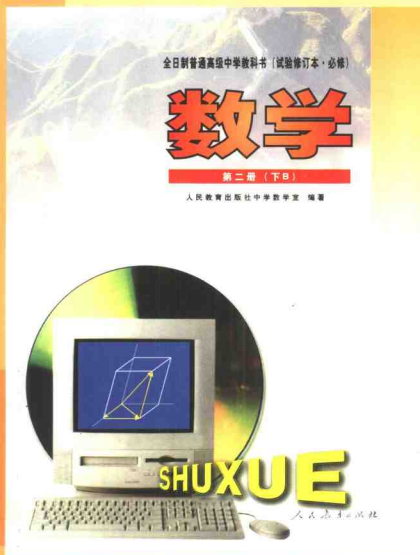


全日制普通高级中学（试验修订本·必修）

数学第二册 （下B）

教师教学用书

人民教育出版社中学数学室 编著



人民教育出版社

全日制普通高级中学（试验修订本·必修）

数 学 第 二 册（下 B）

教师教学用书

人民教育出版社中学数学室 编著

人民教育出版社

全日制普通高级中学(试验修订本·必修)

数学第二册(下B)

教师教学用书

人民教育出版社中学数学室 编著

*

人民教育出版社出版发行

(北京沙滩后街55号 邮编:100009)

网址: <http://www.pep.com.cn>

大厂第一胶印厂印装 全国新华书店经销

*

开本:890毫米×1194毫米 1/16 印张:5.5 字数:130 000

2001年11月第2版 2001年12月第1次印刷

印数 0 001~6 000

ISBN 7-107-14717-X 定价:4.50元
G·7807(课)

如发现印、装质量问题,影响阅读,请与出版社联系调换。

(联系地址:北京市方庄小区芳城园三区13号楼 邮编:100078)

说 明

本书是人民教育出版社中学数学室编著的《全日制普通高级中学教科书（试验修订本·必修）数学第二册（下B）》的教师教学用书。编写时按教科书分章安排，每章包括概述、内容分析、习题参考解答三个部分。原试验本教师教学用书由于学勤，朱长盛，贾遂，李冬胜，杨吉淳，原文志，高存明，饶汉昌编写，责任编辑为高存明，李海东。参加本次修订的有高存明，饶汉昌，责任编辑为李海东。

目 录

第九章 直线、平面、简单几何体

I 概述	1
II 内容分析	5
III 习题参考解答	28

第十章 排列、组合和概率

I 概述	51
II 内容分析	52
III 习题参考解答	68

第九章 直线、平面、简单几何体

I 概述

一、教学要求

1. 掌握平面的基本性质，会用斜二测画法画水平放置的平面图形以及长方体、正方体的直观图；能够画出空间两条直线、直线和平面的各种位置关系的图形，能够根据图形想象它们的位置关系。
2. 了解空间两条直线、直线和平面、两个平面的位置关系。
3. 掌握直线和平面平行的判定定理和性质定理；理解直线和平面垂直的概念，掌握直线和平面垂直的判定定理；了解三垂线定理及其逆定理。
4. 进一步熟悉反证法，会用反证法证明简单的问题。
5. 理解空间向量的概念，掌握空间向量的加法、减法和数乘运算。
6. 了解空间向量基本定理；理解空间向量坐标的概念，掌握空间向量的坐标运算。
7. 掌握空间向量的数量积的定义及其性质；掌握用直角坐标计算空间向量数量积的公式；掌握空间两点间距离公式。
8. 理解直线的方向向量、平面的法向量、向量在平面内的射影等概念。
9. 掌握直线和直线、直线和平面、平面和平面所成的角、距离的概念；对异面直线的距离，只要会计算已给出公垂线或在坐标表示下的距离；掌握直线和平面垂直的性质定理；掌握两个平面平行、垂直的判定定理和性质定理。
10. 了解多面体和凸多面体的概念。
11. 了解棱柱的概念，掌握棱柱的性质，会画直棱柱的直观图。
12. 了解棱锥的概念，掌握正棱锥的性质，会画正棱锥的直观图。
13. 了解正多面体的概念，了解多面体的欧拉公式。
14. 了解球的概念，掌握球的性质，掌握球的表面积和体积公式。
15. 通过空间图形的各种位置关系间的内在联系的教学，培养学生的空间想象能力、逻辑思维能力和辩证唯物主义观点。

二、内容编排

(一) 内容编排特点

本章内容共分四大节，由十一个小节组成。本章内容的编写主要有以下几个特点。

1. 整章知识围绕空间向量进行编排。第一大节空间的平行、垂直概念是把平面向量推广为空间向量的理论基础。由于我们把空间一个向量看作空间“一个位移”，所以在第一大节编写时，在学习平行线传递性的基础上，引入了平移概念。尽管新大纲没有“平移”概念，但是这个概念对理解向量概念是非常重要的，

因此引入平移概念是必要的。在第一节中比传统教科书，还更新了一些例、习题，其目的也是为了帮助学生理解空间的向量结构。

2. 内容编写以性质为主线展开。教科书在学习完平面的基本性质后，以平行公理为基础，依次讨论直线和直线平行、直线和平面平行、平面和平面平行，然后通过异面直线及其夹角、垂直的学习，由空间的平行、垂直性质转化为讨论直线与平面垂直的性质。这种以“性质为主线”的编排，可使学生较深刻地掌握空间图形的性质及其性质之间的内在联系。直线和直线、直线和平面、平面和平面平行的判定与性质的证明，都是用平行公理证明。这种学习过程可使学生看到平行公理的重要性，看到如何由直线和直线平行推出直线和平面、平面和平面平行的。同样对垂直关系的学习，可使学生清楚地看到，如何由平面内的垂直关系过渡到空间的垂直关系，如何由平面对称过渡到空间对称。这种以性质为主线的编排还有利于培养学生的空间概念、空间想象能力和逻辑思维能力。

