高等师范院校数学系列教材

离散数学

Discrete Mathematics

张型岱　刘焕平　赵杰　编著

哈尔滨工业大学出版社

高等师范院校数学系列教材

离散数学

Discrete Mathematics

张型岱 刘焕平 赵杰 编著
谷秀川 主审

哈尔滨工业大学出版社
· 哈尔滨 ·

内 容 简 介

本书是数学与应用数学专业的离散数学课教材，也可作为计算机专业的教材。内容由八章构成，包括集合论（集合，关系，映射，集合的基数）；命题逻辑（含公理系统）；谓词逻辑（含公理系统）；非经典逻辑简介（含模态逻辑，多值逻辑，非单调逻辑，模糊逻辑）；图论；代数系统；格与布尔代数；离散数学在计算机科学中的应用。每章都配备了习题，并在附录中给出习题答案与提示。

本书内容系统全面，逻辑严谨，推理详尽，语言简洁，配有较多的典型例题，便于理解基本理论与方法。本书可作为普通高等学校与成人高校相关专业的教材，也可作为科技工作者、自修人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学/张型岱等编著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2002.6

ISBN 7-5603-1753-7

Ⅰ.离… Ⅱ.张… Ⅲ.离散数学 Ⅳ.0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 044626 号

出版发行	哈尔滨工业大学出版社
社　址	哈尔滨市南岗区教化街 21 号　邮编 150006
传　真	0451-6414749
印　刷	哈尔滨市工大节能印刷厂
开　本	850×1168　1/32　印张 11.125　字数 287 千字
版　次	2002 年 6 月第 1 版　2002 年 6 月第 1 次印刷
书　号	ISBN 7-5603-1753-7/O·134
印　数	1～3 000
定　价	19.80 元

序

随着科学技术的发展，数学的应用范围日益广泛，不但在自然科学的各个分支中应用，而且在社会科学的很多分支中也有应用。毋庸置疑，数学自身的发展水平深刻地影响着人们的思维方式。

众所周知，数学创新、数学应用、数学传播是数学教学工作者的三大基本任务，为了适应现代教育发展的需要，我国高等师范院校的数学教育专业改为数学与应用数学专业(师范类)，由此导致课程设置必将发生根本的变化。如何开设应用数学课，如何应用计算机进行数学教学，如何改革数学教育的传统课程，都是有待进一步探讨的问题；相应的数学教材，更有待改革和完善。为此，黑龙江省高等师范院校数学教育研究会，组织哈尔滨师范大学、齐齐哈尔大学理学院、牡丹江师范学院、佳木斯大学理学院四所本科师范院校的数学教育工作者，在多年教学实践基础上，集中对应用数学、计算机数学及数学教育等课程进行研讨，编写了“高等师范院校数学系列教材”，以适应高等师范教育发展的需要。

这套教材主要包括:形成体系的教材,如《数学建模(上、下册)》、《数学实验(上、下册)》、《离散数学》;具有师范特色的教材,如《中学数学教学论》、《中学数学方法论》、《中学数学解题方法》;融入教师教学体会和教学成果的专著性的教材,如《教学过程动力学》。这套教材,力求在保持师范特色的同时,突出应用数学和计算机数学,以期成为高等师范院校本科数学教育专业一套实用的教材,这是我们的主要目的。

我们清楚地知道,我们追求的目标不易达到,不过,通过我们的努力,引起共鸣,经过同仁的一起努力,目标总会到得早些。

黑龙江省高等师范院校
数学教育研究会理事长

王玉文
2002 年 3 月

前　言

在 1998 年教育部颁布的专业目录中，首次将离散数学列入数学与应用数学专业的主要课程之一。根据专业目录的要求，我们将离散数学课由选修课改为必修课，调整了教学目标要求，修订了教学大纲，使其适应形势发展的需要。本书就是在原有讲义的基础上编写的。

离散数学是计算机科学与技术专业的重要基础课。我们在选材与编写时，既注意数学专业的特点，也注意计算机专业的需要，使其可以作为计算机专业同名课程的教材。

离散数学历史悠久，但又是现代数学最具生机和活力的一个重要分支。离散数学在物理学、化学、生物学、自动控制、人工智能、工程技术、社会科学、经济学等学科都有重要应用，研究领域与应用范围十分广阔，是数学百花园里最亮丽的风景之一。

