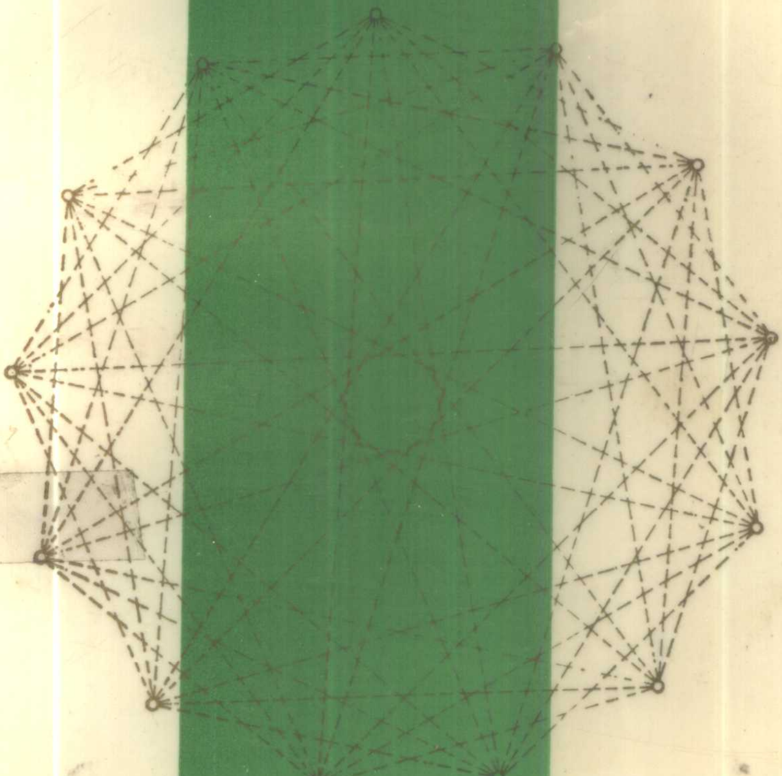
组合数学

陈景润



组合数学

陈景润

河南教育出版社

组 合 数 学

陈景润

责任编辑 温 光 刘宗贤

河南教育出版社出版
河南第一新华印刷厂印刷
河南省新华书店发行

787×1092毫米 32开 9.375印张 183千字
1985年3月第1版 1985年3月第1次印刷
印数：1—18,600册

统一书号13356·2 定价 2.05(平) 3.05(精) 元

序　言

组合数学是一门新兴的数学分支，它研究有关离散对象在各种约束条件下的安排和配置的问题；它在理论上与数论、代数学、函数论、概率统计等有密切的关系，在国防工业、物理、化学、生物、计算机科学、空间技术、信息编码、物质结构、遗传工程、实验设计、管理科学、人工智能等二十多个领域内都有重要的应用。因而，成为受到普遍重视的学科，近二十多年来其发展尤为迅速，据不完全统计，国外发表的论文有七万篇。国

内研究者越来越多。

组合数学具有悠久的历史，现在世界上许多组合数学家认为中国是先期组合数学的发源地。这门古老的学问之所以焕发出新的活力，主要是由于计算机的出现和计算机科学的蓬勃发展，提出了一系列传统数学无法解决的理论和实际问题，这促使数学工作者以现代的理论和方法，把组合数学建立在全新的基础之上，成为计算机科学发展的一个不可分割的组成部分。因此，组合数学的发展，对于我国科学技术现代化，具有重要的现实意义。

最近我们到了河南省数学研究所、新乡师范学院、河南师范大学以及两次到贵州省讲学，特别是在贵州民族学院讲了较长时间的组合数学，我们欣喜地看到一代年轻的组合数学工作者成长起来，而要求学习掌握组合论这一门数学学科的人越来越多了，他们普遍希望能看到供理工科学生阅读的参考书，因

而我们把讲学的部分内容编写成了《组合数学》这本书。

书中介绍组合论的计数问题，以及解决计数问题的数学工具，如加法原则、乘法原则、抽屉原则、容斥原理、递推关系和母函数等。书中列举了大量组合问题和例题，并尽可能使用初等办法来解决它们，以使广大读者能够掌握组合论的思想和方法。本书内容丰富，叙述由浅入深，每章都有习题，另附习题解答。本书对初学组合论的读者是一本较好的入门书，对于中学教师、大学理工科学生和广大的工程技术人员以及从事科学研究的工作者也是一本较好的参考书。

在写这本书的过程中，我们得到中国科学院数学研究所的领导和同志们的支持，河南省数学研究所、新乡师范学院、河南师范大学和贵州民族学院等广大师生亦给予帮助和支持；本书初稿经过贵州民族学院副院长谭鑫教授、数学系林敬潘主任和贵州教育学院李长明

副院长阅读并提出宝贵意见；特别应该提到的是贵州民族学院数学系的黎鉴愚老师，他非常详细地阅读了本书初稿，提出了很多宝贵意见和建议，并对本书的编写工作给予了很大的帮助；谨在此一并表示衷心感谢。