3. 重点培养学生使用向量代数方法解决立体几何问题的能力。在过去的几何教育中，主要使用“形到形”的性质的推理来学习立体几何，并培养学生的逻辑思维能力。这一章开始，我们仍用综合推理方法学习空间的平行性质，这样做主要是为下一大节学习空间向量打下基础。当我们在第二节把空间的平行性质转为向量表达式（共线、共面向量定理、内积运算）和向量运算后，就把学习的重点转到使用向量代数方法解立体问题上来，并在教科书中积极引导学生使用向量代数方法解立体几何问题。

总之，9(B)新大纲的确定和配套的新教科书的编写，顺应了几何改革代数化的方向。既对传统立体几何内容进行改革，汲取其精华，又使用了向量代数方法解决立体几何问题。

（二）内容编排说明

1. 第一节，空间的直线和平面主要学习空间的直线、平面间的平行和垂直关系。

直线和平面是空间两个最基本的子集，空间直线和平面的基本性质及位置关系是学好立体几何的基础。学好这一部分内容，对于学生在已有的平面图形知识基础上，建立空间概念，实现从平面图形向立体图形的转化，是非常重要的。

第一节包括四小节，依次按照平面、空间直线、直线和平面平行与平面和平面平行、直线和平面垂直的顺序编排的。这四节之间密切联系，前面内容是后面内容的理论依据，后面内容既巩固了前面内容，又加深和拓宽了对前面内容的认识和理解，从而形成了一个关于空间直线和平面位置关系的概念、判定和性质的知识结构。

本大节是全章知识的基础。它在培养学生的空间想象能力、逻辑推理能力，并为第二、三大节学习空间向量和应用，都具有重要的基础作用。

2. 第二节空间向量，主要学习空间向量及其在立体几何中的初步应用。共分两小节。

由新大纲9(B)编写的教科书内容，对传统立体几何内容进行了重大改革。特别体现在第二、三大节中。主要思想是引进向量工具改造传统立体几何的教学。

引入向量学习立体几何的理由主要有以下几个方面：

（1）几何发展的根本出路是代数化，引入向量研究几何是几何代数化的需要。

几何历史的发展，大概经历了实验几何、综合推理几何、三角学和解析几何等四个阶段。现我国初中阶段已安排了综合平面几何，到高中阶段应该学习几何的代数化方法。这是当前世界各国基础数学教育应该达到的水平。中学生初步学习几何研究的代数方法，就可为以后学习打下坚实的基础。

（2）研究几何的代数方法有多种，如面积和体积的计算，质点组几何，笛卡尔时代的坐标几何，向量几何等，其中被实践证明，对中学生较为有效的方法是向量几何。使几何代数化首先应把几何中一个最基本的几何量——“两点的相对位置（位移）”代数化，两点的相对位置是几何中最基本的几何量，它包括距

离和方向两个要素,把这个量加以抽象,就引出向量的概念.然后把全等和平行(平移)、相似与勾股定理转化为向量的加法、数乘向量和内积三个运算及其算律.这样就把空间图形的基本性质转化为向量代数体系.

从以上分析可以看到,在高中引进向量的代数方法是比较自然的,学生也容易学习.大家知道,使用“形到形”的综合推理方法学习立体几何,对多数学生都是比较困难的.向量运算体系与算术、代数运算体系基本相似,同学就可运用他们熟悉的代数方法进行推理,来掌握空间图形的性质.

(3) 学生在高一已学习了平面向量,只要稍加推广就可得到空间向量运算体系.使用空间向量处理立体几何问题,使对它的研讨达到有效能算的水平.这样做不仅不会增加学生的负担,相反,由于学生掌握了一套有力的工具反而会降低学习的难度,减轻学生的负担.在立体几何中使用“形到形”的推理方法,由于空间图形的复杂性,比较难学.通过使用向量方法学习立体几何,可使学生较牢固地掌握向量代数工具,从而丰富学生的思维结构和运用数学的能力.

(4) 在现代基础教育阶段,学生只熟悉数的运算体系是不够的.向量是不同于数的一个运算体系.向量也是一个运算对象,掌握了向量运算,就会扩充学生对“运算”概念的理解,以后再学习其他运算体系,如矩阵、微积分运算就不难理解了.

(5) 向量在科技、经济以及日常生活各个领域都有着广泛的应用,特别是对高中物理及大学物理的学习会有更多的帮助.

根据以上分析,对大纲中安排9(B)方案进行实验,大方向是完全正确的.教师应在我国中学数学内容改革中作出应有的贡献.

本章教科书学习空间向量的目的,一方面为了使学生了解一些近代数学知识,以扩大学生的知识面,拓展学生的视野;另一方面为解决立体几何中某些用传统的纯几何方法解决时,技巧性较大、随机性较强的问题提供一些通法,以降低解题难度,减轻学生的负担,所以本单元内容是全章的重点之一,是学习第三大节内容的基础.

本大节在教学要求的尺度把握上,应重视空间向量的概念、运算方法及其应用,而不必过多追求理论上的严谨性,侧重于掌握向量这一工具的性质和用途.

由于空间向量是平面向量的推广,空间向量所涉及的内容与平面向量基本相似,所以本大节教科书的框架结构与第五章平面向量基本一致.因此,本大节的教学方法,宜多用类比法,在引导学生复习平面向量的相关知识的基础上,找出空间向量与平面向量的联系与区别.