众所周知，以计算机科学技术为核心的信息技术已经完全改变了科学技术的面貌，改变了人类的思想观念、行为习惯、生活方式等，几乎人类生活的所有方面，都因信息技术而发生着深刻的变化。而信息技术的本质是数学技术，离散数学是其中的基础与骨干。如果人们把计算机和外语作为人才素质培养的两翼的话，那么，

数学与应用数学就是人才素质培养的筋骨，而离散数学正是应用数学中最重要的部分。现代大学生，无论是学习自然科学还是学习社会科学，都应该学习数学和应用数学，特别应该学习离散数学。

离散数学的内容很多，本书是离散数学的基础部分，主要有集合论、数理逻辑、图论、代数系统、离散数学在计算机科学中的应用等。

在编写过程中有以下几点考虑：

（1）结合数学与应用数学专业的特点，在数理逻辑部分，介绍了命题逻辑的公理系统和谓词逻辑的公理系统，使学生逐渐掌握公理化理论的体系和思想方法。

（2）对数学理论的阐述，力求逻辑结构严谨，语言准确精练，推理详略得当，注重揭示数学的重要思想和典型方法。

（3）注意介绍数学问题产生的实际背景和理论知识运用的典型实例，培养学生掌握分析、解决实际问题的能力。

（4）尽力反映离散数学某些新成果和新进展。如介绍了多值逻辑、非单调逻辑、修正逻辑、开放逻辑、模糊逻辑等多种非经典逻辑系统，期望以此启发学生的思维，了解数学产生发展的一些思路，培养研究问题的意识和能力。

（5）为引导学生动手动脑，书中选择了一些方法典型、难易度适当的问题，留给学生自己论证，使学生逐步养成独立钻研的习惯，掌握独立学习的方法。

（6）对重要概念、性质与定理给予比较详细的说

明，编选了较多的典型例题，以便学生尽快理解、掌握基本概念、理论和方法。

（7）本书共八章，各校使用时可根据需要取舍其中内容，以适应不同的教学要求。

（8）本书各章配备了适量的习题，这是全书的有机组成部分，希望读者尽力独立完成这些习题。附录给出习题答案与提示，以便使用。

在编写过程中，哈尔滨师范大学数学系主任王玉文教授给予热情的支持和帮助，提出了许多宝贵意见，牡丹江师范学院数学系青年教师研究生王岚帮助编配了大部分习题，对此作者一并表示诚挚的谢意。

限于作者水平，书中不当与疏漏之处在所难免，敬请读者不吝指正。

作 者

2002 年 3 月

目 录

第一章 集合论

- 集合的概念与运算
- 二元关系
- 关系的性质及闭包运算
- 序关系
- 等价关系
- 映射
- 集合的基数
- 模糊集

集合论是现代数学的基础，集合的有关概念是现代科学技术的基础概念之一。

集合的起源可以追溯到16世纪,当时主要对各种数集进行研究。但集合论的迅速发展是在19世纪70年代，当时德国数学家康托尔（G.Cantor）在对无穷集合的研究中，提出了关于对等、等势、基数、序数、超穷数和良序集等概念，并获得了一系列重要成果，奠定了集合论的基础。而后，随着集合论的发展，在本世纪初，由著名哲学家、数学家罗素提出的罗素悖论，动摇了集合论的基础，引起一场数学基础的危机。这场危机激发了数学家、哲学家为克服集合概念的缺陷而努力工作的热情，先后建立了各种公理化集合论的体系。20世纪60年代，P.L.Cohen得到了关于连续统与选择公理的独立性成果。同时，美国数学和控制论专家L.A.Zadeh提出了Fuzzy集理论。20世纪80年代，波兰数学家Z.Pawlak发表了Rough集合论。这两种集合的理论区别于以往经

典集合论，被称为非经典集合论。它们的广泛应用及迅速发展，以及在理论与实践中所获得的丰硕成果，受到学术界及科技工作者的高度重视。

随着现代科学技术的发展，集合论的概念和理论发展得十分迅速，应用日趋广泛。以计算机为例，各种数字、符号、图像、语言、数据、信息等都可以作为集合的元素进行研究。可以肯定地说，集合论的原理与方法已经成为数学工作者、计算机工作者和科技工作者，甚至社会科学工作者的不可缺少的一种数学技术。