由于时间短促，书中可能存在不少的问题，希望同志们批评指正。

陈景润

1983年12月

封面设计　刘　梅

目 录

第一章

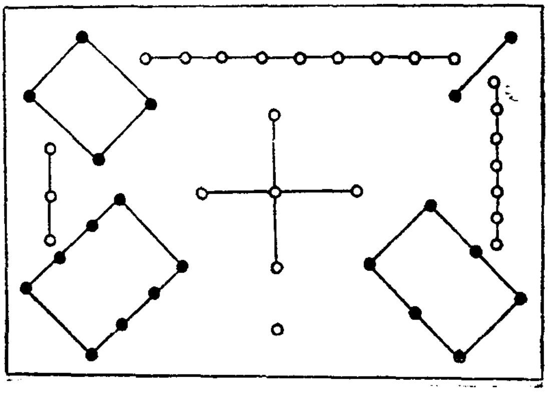
引　言

组合论又叫组合数学，它是一个历史很久的数学分支。组合论所研究的中心问题是按照一定的规则来安排一些物件有关的数学问题，当符合所要求的安排并不是很显然不存在或存在时，那么我们首要的问题就是去证明它的不存在或是去证明它的存在。当符合所要求的安排显然是存在或是我们已经证明它是存在时，那么求出这样的安排的（全部或其中不等价的）个数，以及怎样才能够把这样的安排求出来的问题，如果它还给出了最优化的标准，则还需寻求出最优的安排如此等等，上述几方面问题依次被称为存在性问题、计数问题、构造问题、最优化问题。

几千年以前人们就已经开始研究组合论，据传早在《河图》中，我国人民就已经对一些有趣的组合问题给出了正确的解答。

§1. 洛书的传说和构成

在我国人民的神话传说中，有一位人物是很著名的，他就是禹。据传早在四千多年以前，大禹为了治理那个容易泛滥成灾的黄河，曾经领导人民日夜奔忙地工作，据说几次过家门都没有时间停下去看看妻儿，这种大公无私的精神，今天看来还是令人感动。据传在大禹治好那滚滚汹涌的河流后，就有龙马从河中跃出献出河图，另外在洛河里也有一只大乌龟背驮了就是这个出名的洛书给大禹。据说这两个洛书河图都包含了治理国家的大道理。这传说历史倒很悠久，在《论语》书中，孔夫子就因为当时世风日下，人心不古，没



洛 书

有圣人之治，以致“河不出图”而感慨万千。

洛书上的每个圆圈都是代表一个1，所以如果我们把洛书上的图形用阿拉伯数字写出来就是图1。图1是由1到9这九个数所组成的具有三行三列的一个方形阵列，其中每行、每列以及每条对角线上三个数之和都等于15。即

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图 1

$4+9+2=15$，　　$3+5+7=15$，

$8+1+6=15$，　　$4+3+8=15$，

$9+5+1=15$，　　$2+7+6=15$，

$4+5+6=15$，　　$2+5+8=15$。

又在图1中我们有

$2+6+8+4=20$，　　$7+1+3+9=20$，

$6+8+4+2=20$，　　$1+3+9+7=20$，

$8+4+2+6=20$，　　$3+9+7+1=20$，

$4+2+6+8=20$，　　$9+7+1+3=20$。

现在我们来说明图1是怎样得到的，我们取九张同样大小的正方形纸块，并在九张纸上，写上从1到9的数目字。然后再将它们按照图2来进行排列。排列好后，将图2中的1和9位置进行对调，同时再将图2中的3和7位置进行对调。这样我们就得到了图3。现在我们把记有1、3、9、7的纸块向中间5的纸块移近。于是我们就得到了图1。这个方法记载在1275年宋朝的大数学家杨辉写的书上。书名叫做《续古摘奇算经》。他写道：“九子斜排，上下对易，左右

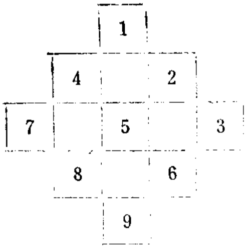


图 2

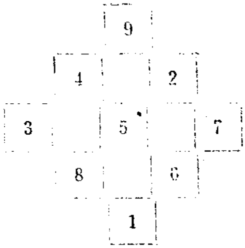


图 3

相更，四维挺进，戴九履一，左三右七，二四为肩，六八为足。”杨辉称这种图为“纵横图”，而且是第一个中国数学家对这方面的深入研究。后来外国人也开始研究杨辉研究过的这一种洛书，并且把它推广，即将1，2，…，n^2个自然数放进由n^2个小正方形组成的正方形方阵里，要求纵、横及对角线的和都相等，满足这些要求的方阵称为“n阶纵横图”，国外称为“n阶魔术方阵”或“n阶幻方”。这样洛书就是三阶纵横图或三阶幻方。由于

$$16+2+3+13=34, \qquad 5+11+10+8=34,$$

$$9+7+6+12=34, \qquad 4+14+15+1=34,$$

$$16+5+9+4=34, \qquad 2+11+7+14=34,$$

$$3+10+6+15=34, \qquad 13+8+12+1=34,$$

$$16+11+6+1=34, \qquad 13+10+7+4=34。$$

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

图 4

所以图 4 就是一个四阶的纵横图，现在我们要推广杨辉的方法来算出一个五阶的纵横图，也就是说我们在二十五个小方格的上面写上从 1 开始到25。然后我们根据杨辉的九子斜排，改为二十五子斜排就得到

