

719932 高等学校试用教材

3101
5/4042
т. 2

微分与积分学

下 册

N. PISKUNOV 著

吉林人民出版社

高等学校试用教材

N. Piskunov 著

微分与积分学

《下册》

邓本让 陈俊文等译

景毅 李沐荪 校

吉林人民出版社

高等学校试用教材
微 分 与 积 分 学
〈下 册〉

邓本让 陈俊文 等译
景毅 李沐荪 校

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行
长春市第二印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 24印张 4插页 531,000字

1983年7月第1版 1983年7月第1次印刷

印数：1—7,324册

统一书号：13091·146 定价：2.50元

内 容 提 要

原书分 I、II 两卷，共廿一章，中文译本分上、下两册出版。下册包括的内容有：微分方程、重积分、曲线积分与曲面积分、级数、付里叶级数、数学物理方程、运算微积及其某些应用、概率论与数理统计初步、矩阵等九章。

本书具有系统完整、内容广泛、论述清楚和简明易懂等特点。可作为高等工科院校电子、电信、电机、仪器、光学、机械和工程等专业的试用教材。也可作为在高等工科院校担任基础数学课的教师、研究生的教学参考书和工矿企业有关工程技术人员自学参考书。

参加本册翻译工作的有：邓本让、陈俊文、胡锡全、周静娥。

目 录

第一章	微分方程	1
1.1	问题的提出·介质阻力与运动速度成比例的运动方程·悬链线方程	1
1.2	定义	5
1.3	一阶微分方程(一般概念)	7
1.4	变量分离的方程和可分离变量的方程·儒的裂变问题	14
1.5	一阶齐次方程	19
1.6	可化为齐次方程的方程	22
1.7	一阶线性方程	27
1.8	伯努利方程	32
1.9	恰当微分方程	34
1.10	积分因子	38
1.11	曲线族的包络	41
1.12	一阶微分方程的奇解	50
1.13	克莱罗方程	52
1.14	拉格朗日方程	54
1.15	正交轨线和等角轨线	57
1.16	高阶微分方程(初步)	63
1.17	形如 $y^{(n)} = f(x)$ 的方程	65
1.18	二阶微分方程中可以化为一阶方程的某些类型·脱离速度问题	69
1.19	积分二阶微分方程的图解法	79
1.20	齐次线性方程·定义和一般性质	82
1.21	二阶常系数齐次线性方程	91

1•22	n 阶常系数齐次线性方程	97
1•23	非齐次二阶线性方程	100
1•24	非齐次二阶常系数线性方程	106
1•25	高阶非齐次线性方程	114
1•26	力学振动的微分方程	119
1•27	自由振动	121
1•28	强迫振动	126
1•29	常微分方程组	131
1•30	常系数线性微分方程组	139
1•31	关于李雅普诺夫稳定性理论	147
1•32	一阶微分方程近似解的欧拉方法	168
1•33	关于按泰勒公式近似解微分方程的差分方法 • 阿达姆 斯方法	172
1•34	积分一阶微分方程组的一种近似方法	181
	第一章 习题	187
第二章	重积分	207
2•1	二重积分	207
2•2	计算二重积分	210
2•3	计算二重积分 (续)	217
2•4	用二重积分计算面积和体积	225
2•5	极坐标下的二重积分	228
2•6	二重积分中的变量置换 (一般情形)	238
2•7	计算曲面的面积	245
2•8	质量的密度分布和二重积分	250
2•9	平面图形面积的惯性矩	251
2•10	平面图形面积的重心坐标	257
2•11	三重积分	259
2•12	计算三重积分	260
2•13	三重积分中的变量置换	267
2•14	立体的惯性矩和重心坐标	272

2.15	计算含参数的积分	275
第二章 习题		277
第三章 曲线积分和曲面积分		285
3.1	曲线积分	285
3.2	计算曲线积分	289
3.3	格林公式	296
3.4	曲线积分与积分路径无关的条件	299
3.5	曲面积分	305
3.6	计算曲面积分	308
3.7	斯托克斯公式	311
3.8	奥斯特罗格拉得斯基公式	318
3.9	哈密顿算子及其某些应用	321
第三章 习题		326
第四章 级数		335
4.1	级数·级数的和	335
4.2	级数收敛的必要条件	339
4.3	比较正项级数	342
4.4	达朗贝尔判别法	345
4.5	柯西判别法	350
4.6	级数收敛的积分判别法	352
4.7	交错级数·莱布尼兹定理	356
4.8	任意项级数·绝对收敛和条件收敛	359
4.9	函数项级数	364
4.10	受控级数	366
4.11	级数和的连续性	369
4.12	级数的积分和微分	372
4.13	幂级数·收敛区间	376
4.14	幂级数的微分	382
4.15	$x-a$ 的幂级数	384
4.16	泰勒级数与马克劳林级数	386