集合论分经典集合论与非经典集合论，经典集合论又分为朴素集合论与公理集合论，这里主要介绍朴素集合论。

1.1 集合的概念与运算

一、集合的概念

在研究问题时，通常把具有某种性质且彼此不同的确定的事物作为一个整体来研究，这个整体称为**集合**（Set），其中的事物称为集合的**元素**（Element）。常用英文大写字母 A,B,C 等表示集合，以英文小写字母 a,b,c 等表示集合的元素。$a\in A$ 表示 a 是 A 的元素，$a\notin A$ 表示 a 不是 A 的元素。

【定义 1.1.1】 一个集合若由有限个元素组成，称为**有限集**（Finite set），否则称为**无限集**（Infinite Set）。特别，对元素个数为零的集合称为**空集**（Empty Set），记为$\varnothing$。

常见的集合表示法分为枚举法和特性描述法。枚举法是将集合的元素一一列出。如集合 A 由元素 a,b,c,d 组成，可记为 $A=\{a,b,c,d\}$。特性描述法是用集合的元素所具有的共同性质来刻画集合。如 $A=\{x\mid x\text{是正偶数}\}$。一般集合可用 $A=\{x\mid P(x)\}$表示，其中 P 表示某性质，集合 A 由满足性质 P 的元素组成。

关于集合概念的说明：

（1）集合的元素是确定的，即 $a\in A$ 或 $a\notin A$，二者必居且仅居其一。

（2）集合的确定不应引起逻辑矛盾。如 $A=\{x|x\notin x\}$，不能定义集合。

（3）集合的元素彼此不同。如集合 $\{a,b\}$，不能写成 $\{a,a,b\}$。

（4）集合中的元素无次序之分。如集合 $\{a,b,c\}=\{b,a,c\}$。

二、集合之间的关系

【定义 1.1.2】 集合间的关系有如下定义：

（1）$A\subseteq B$ 表示 A 是 B 的**子集**（Subset），即若 $a\in A$，则 $a\in B$。

（2）$A\subset B$ 表示 A 是 B 的**真子集**（Proper Subset），即 $A\subseteq B$，且存在 $b\in B$，使 $b\notin A$。

（3）$A=B$ 表示 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，即 A 与 B 元素相同，称做 A 与 B 相等。

（4）$P(X)=\{A\mid A\subseteq X\}$，称做 X 的**幂集**（Power Set），即 X 的所有子集组成的集，有时也记为 2^X。

X 含有 n 个元素，则 X 有 2^n 个子集。事实上，从 X 中选出 $i\,(i=0,1,\cdots,n)$ 个元素构成子集,全部子集数为

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$$

【例 1.1.1】 $A=\{a\}$,求 $P(A),P(P(A))$。

【解】 $P(A)=\{\varnothing,\{a\}\},P(P(A))=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{a\}\},\{\varnothing,\{a\}\}\}$。

我们以 **N**、**Z**、**Q**、**R**、**C** 分别表示**自然数集**（Natural）、**整数集**（Integer）、**有理数集**（Quotient）、**实数集**（Real）、**复数集**（Complex），它们有关系 $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}\subseteq\mathbf{C}$。约定 $0\in\mathbf{N}$。

根据讨论问题的需要，常设一个充分大的集合为**全集**(Universal Set)，也称为**基本集**，所讨论的集合均为这个集合的子集。

相等与包含关系具有以下性质：

（1）空集是任一集合的子集。

（2）任一集合是全集的子集。

（3）包含关系有：

① $A \subseteq A$ （自反性）

② 若$A \subseteq B, B \subseteq A$,则$A = B$ （反对称性）

③ 若$A \subseteq B, B \subseteq C$,则$A \subseteq C$ （传递性）

三、集合的运算

集合 A，B 有并、交、差、补、对称差等运算。

【定义 1.1.3】 A 与 B 的**并集**（Union），记为$A \cup B$，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A 或 x \in B\}$$

【定义 1.1.4】 A 与 B 的**交集**（Intersection），记为$A \cap B$，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A 且 x \in B\}$$

