获得的結果也得到了广泛的应用。

这些近世代数的基本概念是比較抽象的，对于初学高等数学的人来說可能有些困难，为了能很好的掌握这些概念，將在多項式代数的前面介紹，首先只是在数的范圍里討論。

本教科書是依据1954年部頒师范学院数学系高等代数教学大綱編写的。主要参考：

А.Г. Курош: Курс Высшей алгебры.

Л.Я. Окунев: Высшая алгебра.

Е.С. Ляпин: Курс Высшей алгебры.

В.И. Смирнов: Курс Высшей Математики том III. часть I.

等書。曾在东北师范大学数学系本科使用过三次，函授本科使用过一次，專修科使用过兩次（其中一部分）。做过兩次修改。但由于作者的业务水平所限，錯誤之处在所难免，請讀者及时指教。

在編写时，我曾对教材的系統性，各章节的目的性，做过一定的努力。材料紧湊，清晰严整是我的希望。

本書在編写与修改过程中，获得了教研室主任張立仁同志及張海权同志、姜儒明同志、高緒鈺同志、陈輝同志的大力支持，并提出許多宝貴意見。特别是賀昌亭同志曾連續参加教学与本書的修改工作，提出意見較多，并有一部分是由他完成的。为此对他們表示衷心的感謝。

这本書可供高等师范学校本科一、二年級学习或参考用。也可供具有高中水平数学爱好者进修用及某些中学数学教师进修或参考用。

編者 1957 元旦

第一篇　綫性代数初步

正如序言中提到的，我們將在数的范圍里展开綫性代数初步的討論。

在中学已經学到了各种数（如：正数、負数、整数、分数、有理数、无理数、实数、虛数等等），并且也初步的掌握了各种数的运算。但是对于某些数的概念，在中学的課本里并未能給予明确的說明，以致有些学生在概念上不够清楚。如常錯誤的以为每一个无理数都是不尽根，是从有理数开方得来的；虛数是一个符号，沒有什么实际意义等等。各种数中間的关系也不够清楚，如复数能否是正数，零是否是自然数等。虽然有关数的知識，將有“数的概念”給予詳尽的闡述，但为了学习高等代数，首先也必須正确的掌握数的概念。

我們用数集来表示任意若干个数的集合。显然数集可以是各种各样的，如 1，2，3，4 等 4 个数是一个数集；0 自己是一个数集；全体奇数是一个数集；全体負数也是一个数集等等。但在数集中，有四个最重要的数集，是一切学习数学的人所必須清楚掌握的。即整数集、有理数集、实数集和复数集。

全体正負整数和零構成整数集，用符号 Z 来表示。全体正負分数和零構成有理数集，用符号 R 来表示。显然有理数集包含着整数集。这些数集都是大家所熟悉的。

无理数的概念，虽然在中学里掌握得不够清楚，將来在数学分析里要詳細講授。对于学习高等代数来說，只要能正确地掌握了中学代数的知識就已足够。也就是說，无理数是无限非循环小数。全体有理数及无理数構成实数集，用符号 D 来表示。

在中学里最后引入复数。全体复数構成复数集，用符号 K 来表示。当然在中学所学过的复数，是从“虛”数出发的，未曾明确它的实际意义，因而它的眞实性及合理性都值得怀疑。实际上，在十八世紀以前，即复数的概念还沒有被充分認識以前，是被人看做是神秘的，虛

想出来的数。直至十九世紀才得到充分的認識。以后复数的应用是很广泛的，在許多工程上和科学理論上，都起了很大的作用。因此我們以后要討論复数的意义。

数集的概念对于所討論問題的范圍来說有着重要的意义。譬如我們回忆一下在中学所熟悉的多項式因子分解問題。如对多項式 x^5+x^4-4x-4 分解因子，則將有下列三种答案:

1） $(x+1)(x^2-2)(x^2+2)$;

2） $(x+1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^2+2)$;

3） $(x+1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$.

