21世纪实用经济数学系列教材

实用微积分同步教练

主　编　张银生
安建业

SHI YONG WEI JI FEN
TONG BU JIAO LIAN

中国人民大学出版社

21世纪实用经济数学系列教材

实用微积分同步教练

主　编　张银生　安建业
副主编　王全文　王玉津　李美凤

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

实用微积分同步教练/主编 张银生 安建业
北京:中国人民大学出版社,2002
21 世纪实用经济数学系列教材

ISBN 7-300-04270-8/O·53
Ⅰ. 实…
Ⅱ. ①张… ②安…
Ⅲ. 微积分-高等学校-教学参考资料
Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 059030 号

21 世纪实用经济数学系列教材
实用微积分同步教练
主　编　张银生　安建业

出版发行:中国人民大学出版社
　　　　(北京中关村大街 31 号　邮编 100080)
　　　　邮购部:62515351　门市部:62514148
　　　　总编室:62511242　出版部:62511239
　　　　本社网址:www.cru-press.com.cn
　　　　人大教研网:www.ttrnet.com
经　　销:新华书店
印　　刷:北京东方圣雅印刷有限公司

开本:787×965 毫米 1/16　印张:20.75
2002 年 9 月第 1 版　2002 年 9 月第 1 次印刷
字数:377 000

定价:20.00 元
(图书出现印装问题,本社负责调换)

总 序

人类已经迈进了21世纪，由于科学技术的迅猛发展，数量分析已渗透到各个领域，数学的重要性已被整个社会所公认；由于计算机技术的广泛普及和提高，许多繁难的计算和抽象的推理已不再是高不可攀，数学的应用越来越深入；随着人类素质的不断提高，数学素质教育已成为全体国民的必修课程，数学的普及越来越广泛．为适应21世纪形势的发展和社会的需要，信息技术与学科课程整合已提到教育教学改革“重中之重”的地位，运用信息技术改造和优化传统学科内容是培养新世纪具有创新能力的高素质人才的必然要求．经过多年的教学研究和实践，我们组织了具有丰富教学经验的第一线教师，编写出这套实用经济数学系列教材，奉献给大家．

这套系列教材，包括《实用微积分》、《实用线性代数》、《实用概率统计》、《实用数学模型》共四册．本套教材力求体现如下特点：

第一，以实用为原则，内容体系整体优化，突出“用数学”能力的培养，使读者实现由知识向能力的转化．

第二，以实际为背景，概念阐述简明、通俗化，举例贴近生活，运用多媒体技术使内容直观化、图形化，使读者消除对数学的陌生感、抽象感、恐惧感，激活求知欲，增强学好数学、用好数学的信心．

第三，以计算机为工具，传统内容与信息技术应用融为一体，注重基本知识、基本思想、基本能力的培养，对繁、难、抽象的内容，充分利用当前极为流行的 Mathematica 软件、Excel 软件来实现，比如函数图形描绘、矩阵计算、数据分析等.

第四，每册教材均配有多媒体助学助教光盘，包括课程说明、同步辅导、习题详解、单元测试、模拟演示、电子教案、案例精选、考研试题分析、数学家简介等众多模块，信息量大，使用方便，便于读者更好地理解、掌握、巩固所学知识，有助于及时检测、拓展和提高.

这套系列教材是 21 世纪初天津市普通高校教学改革项目《信息技术与经济数学课程整合的研究和实践》的成果，主要面向高等学校经济学类、管理学类的本科生，对其他学科类的学生和数学实用工作者也是很好的辅助教材.

我们期盼着这套实用经济数学系列教材能给广大读者带来学数学的轻松、用数学的快乐和效益.