【定义 1.1.5】 A 与 B 的**差集**（Relative Complement），记为$A - B$,即

$$A - B = \{x \mid x \in A 且 x \notin B\}$$

【定义 1.1.6】 X 为基本集，A 的**补集**（Supplementary Set），记为A^c，即

$$A^c = X - A = \{x \mid x \notin A 且 x \in X\}$$

【定义 1.1.7】 A 与 B 的**对称差**（Symmetry Difference），又称**布尔和**，记为$A \oplus B$，即

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

集合的运算可以用文氏图表示，简洁而意义清楚，请读者自绘。

四、集合的运算性质

X为基本集，$(P(X),\cup,\cap,c)$为集合X的代数系统，有性质：

（1）$A\cup B, A\cap B, A^c\in P(X)$　（封闭性）

（2）$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$　（交换律）

（3）$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$　（结合律）

（4）$A\cup\varnothing=A, A\cap X=A$　（单位元存在性）

（5）$A\cup A^c=X, A\cap A^c=\varnothing$　（互补律）

（6）$A\cup(A\cap B)=A, A\cap(A\cup B)=A$　（吸收律）

（7）$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$　（分配律）

（8）$A\cup A=A, A\cap A=A$　（幂等律）

（9）$A\cup X=X, A\cap\varnothing=\varnothing$　（两极律）

（10）$(A^c)^c=A$　（对合律）

（11）$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c,(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$　（笛摩根律）

如果$B_t\in P(X),t\in T$，（7）和（11）有下面更一般的形式：

$(7')$ $A\cup(\bigcap\limits_{t\in T}B_t)=\bigcap\limits_{t\in T}(A\cup B_t)$，$A\cap(\bigcup\limits_{t\in T}B_t)=\bigcup\limits_{t\in T}(A\cap B_t)$

$(11')$ $\left[\bigcup\limits_{t\in T}B_t\right]^c=\bigcap\limits_{t\in T}B_t^c$，$\left[\bigcap\limits_{t\in T}B_t\right]^c=\bigcup\limits_{t\in T}B_t^c$

其中$\bigcup\limits_{t\in T}B_t=\{x\mid\exists t\in T,x\in B_t\}$，$\bigcap\limits_{t\in T}B_t=\{x\mid\forall t\in T,x\in B_t\}$

我们仅证明$(11')$的前式，其他由读者完成。

【证明】 任取 $x \in \left[\bigcup_{t\in T} B_t\right]^c$, $x \notin \bigcup_{t\in T} B_t$, 即 $\forall t \in T, x \notin B_t$, 有 $\forall t \in T, x \in B_t^c$，即 $x \in \bigcap_{t\in T} B_t^c$, 因此

$$\left[\bigcup_{t\in T} B_t\right]^c \subseteq \bigcap_{t\in T} B_t^c \qquad (1)$$

任取 $x \in \bigcap_{t\in T} B_t^c$，即 $\forall t \in T, x \in B_t^c$，于是 $\forall t \in T, x \notin B_t$，即 $x \notin \bigcup_{t\in T} B_t$，有 $x \in \left[\bigcup_{t\in T} B_t\right]^c$，因此

$$\bigcap_{t\in T} B_t^c \subseteq \left[\bigcup_{t\in T} B_t\right]^c \qquad (2)$$

由式（1）、（2）证得等式成立。 **证毕**

由以上性质知，在任何集合运算的公式中，将∪与∩互换，公式仍然成立。这就是集合论的对偶原则。

五、序偶与笛卡尔积

现实生活中存在有序成对出现的事物，据此数学上抽象出序偶的概念。

【定义 1.1.8】 A、B 是两集合，$a \in A, b \in B$, 二元序组 (a,b) 称为**序偶**(Ordered pair)。其中，称 a 为序偶的第一元素，b 为第二元素。

【定义 1.1.9】 n 个有序元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成一 n 元序组，记为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$。两个 n 元序组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 与 $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 相等，当且仅当对应元素相等。

【定义 1.1.10】 集合 A、B 的笛卡尔积为 $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$

【例 1.1.2】 $A = \{1,2,3\}, B = \{a,b\}$, 求 $A \times B$, $B \times A$。