这三种答案那个是正确的呢？如籠統的問就沒法判断。这三个答案实际上都是正确的，只看是在甚么样的范圍里討論就是了。在整数集或有理数集里1）是正确的；在实数集里2）是正确的；在复数集里3）是正确的。由这个例子又可看出，在不同的范圍里討論同一个問題就可能得出不同的結果。所以范圍問題在高等代数里占着一个很重要的地位。在中学代数里虽然沒有明确的提出来范圍問題。但实际上就是在整数集、有理数集、实数集和复数集上討論的。由于数的概念逐步扩張，討論的范圍也逐步扩大。

我們已經看到明确討論范圍是必要的，那么我們研究問題將选取甚么样的范圍呢？为了明确討論范圍問題，先来观察一些数集在运算中所具有的性質。若在一个数集內，对于任意二数施行某一算术运算，其結果仍屬于該数集时，就說这个运算在該数集內是可施行的。

譬如在正整数集中可以施行加法及乘法运算，其中任二数的和与积仍屬于正整数集中，但不能施行减法及除法运算。在复数集中可以施行加、减、乘、除（以0除除外）四种运算。其和、差、积、商仍在复数集中。然而从某些数集的特殊性質里，也可以找到一些共同的性質。譬如在Z、R、D、K等的数集中，都可以施行加法、减法、乘法运算。在R、D、K等数集中，可以施行加法、减法、乘法、除法（以0除除外）的运算，我們就以一些共同的性質，来討論一些价值更大的数集，先来討論数环。

定义：凡是可以施行加法、减法及乘法諸运算的数集，叫做数环。

上述的Z、R、D、K都是数环。但正整数集不是数环，因为不能施行减法运算。負实数集也不是数环，因为不能施行乘法运算。是否只有上述的四个数集才是数环呢？不是，数环是很多的。我們現在举几个例子：

1. 偶数集 $\{2m\}$ 是数环；但奇数集 $\{2m+1\}$ 不是数环。（m 是任意整数）。

实际上，任意二偶数之和、差、积仍为偶数；而二奇数之和不再是奇数。

2. a，b 为任意有理数，则形式如 $\{a+b\sqrt{2}\}$的数集是数环。这个数环包含有理数集及$\sqrt{2}$。

实际上，在形式如 $a+b\sqrt{2}$ 的数集中，任意两个数 $a_1+b_1\sqrt{2}$ 及 $a_2+b_2\sqrt{2}$ 的和为 $(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{2}$，差为 $(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\sqrt{2}$，积为$(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2}$，显然都是 $a+b\sqrt{2}$ 的形式，系数也都是有理数。因此这个数集是数环。当 a 为任意有理数，b 为 0 时，则得出全部有理数。而当 a 为零，b 为 1 时，则为$\sqrt{2}$。故有理数集及$\sqrt{2}$ 都被包含在这个数环中。

3. a，b为任意有理数，形式如 $a+b\sqrt[3]{2}$ 的数集不是数环，因为 $a+b\sqrt[3]{2}$同它自己的乘积不能写成$a+b\sqrt[3]{2}$ 的形式。但所有形式如：

$$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$$

的数集構成数环，其中 c 也是任意有理数。其証明留給讀者。

以上的几个例子都是在实数范圍里的。在复数的范圍里，也可以举出一些数环的例子来，由于我們对于复数的意义还需要重新闡述，所以在这里暂时不举。

数环的例子是不胜枚举的，在这些数环里，再討論一种最重要的特殊的数环，即数体（数域）。

定义：在至少有一个異于零之数的数环內，如果可以施行除法（以零除除外），則此数环叫做数体。

至少有一个異于零之数的条件，只是限制了仅有 0 的数集不是数体。

以上我們曾經見到在R、D、K中都能施行除法，所以它們都是数体。即有理数体、实数体、复数体。但整数环不是数体。

在数环中的例子里，有的是数体，有的不是数体。显然例1不是数体，因为在其中不能施行除法。而例2是数体。

实际上，任意兩个数 $a_1+b_1\sqrt{2}$ 及 $a_2+b_2\sqrt{2}$，如 $a_2+b_2\sqrt{2}\neq 0$，則 $a_2-b_2\sqrt{2}\neq 0$。