另外,由于学生的空间观念还比较薄弱,教学中宜多采用教具演示,尽量使学生能够形象直观地掌握本大节内容.

3. 第三大节, 夹角与距离, 共两小节.

本大节要求学生掌握直线和平面、平面和平面所成的角、距离的概念,并能灵活运用勾股定理、正弦定理和向量代数方法计算有关的角和距离.了解异面直线距离的概念和计算.

在学生已初步掌握向量工具的基础上,可用向量工具解决立体几何中的一些较难的问题,一方面可进一步显示向量工具的威力,另外也为解决空间的度量问题找到了通法,减少学生学习度量问题的困难.过去学生解这类问题,主要方法是构造三角形,应用勾股定理、余弦定理和正弦定理求解.这种解法需要对图形进行平移、投影等转化技能,而且不同的问题需要不同的技巧.实践证明,没有向量工具,学生求解这类问题比较困难.有了向量运算工具,很多较难的空间计算问题,就有了统一的方法求解,但如果全用向量处理夹角和距离问题,虽有通法,但有时在解决一些较难问题时,运算量较大并需要一定的技巧,学生掌握这些技能同样会有困难.所以在教科书具体编写时,不是都是用向量计算方法,有些直接使用勾股定理和三角能解决的问题,就不再使用向量方法了.

4. 第四大节, 简单多面体与球, 共包含三小节. 简单多面体是指最基本、最常见的几何体. 根据大纲要求, 本章只讨论棱柱、棱锥、多面体和正多面体以及球.

由于初中已学过圆柱和圆锥的内容, 台体(圆台、棱台)又可以从小锥体上截去小锥体而得出, 因此本章内容比原《立体几何》(必修本)有较大幅度的精减, 删减了圆柱、圆锥、圆台、棱台等, 只保留了最基本的多面体即棱柱和棱锥, 一般多面体的有关概念. 增加了正多面体与欧拉定理. 最后以球的概念和计算问题结束.

关于多面体、棱柱和棱锥, 教学内容包括有关概念、性质和直观图的画法三部分. 其中直观图的画法仅重点讨论直棱柱和正棱锥的直观图. 另外要求学生会用空间向量工具解决棱柱的有关问题.

本大节还编排了正多面体与研究性课题: 多面体欧拉定理的发现的内容. 这与原《立体几何》(必修本)相比有较大的改变, 由原来的选学内容变为新教科书的必学内容, 增加了学习难度. 在教学中努力做到具体、形象、直观, 使学生易于接受.

本大节最后编排了球的内容. 教科书介绍了球的有关概念以及用极限思想推导了球的体积和表面积公式. 这与原《立体几何》(必修本)比较有很大的变化. 首先删掉了作为多面体和旋转体(包括球)的体积的理论支柱公理5和公理6(即祖暅原理), 其次删掉了球冠、球缺等内容. 这样做, 减轻了学生的负担, 更有利于新知识的学习.

(三) 教学中应注意的问题

1. 教学时一定要抓住重点, 分清主次. 9(B)从内容上看, 几乎包含了9(A)全部内容, 并多了空间向量一大节. 但教学课时与教学要求与9(A)基本一样. 显然我们要减弱综合推理的训练, 把教学重点转到使用向量代数方法解决立体几何问题上来. 对每一大节和小节以及各个知识点也要抓住内容的重点.

2. 正确处理综合推理和代数推理训练之间的关系. 虽然整章学习的重点是代数推理, 但根据大纲的要求, 不能完全忽视综合推理的训练. 在第一大节主要是使用的综合推理方法学习空间图形平行与垂直的性质. 为了解决“课时少”和“内容多”的矛盾, 适当减轻难度. 在编写第一大节时, 把现行教科书中, 以图形位置关系为主线的编排, 改为以性质为主线的编排, 以利于学生掌握图形的性质进行推理. 但综合推理训练的要求相对于9(A)要弱一些.

3. 平面基本性质是研究立体几何的重要基础, 空间的平行与垂直关系是立体几何的基本内容. 掌握好上述内容, 就抓住了学习立体几何的关键, 也为空间向量的学习和应用奠定了基础.

建立正确的空间观念, 实现由平面图形向立体图形的转化, 是学习立体几何的一个难点. 因此在教学中应注意以下几点:

(1) 联系实际提出问题 and 引入概念, 合理运用教具, 加强由模型到图形, 再由图形返到模型的基本训练. 由对照模型画直观图入手, 逐步培养学生由图形想象出空间几何位置关系的能力.

(2) 正确使用图形、文字、符号三种数学语言, 能够相互进行“翻译”, 是立体几何的一个特点, 也是学习的一个难点.

立体图形是立体几何研究的对象, 对它的一般描述是按“三维对象(几何模型)——图形、文字、符号”这种程序进行的. 其中, 图形是将考察对象第一次抽象后的产物, 是首先使用的数学词汇, 也是形象、直观的语言, 完成了由对象到图形的飞跃, 才有可能顺利进行后续内容的学习. 因此, 加强图形的运用十分重要. 教学中应该首先强调图形语言, 在图形的典型性、简明性、直观性、概括性及趣味性等方面下功夫, 充分发挥其作用. 文字语言是对图形的描述、解释与讨论. 符号语言则是文字语言的简单化和再次抽象. 显然, 首先建立的是图形语言, 其次是文字语言, 再次是符号语言, 最后形成对研究对象的三种数学语言的综合描述, 即整体认识. 如果有了这种整体认识, 三种语言达到融会贯通的程度, 即由一种描述能