图 5，在图 5 中居上的有 1、6、2。居下的有24、20、25。然后再根据杨辉的上下对易，把 1 调到19的上面，把 2 调到20的上面，把 6 调到24的上面，就得到图 6 。然后再把图 6 居下的调到上面去，把24调到12的上面，把20调

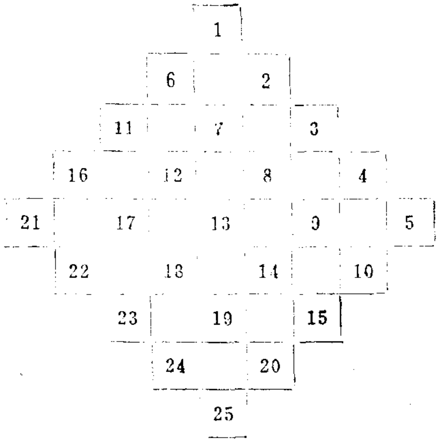


图 5

到 8 的上面，把25调要13的上面，这样就得到图 7 。最后我们来进行左右相更，居左的有16、21、22、居右的有4、5、10。现在我们把居左的16调到 8 的右边去，把22调到14的右边去，把21调到13的右边去。这样我们就得到图 8 。然后再把图 8 中居右的 4 调到12的左边去，把10调到18的左边去，把 5 调到13的左边去，这样就得到图 9 ，这就是我们所需要的五阶纵横图。

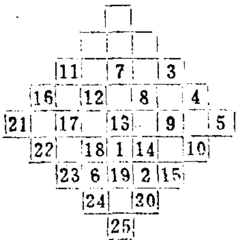


图 6

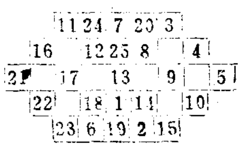


图 7

11	24	7	20	3		
	12	25	8	16	4	
17		13	21	9		5
	18	1	14	22	10	
23	6	19	2	15		

图 8

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

图 9

由于

$11+24+7+20+3=65$，　　$11+4+17+10+23=65$，

$4+12+25+8+16=65$，　　$24+12+5+18+6=65$，

$17+5+13+21+9=65$，　　$7+25+13+1+19=65$，

$10+18+1+14+22=65$，　　$20+8+21+14+2=65$，

$23+6+19+2+15=65$，　　$3+16+9+22+15=65$，

$11+12+13+14+15=65$，　　$3+8+13+18+23=65$。

所以图 9 就是一个五阶的纵横图。

27	29	2	4	13	36
9	11	20	22	31	18
32	25	7	3	21	23
14	16	34	30	12	5
28	6	15	17	26	19
1	24	33	35	8	10

图 10

由于

$27+29+2+4+13+36=111$，

$9+11+20+22+31+18=111$，

$32+25+7+3+21+23=111$，

$14+16+34+30+12+5=111$，

$28+6+15+17+26+19=111$，

$1+24+33+35+8+10=111$，

$27+9+32+14+28+1=111$，

$29+11+25+16+6+24=111$，

$$2+20+7+34+15+33=111,$$
$$4+22+3+30+17+35=111,$$
$$13+31+21+12+26+8=111,$$
$$36+18+23+5+19+10=111,$$
$$27+11+7+30+26+10=111,$$
$$36+31+3+34+6+1=111。$$

所以图10就是一个六阶的纵横图。

由于 n 阶魔术方阵中的所有整数的和是 $1+2+3+\cdots\cdots+n^2$，而这个数等于 $\frac{n^2(n^2+1)}{2}$，所以 n 阶魔术方阵的每行（或每列或每条对角线）的数值都等于 $\frac{n(n^2+1)}{2}$。又我们将在习题中证明不存在有二阶的魔术方阵，若读者对魔术方阵感兴趣，可以参阅W.W.Rouse.Ball写的书，书名为《Mathematical Recreations and Essays》，该书中的第193到221页详细地讨论了这个问题。又该书是由New York：Macmillan出版社于1962年出版的。

§2．关于费波那契数列

费波那契(Leonarde Fibonacci)生于1175年，是意大利的一位很著名的数学家。在1202年他写了一本数学书，书名叫做《Liber Abaci》，在这本书中提出了一个很有名的"关于兔子生兔子的数学问题"，即有一个人把一对小兔子