$$\frac{a_1+b_1\sqrt{2}}{a_2+b_2\sqrt{2}}=\frac{(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}{(a_2+b_2\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}$$

$$=\frac{a_1a_2-2b_1b_1}{a_2^2-2b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}\sqrt{2}$$

其商仍为 $a+b\sqrt{2}$ 的形式，且其系数也都是有理数，故此数环是数体。同理，我們將 $\sqrt{2}$ 换为R中任意一个非平方数的平方根时，也都可以構成数体。

从上面数体的例子里，我們可以看到它含有有理数体。但是否所有的数体都包含有理数体呢？我們有下面的定理。

定理：任何数体內均含有有理数体R。

証明：用P表示任一数体。因P中最少有一个異于零的数，設 a 为P中任一異于零的数，則P含有 a 除 a 的商即 $\frac{a}{a}=1$。以1与其自己重复相加，可得出全部正整数也屬于P。在P中也含有差 $a-a$，即零。及零減任一正整数的差，即全部負整数。在P中也含有任二整数（分母不为0）的商，即全部有理数。所以任一数体P均含有全部有理数，即含有有理数体R。

由此也推得有理数体是最小的数体。

掌握了数环和数体的概念，我們就开始在任意的数体上展开綫性代数的初步討論。

为什么將数体做为我們的討論范圍呢？因为不能施行运算的数集在代数中沒有任何价值。数体是能施行加、減、乘、除等四种运算的。而我們所討論的問題能且只能遇到这四种运算。所以以数体做为我們的討論范圍，是恰好够用的。同时就着任一数体討論得的結果，对于任一具体的数体都能适用，就不必將一个結論就着每个具体的数

体都做討論。这样就簡化了我們的討論，也使我們所討論的結果价値更大。

习　题

1. 下列数集是否是数环？

a）全体正整数的数集；

b）只由一个数 0 組成的数集；

c）全体正眞分数（即分子小于分母）的数集；

d）形为$\frac{\beta}{2^k}$的数集（β 为奇数，k 为一切非負整数）。

2. 試証任意数环都含有数 0 。

3. 試証明形如 $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ 的数集構成数环（a，b，c为任意有理数）。

4. 設 P_1，P_2 是兩个数体，P 是一切既屬于 P_1 又屬于 P_2 的数所組成的数集。試証 P 是一个数体。幷举一实例。

5. 有沒有只含兩个数的数环？何故？

6. 由 $2a$ 和 $3a$ 的全体能否構成数环？（a 为任意整数）

第一章 行 列 式

在中学我們曾經初步討論了二元一次联立方程，知道了求解公式以及解的个数有各种情形。但通常会遇到未知量的个数不只是兩个，方程的个数也不只是兩个的这类方程組。为了掌握普遍的理論，在这兩章里我們来研究帶有許多未知量的綫性方程組，即多元一次联立方程組。为了討論方便起見，首先規定用 x_1，x_2，…，x_n 表示未知量。用 a_{ij} 表示各未知量的系数。用 b_i 表示常数項。下标 i 表示第 i 个方程；j 表示第 j 个未知量。我們所討論的方程，其系数屬于一固定的数体 P，即 a_{ij} 及 b_i 都是数体 P 的数。于是綫性方程組的一般形式可以写成：

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+a_{s3}x_3+\cdots\cdots+a_{sn}x_n=b_s.\end{array}\right\}\quad(1)$$

如果在 p 內有一組数 k_1，k_2，…，k_n，用 k_i 代替对应的未知量 x_i 后，方程組（1）都成为恒等式时，則这組数 k_i 称为方程組（1）的一个解。