转化其他描述,就基本能把握对象了。

对于研究对象的文字和符号描述,必须紧密联系图形,使抽象与直观结合起来,在图形的基础上发展其他数学语言。如果能在阐述定义、定理、公式等重要内容时,先给出图形再以文字和符号描述,综合运用几种数学语言,使其优势互补,就有可能收到更好的效果,给学生留下更加深刻的印象。

正确使用图形、文字、符号三种教学语言时,不要忘记掌握图形的性质是正确使用这三种语言的基础。

(3) 联系平面图形的知识,利用对比、引申、联想等方法,找出平面图形和立体图形的异同以及两者的内在联系,逐步培养学生将立体图形转化为平面图形的能力。

4. 培养和发展学生的逻辑思维能力是教学立体几何的重要任务,也是教学目的之一。9(B)新教科书的特點就在于,把几何综合推理和向量代数运算推理有机地结合起来,为学生的思维活动开发了更加广阔的天地。在教学中要紧紧把握住这个大方向,不能有所偏废。同时也应该认识到向量代数推理是更加精练、严密的推理,每一步运算推理都要根据运算法则进行。通过9(B)新教科书的教学,应该彻底改变“代数运算不算推理”的错误观点。

三、课时安排

本章教学时间约需 39 课时。具体内容和教学时间分配如下(仅供参考):

9.1 平面的基本性质	约 3 课时
9.2 空间的平行直线与异面直线	约 2 课时
9.3 直线和平面平行与平面和平面平行	约 2 课时
9.4 直线和平面垂直	约 4 课时
9.5 空间向量及其运算	约 6 课时
9.6 空间向量的坐标运算	约 3 课时
9.7 直线和平面所成的角与二面角	约 3 课时
9.8 距离	约 2 课时
9.9 棱柱与棱锥	约 5 课时
9.10 研究性课题:多面体欧拉定理的发现	约 3 课时
9.11 球	约 3 课时
小结与复习	约 3 课时

II

内容分析

引言

主要说明以下两点:

1. 本章学习的内容及学习空间图形性质的目的,通过提问平面几何的问题引出学生对空间图形性质的思考。

2. 由向量运算提出研究空间图形性质的代数方法:向量代数方法。

引言是入门课。教师可通过对平面图形一些重要性质的复习和提问引起学生对学习空间图形性质的兴

趣.通过平面向量的复习与提问,启发学生思考如何把平面向量推广为空间向量.

9.1 平面的基本性质

本小节共有四个知识点,平面的表示法,平面的基本性质,公理的推论,空间图形在平面上的表示法.这一小节是整章的基础.教师通过平面基本性质及其推论的教学,使学生对图形的直观认识上升到理性认识,而空间想象能力的培养主要通过对图形性质的学习,只有建立了空间图形性质的正确概念,这样才能学好立体几何.

为了形成学生的空间概念,这一小节通过太阳光线(视为平行光线)照射物体形成影子的性质来学习直观图的画法.先直观地了解平行射影的性质,这样就可正确地指导学生画出空间图形.

这一小节的教学要求是,掌握平面的基本性质,直观地了解空间图形在平面上的表示方法,会用斜二测画法画水平放置的平面图形的直观图和长方体、正方体的直观图.

1. 平面是最基本的几何概念,对它只加以描述而不定义,教学中借助实例来引入平面概念是必要的,还需指出几何中的平而是无限伸展的,用联系直线的无限伸展来理解.平面将整个空间分成两部分.

2. 点是构成空间的最基本的元素.直线、平面、几何体、球等都是由点构成的集合.从点集的角度认识空间图形问题是数学发展的结果.这对于利用数形结合的思想深入研究数学是非常必要的.

几何中许多符号的规定都出自将图形视为点集.例如,点 A 在平面 α 内,记作 $A \in \alpha$;直线 l 在平面 α 内,记作 $l \subset \alpha$;直线 l 不在平面 α 内,记作 $l \not\subset \alpha$.这里的点 A 是平面 α 的元素,而直线 l 是平面 α 的子集,因此在符号的使用上有所区别.在介绍有关符号的使用时,结合前面所学的集合知识讲清规定符号的背景,用以帮助学生正确使用符号.

3. 平面的基本性质,即公理,是研究立体几何的基本理论基础,必须要求学生很好的掌握.所谓公理,就是不必证明而直接承认的真命题,它们是推理论证的出发点和根据.

数学语言是在数学思维中产生和发展的,它是数学思维不可缺少的重要工具,在对数学语言的研究中,通常按数学语言所使用的主要词汇,将数学语言分为三种,即文字语言、符号语言和图形语言.例如,“如果一条直线和一个平面平行,经过这条直线的平面和这个平面相交,那么这条直线就和交线平行”是这个立体几何定理的文字语言形式,“ $l \parallel \alpha, l \subset \beta, \alpha \cap \beta = m \Rightarrow l \parallel m$.”这是此定理的符号语言形式.

“ ”则是此定理的图形语言形式.三种语言各有特点和不同的功能,它们互相依存,互相制约.学生应会把三种数学语言相互“翻译”,对学好数学是十分重要的.

4. 公理1是研究直线和平面的关系.从集合的角度看,这个公理是说,如果一条直线(点集)中有两个元素(点)属于一个平面(点集),那么这条直线就是这平面的真子集.用它既可判定直线是否在平面内,又可检验平面.