于义良

2002 年 5 月于天津商学院

前　言

在多年的教学实践中，我们深深感受到许多学生学不好数学的重要原因之一是做题太少或做题不当．著名数学家华罗庚曾说过：学数学如果不做题，等于入宝山而空返．事实上，进行一定数量典型题目的练习，对于深入理解和灵活运用基本概念和基本理论、正确掌握解题的方法和技巧、提高分析问题和解决问题的能力都是必不可少的重要教学环节，对于启迪学生学习数学的兴趣和培养良好的素质是至关重要的．本书就是本着这个宗旨，从典型例题入手，由浅入深一步一步地帮助学生学好数学、用好数学．

本书的特点是：

(1)每章都有知识网络图．每节都由基本内容、典型例题分析、思考与练习、提示与答案四部分组成，以便读者既能一览全局，又可重点突出．

(2)每一部分的例题和习题都经过严格的筛选，具有较强的典型性和代表性．对重要的例题都加入分析、注释和多种解法，以使读者收到事半功倍的效果．

(3)每章都用数学软件做了进一步讨论，以使读者更直观、更形象、更简便地学习数学、运用数学．

(4)本书是《实用微积分》的姊妹教材，其章节序号与《实用微积分》相一致．

本书是21世纪初天津市普通高校教学改革项目《信息技术与经济数学课程整

合的研究和实践》的成果之一.

参加本书编写的有:张银生(第1.1节至第1.5节,第2.1节至第2.3节),安建业(第1.6节、第2.4节、第3.8节、第6.6节及第4章、第5章),李美凤(第3.1节至第3.7节),王玉津(第6.1节至第6.5节),王全文(第7章、第8章).

在编写过程中,为使所选内容更具代表性、典型性,我们参阅并引用了有关文献的一些例题,恕不一一指明出处,在此一并向有关作者致谢.

限于编著者的水平,书中定有不当或错误之处,敬请批评雅正,以期不断修改和提高.

编著者

2002年7月于天津商学院

《21世纪实用经济数学系列教材》编委会

目录

第1章

函数与极限

您学了本章之后，应该能够做到：

1．理解函数的概念，掌握函数的表示法，了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性．

2．了解二元函数的概念及其几何意义，熟悉几种常见的二元函数的图形．

3．掌握基本初等函数的性质及图形，理解复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念，了解初等函数的概念．

4．会建立简单应用问题中的函数关系式．

5．了解数列极限和函数极限(包括左极限、右极限)的概念，直观上能描述极限过程的几种常见形式，了解极限的几个基本性质．

6．理解无穷小的概念和基本性质，掌握无穷小的比较方法，了解无穷大的概念及其与无穷小的关系．

7．了解极限存在的两个准则，掌握极限的四则运算法则，会应用两个重要的极限．

8．理解函数连续性的概念(包括左连续和右连续)，会判别函数间断点的类型(可去间断点和不可去间断点)．

9．理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最值定理、介值定理)及其应用．

10．了解二元函数的极限和连续的直观意义．

11．会利用 Mathematica 进行有关函数和极限的计算及简单函数的绘图．

知识结构框图

- 函数与极限
  - 函数
    - 定义
      - 一元函数
      - 二元函数
    - 性质
      - 单调性
      - 奇偶性
      - 周期性
      - 有界性
    - 分类
      - 基本初等函数
      - 复合函数、反函数
      - 分段函数、隐函数
      - 常见的二元函数
  - 极限
    - 定义
      - 数列的极限
      - 一元函数的极限、左(右)极限
      - 二元函数的极限
    - 性质
      - 惟一性
      - 有界性
      - 保号性
    - 无穷小量
      - 定义
      - 无穷小量的性质
      - 阶的分类
    - 判别极限的方法
      - 极限存在的充要条件
      - 两个准则
      - 极限的四则运算法则和连续性
      - 两个重要极限
      - 无穷小量与有界变量的乘积
      - 等价无穷小代替
  - 连续
    - 定义
      - 一元函数的连续和间断、左右连续
      - 二元函数的连续
    - 性质
      - 初等函数的连续性
      - 闭区间上连续函数的性质:最(介、零)值定理

第 1.1 节 函数及其基本性质

基本内容

1. 一元函数的基本概念

函数 设有两个非空的集合 D_f 和 R,其中 $D_f \subseteq R$, R 是实数集. 称映射

$$f: D_f \to R$$

为 D_f 到 R 的函数,通常记作 $y = f(x)$,并称 y 是 x 的函数,其中 x 称为自变量, $x \in D_f$; y 称为因变量, $y \in R$; f 称为对应法则; D_f 称为函数 f 的定义域;集合 $Z_f = \{f(x) \mid x \in D_f\}$ 称为函数 f 的值域, $Z_f \subseteq R$.