如同在中学看到的情形一样，綫性方程組可能只含有一个解，可能含有很多个解，也可能沒有解。例如，方程組

$$\left.\begin{array}{l}3x_1-x_2=1,\\ 6x_1-2x_2=2.\end{array}\right\}$$

就有无穷多解；$x_1=k$，$x_2=3k-1$，不論 k 为任何数都是該方程組的解。而方程組

$$\left.\begin{array}{l}x_1+5x_2=1,\\ x_1+5x_2=7.\end{array}\right\}$$

就沒有解。任何一組数都不能使这兩个方程式同时成为恒等式。这样的方程組叫做矛盾方程組。

綫性方程組的問題，主要是判断方程組是否有解？有若干解？如

何求解？普遍的理論在第二章中討論。在本章里只討論方程式的个数等于未知量的个数，而且仅有一个解的特殊情形。

这种情形我們要以行列式为工具，为此在本章里先討論行列式的理論，然后再解决我們的問題。当然行列式的理論，在其它門科学中也有广泛的应用，并不只限于解綫性方程組。在本教材里以后我們会看到，它也可以应用在消去法的理論上。

行列式的概念，产生于解多元一次方程式的方程組。这种思想最早出現在萊卜尼茲在1693年給洛必大的信中。在1850年基儿哈特在萊卜尼茲的遺稿中发現，直至发現前一直被埋沒着。

行列式理論实际上起源于1750年，格拉姆在关于代数曲綫的書上公布。和萊卜尼茲一样，也是从解綫性方程組出发的。

§1. 二阶与三阶行列式

为了討論綫性方程組的普遍理論，首先从含有兩个与三个未知量的綫性方程組开始。設給于含有兩个未知量兩个方程式的綫性方程組

$$\left.\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

对（2）式用消去法，我們得出

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$
$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

設 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，則

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \qquad (3)$$

將这組值代入方程組（2），容易驗証它是組（2）的解。关于这一解的唯一性問題，以后就可以看到。

（2）的系数可以排成下表

$$\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{matrix} \qquad (4)$$

（3）式的公分母，可經（4）的数表示出来，它等于左上角

与右下角两个数的乘积，减去另外两个数的乘积。这个数称为（4）的行列式即二阶行列式，用下面符号表示之：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

乘积 $a_{11}a_{22}$ 及 $a_{12}a_{21}$ 称为二阶行列式的項。而 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为二阶行列式的元素。例如，

$$(1)\quad \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 4 - 7\cdot 1 = 5;$$

$$(2)\quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 5 - (-2)3 = 11.$$

在（3）式中，分子和分母有相类似的形狀，当然分子也可以表为二阶行列式。其中 x_1 的分子，是从（4）中，把第一列换为組(2)的常数項列所决定的行列式。而 x_2 的分子是从（4）中把第二列换为組（2）的常数項列所决定的行列式。由系数所組成的行列式通常称为系数行列式。

現在可以把（3）式写成

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

于是得到了关于含兩个未知量兩个方程式的綫性方程組，当系数行列式不为 0 时的求解法則，这个法則叫做克莱姆法則。

例。解方程組

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 7, \\ x_1 - 3x_2 &= -2. \end{aligned}\right\}$$

其系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7,$$

其值不为零，故可应用克莱姆法則求解，分子各为

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -19, \quad \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -11.$$

于是得到了方程組的解为

$$x_1=\frac{19}{7},\quad x_2=\frac{11}{7}.$$

引入二阶行列式在解含兩个未知量的兩个綫性方程組时，幷不感到簡便。但是用同样的方法对于含三个未知量三个方程式的綫性方程組，却很有用。

設已予方程組

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\
a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.
\end{aligned}\right\}\qquad (5)$$

此系数可以排成下表：

$$\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23}\\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{matrix}\qquad (6)$$