5. 公理2是研究平面和平面的关系的基础.在原《立体几何》(必修本)中这个公理是这样叙述的:“如果两个平面有一个公共点,那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线”,显然,这里所说的两个平面是不会重合的,否则就不是“有且只有一条通过这个点的公共直线”了.事实上,严格地说作为公理应叙述为“如果两个平面有一个公共点,那么它们有一条通过这个点的公共直线”,至于“仅有”两字对于不重合的两个平面是可以推出的,对于重合的两个面则不应是“仅有”.原课本为降低难度,将公理内容做了扩大处理,把可推出的“仅有”也直接写入结论.为避免产生误解,本章将公理2改叙为“如果两个平面有一个公共点,那么它们还有其他公共点,且所有这些公共点的集合是一条直线.这样就能结合已学的集合知识准确清楚地说明这个问题.

讲公理 2 时, 应强调对于不重合的两个平面, 只要它们有公共点, 它们就是相交的位置关系, 交集是一条直线.

6. 公理 3 及三个推论是研究有关确定平面的条件, 要使学生透彻理解公理中“有且只有一个”的含义. 这里“有”是说图形存在, “只有一个”是说图形唯一, 本公理强调的是存在和唯一两方面, 要求学生完整准确地理解和运用这一公理, 不能仅用“只有一个平面”代替“有且只有一个平面”, 否则就不表达存在性和唯一性了. 讲解公理 3 时, 应突出“不在同一直线上的三点”几个字. 可引导学生认识到经过一点、两点或同一直线上的三点可有无数个平面, 且不在同一直线上的两点, 不一定有平面. 这样可使学生重视“不在同一直线上的三点”这个条件的重要性.

7. 公理推论 1 的证明包括存在性和唯一性两部分, 另两个推论也应有这两部分组成.

推论 2 和推论 3 证明如下.

推论 2 经过两条相交直线, 有且只有一个平面.

证明: 如图 9-1, 设直线 a 、 b 相交于点 C , 在 a 、 b 上分别取不同于点 C 的点 A 和点 B , 点 A 、 B 、 C 是不在同一直线上的三点 (否则与 a 、 b 为两条相交直线矛盾) 由公理 3, 过 A 、 B 、 C 三点有且只有一个平面 α . 因为 a 、 b 各有两点在 α 内, 所以 a 、 b 在 α 内. 因此, 过 a 、 b 有平面 α .

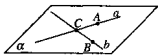


图 9-1

因为点 A 、 B 、 C 分别在直线 a 、 b 上, 所以它们在过 a 、 b 的平面内. 又由公理 3, 过点 A 、 B 、 C 的平面只有一个, 所以过直线 a 、 b 的平面只有一个.

推论 3 经过两条平行直线, 有且只有一个平面.

证明: 设直线 a 、 b 满足 $a \parallel b$. 由平行线的定义, a 、 b 在同一平面内. 这就是说, 过 a 、 b 有平面 α .

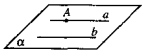


图 9-2

设点 A 为直线 a 上任一点, 则点 A 在直线 b 外, 点 A 和直线 b 在过 a 、 b 的平面 α 内, 又由公理 3 的推论 1, 过点 A 和直线 b 的平面只有一个. 所以过直线 a 、 b 的平面只有一个.

8. 本节中使用了 $\in$ 、 $\subset$ 、 $\cap$ 等集合符号, 在读法上仍可用传统的几何语言. 例如, $A \in \alpha$, 读作“点 A 在平面 α 内”; $a \subset \alpha$, 读作“直线 a 在平面 α 内”; $\alpha \cap \beta = l$, 读作“平面 α 、 β 交于直线 l ”. 本章中有关的这类符号, 在读法上一般都可这样处理. 需要指出, 本章中几何符号的用法符合有关国家标准的规定, 使用时原则上与集合符号的含义一致, 但为方便起见, 个别地方的用法与集合符号略有不同. 例如, 直线 a 与 b 交于点 A , 记作 $a \cap b = A$, 是 $a \cap b = \{A\}$ 的简略记法.

9. 水平放置的空间图形的直观图的画法, 指的是空间图形在平面内的表示方法, 一般地说, 正确的画图, 对理解空间图形问题是很重要的.

关于“直观图”可向学生指出: 把空间图形在平面内画得既富立体感, 又能表达出图形各主要部分的位置关系和度量关系的图形, 就是直观图.

关于直观图的画法, 本章中只学习斜二测画法. 由于把原《立体几何》(必修本) 中的圆柱、圆锥、圆台内容删掉, 用正等测画法画直观图也随之删掉. 用斜二测画法画直观图, 关键是让学生掌握画水平放置的空间图形的底面图形的直观图. 本节中用两个例子说明画空间图形的底面直观图的方法和步骤, 用第三个例子说明画空间图形的直观图. 这种一步到位的编排的优点是一次性教给学生完整的画直观图的方法, 从而为后面的教学铺平了道路, 也有利于培养学生分析和解决立体几何的有关问题的能力.

画直观图时, 从每一步骤都要对学生严格要求, 不能敷衍了事, 在教学中要给学生做示范, 如何使用三角尺画平行线, 培养学生正确的画图习惯, 养成一丝不苟的良好学风.