2. 函数的基本性质

(1) **单调性** 设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义,对于任意的 $x_1, x_2 \in D$,且 $x_1 < x_2$,有

1) 若 $f(x_1) < f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加;

2) 若 $f(x_1) > f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调减少.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数,使函数 $f(x)$ 单调的区间称为单调区间.

(2) **奇偶性** 设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义,对于任意的 $x \in D$,若恒有

1) $f(-x) = f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为 D 上的偶函数;

2) $f(-x) = -f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为 D 上的奇函数.

[注] 若 $f(x)$ 为奇函数,则其图形关于坐标原点中心对称;若 $f(x)$ 为偶函数,则其图形关于 y 轴对称.

(3) **周期性** 设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义,如果存在常数 $a > 0$,使对于任意的 $x \in D$,恒有

$$f(x + a) = f(x)$$

成立,则称 $f(x)$ 为周期函数. 满足上式的最小的正数 a,称为 $f(x)$ 的周期.

(4) **有界性** 设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义,如果存在常数 M,使得对任意的 $x \in D$,恒有

1) $|f(x)| < M$ (此时 $M > 0$),则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界;否则称函数 $f(x)$ 在 D 上无界.

2) $f(x) < M$,则称函数 $f(x)$ 在 D 上有上界.

3) $f(x)>M$,则称函数 $f(x)$在 D 上有下界.

3. 二元函数

定义 设有两个非空的集合 D_f 和R,其中 $D_f \subset R^2$,R^2 为平面 xOy 上的所有点(x,y)构成的集合,称映射

$$f:\ D_f \rightarrow R$$

为 D_f 到R 的函数,记为 $z=f(x,y)$,并称 z 是x 和y 的二元函数.其中 x 和y 称为自变量,$(x,y)\in D_f$;$z\in R$,称为因变量;f 称为对应法则;D_f 称为函数的定义域,$Z_f=\{z \mid z=f(x,y),(x,y)\in D_f\}$称为函数的值域.

典型例题分析

例 1 画出以下问题的合理图像,并解释理由.

(1) 一杯刚烧开的水的温度作为时间函数的图像.

(2) 一家电视机销售商店的年收入关于广告费用的图像.

解 (1) 刚烧开的水的温度为 100 °C.开始时,温度下降快.随着与室温(25 °C)逐渐接近,温度下降越来越慢,最后趋于室温(25 °C).见图 1.1.1.

(2) 开始时,年收入随着广告费用的增加快速增长.随着人们对该商品的认识越来越广泛,需求量逐渐趋于稳定,年收入增长的速度越来越慢,最后年收入趋于一个常数 y_1.见图 1.1.2.

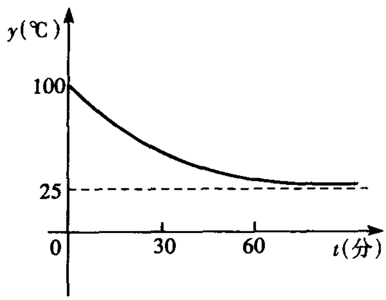

图 1.1.1

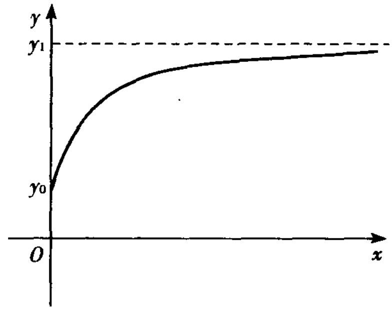

图 1.1.2

[注] 年收入关于广告费用的图像还有其他情形,读者试给出.

例 2 某工厂生产某产品年产量为 x 台,每台售价为 250 元.当年产量在 600 台以内时,可以全部售出.经广告宣传后又可再多出售 200 台,每年平均广告费 20 元,若生产再多,本年就销售不出去了.试建立本年的销售总收入 R 与年产量x 的关系.

解　总收入＝产量×单价；根据题意可列出函数关系如下：

$$R(x)=\begin{cases}250x, & 0\leqslant x\leqslant 600\\ 250\times 600+(250-20)(x-600), & 600<x\leqslant 800\\ 250\times 600+230\times 200, & x>800\end{cases}$$

例 3　已知某厂生产单位产品时，可变成本为 15 元，每天的固定成本为 2 000 元，如这种产品出厂价为 20 元，求：(1) 利润函数；(2) 若不亏本，该厂每天至少生产多少单位这种产品.