我們在方程組（5）中，以 $a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$ 乘第一式的兩端，以 $a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}$ 乘第二式的兩端，以 $a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$ 乘第三式的兩端，而后將三个方程相加，显然得出 x_2 与 x_3 的系数都等于零，亦即这兩个未知量同时消去。我們得出等式：

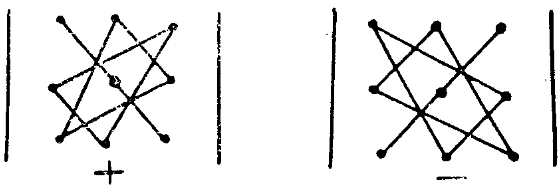
$$\begin{aligned}
&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}\\
&-a_{11}a_{23}a_{32})x_1=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3\\
&-a_{12}b_2a_{33}-b_1b_{23}a_{32}.
\end{aligned}\qquad (7)$$

在这一式中，x_1的系数称为（6）的三阶行列式，以下列的符号表示之：

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23}\\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{vmatrix}
\begin{aligned}
&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\
&\quad-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.
\end{aligned}\qquad (8)$$

虽然三阶行列式的表示是很繁杂的，但是它从（6）上的数組成却是非常簡易的。在行列式的記号中，从左上角到右下角的对角綫称

为第一对角綫；从右上角到左下角的对角綫称为第二对角綫。則在表示式（8）中，含有正号的三項里有一項为第对一角綫上三个元素的乘积，其它二項是位于第一对角綫的平行綫上之元素与其对角上之元素的乘积。其中有負号的三項，可以从第二对角綫类似的得出。于是我們得到一个計算三阶行列式的方法，可以很快的求得結果。其規則如下图



三阶行列式共有六項，左图为其三个正項，右图为其三个負項。

例子。

（1）$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot5+1\cdot1\cdot2+2\cdot(-4)\cdot3-2\cdot3\cdot2-1(-4)\cdot5-2\cdot1\cdot3=30+2-24-12+20-6=10.$

（2）$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot3\cdot0+0\cdot2\cdot1+(-5)(-2)(-2)-(-5)\cdot3\cdot1-0(-2)\cdot0-1\cdot2(-2)=-20+15+4=-1.$

回头再来研究等式（7），其右节仍是一个三阶行列式。它是將（6）中第一列換为組（5）的常数項列所决定的行列式。如果我們以符号 d 来表示行列式（8），以 d_i 表示將（6）中第 i 式換为常数項列所决定的行列式。于是等式（7）成为 $dx_1=d_1$ 的形狀。故当 $d\neq0$ 时，

$$x_1=\frac{d_1}{d}. \qquad (9)$$

用同样的方法，以 $a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33}$，$a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}$，$a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23}$ 依次乘組（8）的各方程式，我們得出

$$x_2=\frac{d_2}{d}. \qquad (10)$$

最后，以$a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}$，$a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32}$，$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$依次乘組（8）的各方程式我們得出

$$x_3=\frac{d_3}{d}. \tag{11}$$

把表示式（9）-（11）代入方程組（5）中，經过整理显然可以看到，組（5）都成为恒等式。于是得到了关于含三个未知量三个方程式的綫性方程組当系数行列式不为0时的求解法則，即所謂克萊姆法則，其求法和含兩个未知量兩个方程式的綫性方程組的情形是很相象的。

例如，解方程組

$$\left.\begin{aligned} 2x_1-x_2+x_3&=0,\\ 3x_1+2x_2-5x_3&=1,\\ x_1+3x_2-2x_3&=4. \end{aligned}\right\}$$

这个方程組的系数行列式

$$d=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & -5\\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=28.$$

$\because d\neq 0$，故可用克萊姆法則求解。其分子行列式各为

$$d_1=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -5\\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=13,\quad d_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -5\\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}=47,$$

$$d_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=21.$$

亦即方程組的解是：

$$x_1=\frac{13}{28},\quad x_2=\frac{47}{28},\quad x_3=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}.$$