9.2 空间的平行直线与异面直线

本小节共有两个知识点，平行直线、异面直线，以平行公理和平面基本性质为基础进一步学习平行直线的性质，把平行公理和平行线的传递性推广到空间并引出平移概念，了解了平移的初步性质，在这一节里还要由直线平行的性质来学习异面直线及其夹角的概念。

要求学生正确掌握空间平行直线性质和异面直线及其夹角的概念，这样就为学生学习向量和空间图形的性质打下了基础。

1. 空间直线的三种位置关系在现实中大量存在，学生对它们已有一定感性认识，且在初中几何中也有所学习。其中，相交直线和平行直线都是共面直线，学生对它们已很熟悉。异面直线的概念，是学生比较生疏的内容，也是本节的重点和难点。在 9.1 节“平面的基本性质”之后继续学习本节，有利于学生实现由认识平面图形到认识立体图形的飞跃，逐步改变学生只习惯于在一个平面内考虑问题的状态。

2. 空间两条不重合的直线有三种位置关系，若从有无公共点的角度看，可分为两类：

(1) 有且仅有一个公共点——相交直线；

(2) 没有公共点—— $\begin{cases} \text{平行直线,} \\ \text{异面直线.} \end{cases}$

若从是否共面的角度看，也可分为两类：

(1) 在同一平面内—— $\begin{cases} \text{相交直线,} \\ \text{平行直线;} \end{cases}$

(2) 不同在任一平面内——异面直线。

从上述任一角度都只能把空间直线的位置关系粗略区分。只有把两种角度研究结合起来，才能对三种位置关系作出精确的描述。

3. 本节内容直接从“空间的平行直线”学习起，而把初中几何已学习过且在 9.1 节进一步阐述两相交直线的作用的前提下，删去了原《立体几何》（必修本）中的“两条直线的位置关系”一小节内容是可取的。

本节在复习初中几何中的平行公理及重要性质的基础上，推广到空间就是公理 4，它表示空间的平行线的传递性。它是证明“等角定理”的基础，也是今后论证平行问题的主要依据。公理 4 中，若把直线 a 、 b 、 c 的平行关系限制在同一平面内，可看作公理 4 的一种特殊情况。 a 、 b 、 c 可以不共面，而是两两共面。应逐步培养学生从空间的角度观察、分析平行关系的能力。教学中应提醒学生，并非所有平面图形运用的结论，对于立体图形仍然适用，对此可用反例适当解释。一般地说，要把关于平面图形的结论推广到立体图形，必须经过证明。

“等角定理”给两条异面直线所成的角的定义提供了可能性与唯一性，删掉了原《立体几何》（必修本）中此定理的推论。对空间图形平移的概念及其规律做了明确的阐述。本小节还专门定义了空间四边形及其画法，为后面的教学提供了方便。

4. 教学异面直线的概念时，应遵循由具体例子到抽象概念的顺序。深刻理解“两条直线一定不会共面”的含意。教学中应结合正反两方面的例子，说明这两条直线不能同在任何一个平面内，它们构成一个空间图形，绝不是平面图形，而能同在一个平面内的两条直线有且只有相交和平行这两种情况（公理的推论 2 和推论 3 已说清楚）。因此，两条直线是异面直线等价于这两条直线既不相交也不平行。如图 9-3，不能因为 $l_1 \subset \alpha$ ， $l_2 \subset \beta$ ，就说 l_1 、 l_2 一定是异面直线，实际上若 $l_1 \cap l_2 = O$ ，则 l_1 、 l_2 就构成平面图形（确定的平面）。

5. 表示异面直线时，以平面为衬托（图 9-4(1)），可以显示得更清楚。否则，就难以画出使人一目了然

的两条异面直线，而且容易与两条相交直线相混淆(图 9-4(2))。

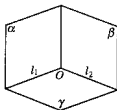


图 9-3

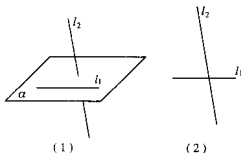


图 9-4

6. 教科书中关于异面直线的定理(原《立体几何》(必修本)是作为例题的)，给我们提供了判断和证明异面直线的依据和方法。要证明两条直线是异面直线，必须根据异面直线的定义，即证明两条直线一定不会共面，可先假设这两条直线共面，然后由此推出矛盾(用反证法)，最后得出正确结论。

7. 异面直线的夹角是由两条相交直线的夹角扩充而生成的，由平移原理可知，当两条异面直线在空间的位置确定后，它们的夹角的大小也就随之确定了。这对于初学立体几何的学生来说，是较难理解的，对“异面直线还有夹角”这一概念感到陌生和新鲜，是学习的一个难关。教学中应通过现实生活中的例子，说明如何抽象出异面直线的夹角概念。强调异面直线的夹角的存在性和学习的必要性。异面直线的夹角的范围是 $0^\circ \sim 90^\circ$ ，不含 0° 。最后，通过教科书中正方体的练习，逐步深入理解异面直线及其夹角，使学生较好地掌握这一内容。

要计算异面直线 a 、 b 的夹角的大小，必须通过平移转化为相交直线 a' 、 b' 的夹角。如何实现“转化”是学习中的一个难关。根据异面直线夹角的定义，在空间任取一点 O 实现转化固然可以，而在实际操作中，可将点 O 取在 a 或 b 上。

两条异面直线互相垂直，即它们的夹角是直角，这是两条直线是异面直线时的一种特殊位置情况。应向学生指出：今后如果说两条直线互相垂直，它们可能相交，也可能异面。

9.3 直线和平面平行与平面和平面平行

本小节有两个知识点，直线和平面平行，平面和平面平行。直线与平面，平面与平面平行的性质也可看作平行公理和平行线传递性质的推广。直线与平面、平面与平面平行判定的依据是直线和直线平行。这些平行关系有着本质上的联系，平行平面的传递性在练习中出现，学生做完练习，教师可加以总结让学生掌握这一性质。