解　(1) 因为

$L(x)=R(x)-C(x)$，$C(x)=2\ 000+15x$，$R(x)=20x$，则

$L(x)=20x-(2\ 000+15x)=5x-2\ 000$

(2) 当 $L(x)=0$ 时不亏本，于是有

$5x-2\ 000=0$ 得 $x=400$(单位)

例 4　某手表厂每天生产 50 只手表的成本为 2 500 元，每天生产 90 只手表的成本为 4 260 元，若成本函数为线性函数，问每天的固定成本和生产一只手表的可变成本各为多少，并求其线性成本函数.

解　设每天生产 x 只手表，一只手表每天的可变成本为 a 元，因总成本 $C(x)$＝固定成本 C_1＋可变成本 $C_2(x)$，则

$$C(x)=C_1+ax \qquad (*)$$

由题设有 $\begin{cases}2\ 500=C_1+50a\\ 4\ 260=C_1+90a\end{cases}$

解得 $a=44$ 元/只，$C_1=300$ 元. 把 a，C_1 代入(＊)式，得

$$C(x)=300+44x$$

即为所求的线性成本函数.

[注]　这是一类问题中的一道例题，类似的还有给出条件，求线性需求函数，求线性供给函数. 值得注意的是，线性需求函数一般来说，应设为 $Q_d=a-bp$ $(a,b>0)$，斜率为负，线性供给函数应设为 $Q_s=-a+bp$ $(a,b>0)$，斜率为正.

例 5　图中给出了 $y=f(x)$的图像(见图 1.1.3)，试问：(1) $f(x)$的定义域是什么？(2) $f(x)$的值域是什么？(3) y 的什么值恰能与 x 的一个值对应？

解　从图像中观察，可以得出：

(1) $f(x)$的定义域：$D_f=(-2,0]\cup[1,4)$

(2) $f(x)$的值域：$Z_f=[0,+\infty)$

(3) 当 $y\in[0,1]\cup(3,+\infty)$时，y 恰能与 x 的一个值对应.

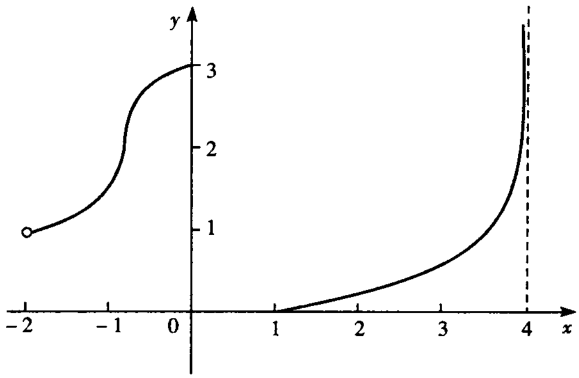

图 1.1.3

例 6 求下列函数的定义域.

(1) $y=\arcsin\dfrac{x-2}{3}$ (2) $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$

(3) $y=\sqrt{16-x^2}+\lg\sin x$

(4) $f(x)=\begin{cases}-x, & x<0\\ x^2, & 0\leqslant x\leqslant 3\\ x-2, & x>3\end{cases}$,求 $f(x+1)$的定义域.

(5) 已知 $y=f(x)$的定义域为$[0,1]$,若$0<a<\dfrac{1}{5}$,求 $f(x+a)+f(x-a)$的定义域.

解 (1) 当$\left|\dfrac{x-2}{3}\right|\leqslant 1$ 时函数有定义,即

$$-1\leqslant\frac{x-2}{3}\leqslant 1$$

解得 $-1\leqslant x\leqslant 5$

所以函数的定义域为$[-1,5]$.

(2) 当 $\lg\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 0$ 时函数有定义,从而推得

$$\frac{5x-x^2}{4}\geqslant 1$$

得 $(x-1)(x-4)\leqslant 0$

故有 $1\leqslant x\leqslant 4$

所以函数的定义域为$[1,4]$.