通过教学要求学生掌握直线和平面，平面和平面平行的判定与性质。这两个平行关系是下一大节学习共面向量的基础。

前面 3 节主要讨论空间的平行关系，其中平行线的传递性和平行平面的性质是这三小节的重点。

1. 直线和平面位置关系有三种，用公共点的个数归纳如下：

(1) 直线在平面内——有无数个公共点；

(2) 直线不在平面内 $\begin{cases} \text{相交——只有一个公共点；} \\ \text{平行——没有公共点。} \end{cases}$

引入这些概念时，可结合实例加以说明。

2. 在直线和平面位置关系中，平行关系不仅应用较多，同时又是学习平面和平面位置关系的基础，所以直线和平面平行的判定和性质是本小节的一个重点。

直线和平面的判定定理，是通过直线和直线平行来判定直线和平面平行。这里所说的直线和直线，是指平面内的一条直线和平面外的一条直线。这个定理用符号来表示，即

$$\left. \begin{array}{l} a \not\subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ a // b \end{array} \right\} \Rightarrow a // \alpha.$$

应用此定理时，要注意 3 个条件必须齐备。

讲直线和平面平行的判定定理时，可以从实例引入。例如，由门扇的对边互相平行，进一步观察出门扇不论转动到什么位置，它与活动的竖直的一边始终平行于固定的竖直边所在的墙面。

反证法是一种重要的间接证法，学生从初中到现在已经学习过，在证明直线和平面平行的判定定理时，又一次使用了反证法，这可使使学生进一步熟悉反证法的实质及其一般步骤。

直线和平面平行的性质定理，是由直线和平面平行推出直线和直线平行。这里所说的直线和直线，是指与平面平行的一条直线和过这条直线的平面与已知平面（线面平行中的那个面）的交线。这个定理用符号来表示，即

$$\left. \begin{array}{l} a // \alpha \\ a \subset \beta \\ \alpha \cap \beta = b \end{array} \right\} \Rightarrow a // b.$$

要防止学生误解为“一条直线平行于一个平面，就平行这个平面内的一切直线”。教学中可以结合具体模型或实物，纠正学生的错误理解。

教科书中的例 2 求证：如果过一个平面内一点的直线与该平面平行的一条直线平行，则这条直线在这个平面内。用符号来表示，即 已知： $l // \alpha$ ，点 $P \in \alpha$ ， $P \in m$ ，且 $m // l$ 。求证： $m \subset \alpha$ 。这个定理表明，一切与一平面平行的直线都可通过平移，使它们位于平面内，为下面讲共面向量打下基础。

3. 讲空间两个平面的位置关系时，可以让学生观察教室的墙壁、地面、屋顶等，或观察实物模型（如立方体）。由观察结果归纳出两平面的两种不同的位置关系的区别在于它们是否有公共点。

两平面或有无数个公共点，且这些公共点的集合是一条直线；或没有公共点。当两个平面没有公共点时，它们互相平行。表示两个平面平行时，应把表示两个平面的平行四边形画成对应边平行（图 9-5 (1)），而不应画成图 9-5(2)那样。

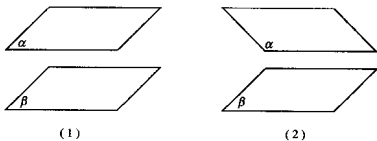


图 9-5

4. 如果两平面平行，那么在其中一个平面内的所有直线一定与另一个平面无公共点，即这些直线都平行于另一平面。反之，如果一平面内所有直线都平行于另一平面，那么这两个平面无公共点，即两平面平行。这样，我们就可以由直线和平面平行（一个平面内的所有直线与另一平面平行）推断出平面和平面平行。但是实际上很难对一个平面内的所有直线逐一考虑，于是就引出了两个平面平行的判定定理及其推论。用反证法证明两平面平行的判定定理时，可以按以下顺序启发学生作出结论。

(1) 如果 $\alpha \not\parallel \beta$ ，那么 α 与 β 的公共部分是什么图形？

(2) 如果 α 与 β 相交, 那么 α 与 c 、 b 与 c 是什么关系?

(3) 相交直线 a 和 b 都与交线平行合理吗? 错误结论是怎样产生的?

5. 教学中应向学生指出: 已知两个平面平行, 虽然一个平面内的任何直线都平行于另一个平面, 但是这两个平面内的所有直线并不一定相互平行, 它们可能是平行直线, 也可能是异面直线, 但不可能是相交直线 (否则将导致这两个平面有一个公共点).

教科书中的例 3 仍可作为两个平行平面的性质使用. 原《立体几何》(必修本) 把例 3 放在练习中处理的.

6. 讲完本节, 后可把直线和直线平行、直线和平面平行、两个平面平行三种情况进行比较, 以便学生系统地理解和记忆.

9.4 直线和平面垂直

本小节包括两个知识点: 直线和平面垂直及正射影, 三垂线定理. 镜面对称是空间的重要性质, 最好要让学生了解. 直线与平面的垂直的性质是研究空间对称性的基础. 细心分析直线和平面垂直的判定定理的证明过程, 就是由平面的轴对称转换为空间的镜面对称的过程. 这一小节特别重视判定定理的教学, 要向学生指出定理证明过程的本质. 三垂线定理是由直线和平面垂直判定定理得出的一个最重要的空间图形的性质, 在传统几何教育中这个定理占有极重要的地位. 在这里, 我们只重视概念的教学, 减弱围绕三垂线定理的解题训练. 这是因为我们有更有效的向量处理空间的垂直问题.

这一小节的教学要求是: 掌握直线和平面垂直的概念, 掌握直线和平面垂直的判定定理, 了解三垂线定理及其逆定理. 这里的“掌握”与 9(A) 的要求不同, 主要是理解定理的本质和直接应用. 不要进行大量的解题训练的教学, 这样就可减少课时, 以加强空间向量的教学.

1. 直线和平面垂直, 是直线和平面相交中的一种特殊情况. 它是从现实世界中抽象并概括出的数学概念. 学生学习本节内容并不十分困难, 关键在于如何使学生真正掌握, 从而提高分析和解决问题的能力. 这是教学中应该研究的问题.

2. 直线和平面垂直的概念可以从现实生活的实例引出, 加深学生的感性认识.

在讲直线和平面垂直的定义时, 应强调指出: 一条直线垂直于一个平面, 是指这条直线垂直于这个平面内的任何一条直线. 由此, 我们经常使用下面的命题:

$$\left. \begin{array}{l} a \perp a \\ b \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp b.$$

3. 利用直线和平面垂直的定义, 直接判定线面垂直要考虑平面内的每一条直线, 这在运用时是很难做到的 (由于平面内的直线有无数条). 直线和平面垂直的判定定理, 则解决了上述困难. 根据这一定理, 只要在平面内选择两条相交直线, 考虑它们是否与平面外的直线垂直即可, 这个定理将原本判定线面垂直的问题, 转化为判定直线和直线垂直来解决. 这里的“直线和直线”是指平面外的一条直线和平面内的两条相交直线.

直线和平面垂直的判定定理的证明, 是通过作辅助线 (实际上是关于平面的反射变换) 完成的, 这个证明较长, 且要分两种情况分别考虑. 教学中应将证明的思路作为分析的主要内容, 面不一定要学生死记证明的叙述过程. 讲这个定理时, 可以通过反例强调“平面内的两条相交直线”这个条件中的“两条”和“相交”是必须满足的, 至于这两条相交直线是否与已知直线 (即要证为垂直的那条) 有公共点, 则并不重要.

4. 教科书中的例 1 (注: 本小节的练习第 3 题: “过一点和一条直线垂直的平面只有一个”是例 1 的逆命题) 和例 3 这两个命题可以作为直线和平面垂直的性质来使用.

5. “正射影”这段内容包含的概念较多,通过教科书图 9-39 正确理解点、线、图形 F 在平面内的射影的概念,为学习三垂线定理等内容打好基础.

6. 三垂线定理及其逆定理可以合起来表述如下:

设 l 是平面 α 的一条斜线, l' 是 l 在 α 内的射影, m 是 α 内的一条直线,则有

$$m \perp l' \Leftrightarrow m \perp l.$$

这个定理及其逆定理,是垂直射影的重要性质,因此要求学生要有深刻的了解.

三垂线定理³⁾其逆定理的证明思路是一致的,都是利用直线和平面垂直的判定定理.教学中可以让学生仿照定理的证明,写出逆定理的证明过程.

9.5 空间向量及其运算

本节共有 4 个知识点:空间向量及其线性运算、共线向量与共面向量、空间向量的分解定理、两个向量的数量积.这一节是全章的重点,有了第一节空间平行概念的基础,我们就很容易把平面向量及其运算推广到空间向量.本教科书学习空间向量的主要目的,是掌握空间向量及其运算并解决立体几何问题.

本小节首先把平面向量及其线性运算推广到空间向量.同学已有了空间的直线和平面平行和平面和平面平行概念,这种推广对学生学习已无困难,但仍要一步步地进行,学生要时刻牢记,现在研究的范围已由平面扩大到空间.一个向量已是空间的一个平移,两个不平行向量确定的平面已不是一个平面,而是互相平行的平行平面集.要让学生在空间上一步步地验证运算法则和运算律.这样做,一方面通过复习平面向量学习了空间向量,另一方面可加深培养学生的空间观念.

当我们把平面向量推广到空间向量后,很自然地要认识空间向量的两个最基本的子空间:共线向量和共面向量,把平行向量基本定理和平面向量基本定理推广到空间,然后由这两个定理推出空间直线和平面的向量表达式.有了这两个表达式,我们就可很方便地使用向量工具解决空间的共线和共面问题.

在学习共线和共面向量定理后,我们学习空间最重要的基础定理:空间向量分解定理.这个定理是空间几何研究数量化的基础.有了这个定理空间结构变得简单明了,整个空间被 3 个不共面的基向量所确定.空间一个点或一个向量和实数组 (x, y, z) 建立起一一对应关系.

本节的最后一个知识点是两个向量的数量积.由平面两个向量的数量积推广到空间,最重要的是让学生建立向量在轴上的投影概念.为了减轻教学难度,内积的几个运算性质教科书中没有证明,学生基础好的学校可在教师的指导下,由学生自己证明.

9.5.1 空间向量及其加减与数乘运算

1. 本小节在第五章平面向量的基础上,类比地引入了空间向量的概念、表示、相同或相等关系、空间向量的加法、减法、数乘及这三种运算的运算律.最后举例说明了这些知识的应用.

2. 通过本小节的教学,应使学生达到如下要求:

- (1) 理解空间向量概念,掌握空间向量的几何表示法和字母表示法.
- (2) 会用图形说明空间向量加法、减法、数乘向量及它们的运算律.
- (3) 能运用空间向量的运算意义及运算律解决简单的立体几何中的问题.

3. 本小节的重点是空间向量的运算和运算律,难点是应用向量解决立体几何问题.

4. 空间向量的定义、表示方法及相等关系都与平面向量相同.可在复习平面向量的定义、表示方法及其相等关系后直接给出,然后说明:平面向量仅限于研究同一平面内的平移,而空间向量研究的是空间的平移:平面上,若以两个同向向量为对边可构成平行四边形,则这两个向量相等,在空间,这个结论同样