4·17	函数的级数展开式	388
4·18	欧拉公式	391
4·19	二项式级数	392
4·20	函数 $\ln(1+x)$ 的幂级数展开式·计算对数	396
4·21	定积分的级数计算	399
4·22	用级数积分微分方程	401
4·23	贝塞尔方程	406
4·24	复数项级数	412
4·25	复变量的幂级数	414
4·26	用逐步逼近法(迭代法)求一阶微分方程的解	417
4·27	微分方程解的存在的证明·近似解的误差估计	419
4·28	微分方程解的唯一性定理	425
第四章 习题		427
第五章 付里叶级数		441
5·1	定义·问题的叙述	441
5·2	函数的付里叶级数展开式	446
5·3	关于周期函数的付里叶展开式的附注	453
5·4	偶函数和奇函数的付里叶级数	456
5·5	具有周期为 $2l$ 的函数的付里叶级数	459
5·6	关于非周期函数的付里叶级数的展开式	461
5·7	用三角多项式平均逼近已知函数	463
5·8	狄利克雷积分	470
5·9	付里叶级数在已知点的收敛性	474
5·10	付里叶级数收敛的某些充分条件	476
5·11	实用调和分析	479
5·12	复数形式的付里叶级数	481
5·13	付里叶积分	483
5·14	复数形式的付里叶积分	488
5·15	付里叶级数展开与正交函数系的关系	491
5·16	线性函数空间的概念·函数的付里叶级数展开和向量	

分解的比较	495
第五章 习题	500
第六章 数学物理方程	503
6.1 数学物理方程的基本类型	503
6.2 弦振动方程的导出·边值问题的形成·导体中电振荡 方程的导出	504
6.3 用分离变量法(付里叶方法)求弦振动方程的解	509
6.4 杆中的热传导方程·边值问题的形成	513
6.5 空间的热传导方程	515
6.6 用有限差分法解热传导方程的第一边值问题	520
6.7 无界杆中的热传导	523
6.8 简化为求解拉普拉斯方程的问题·边值问题的提出	528
6.9 柱坐标下的拉普拉斯方程·关于所求函数在圆环的内 圆周和外圆周上分别为常数值狄利克雷问题的解	534
6.10 圆内狄利克雷问题的解	537
6.11 用有限差分法求狄利克雷问题的解	542
第六章 习题	545
第七章 运算微积及其某些应用	551
7.1 原函数及它的变换	551
7.2 函数 $\sigma_0(t)$, $\sin t$, $\cos t$ 的变换	553
7.3 自变量尺度改变的函数的拉氏变换·函数 $\sin at$, $\cos at$ 的拉氏变换	555
7.4 变换的线性性质	556
7.5 位移定理	557
7.6 函数 $e^{-\alpha t}$, $\sinh at$, $\cosh at$, $e^{-\alpha t} \sin at$, $e^{-\alpha t} \cos at$ 的 变换	558
7.7 变换的微分法	559
7.8 导数的变换	562
7.9 变换表	563
7.10 已知微分方程的特征方程	565

7.11	分解定理	570
7.12	利用运算微积的方法解微分方程及微分方程组的例子	572
7.13	褶积定理	575
7.14	机械振动的微分方程·电路理论的微分方程	578
7.15	振动微分方程的解	579
7.16	自由振动的研究	581
7.17	在周期性外力作用下机械及电振动的研究	582
7.18	在共振情形下振动方程的解	585
7.19	延迟定理	586
7.20	δ 函数及其变换	588
第七章 习题		592
第八章 概率论与数理统计初步		594
8.1	随机事件·随机事件的相对频率·事件的概率·概率论的主题	594
8.2	概率的古典定义和概率的计算	597
8.3	概率的加法·互补随机事件	600
8.4	独立事件概率的乘法	604
8.5	相关事件·条件概率·全概率	606
8.6	原因概率·贝叶斯公式	611
8.7	离散随机变量·离散随机变量的分布律	614
8.8	相对频率和重复试验中相对频率的概率	618
8.9	离散随机变量的数学期望	624
8.10	方差·均方(标准)差·矩	630
8.11	随机变量的函数	634
8.12	连续随机变量·连续随机变量的概率密度函数·发生在特定区间内的随机变量的概率	636
8.13	分布函数·均匀分布律	640
8.14	连续随机变量的数字特征	644
8.15	正态分布·正态分布的数学期望	647

8•16	正态分布随机变量的方差和标准差	650
8•17	随机变量的值落在已知区间内的概率 • 拉普拉斯函数 • 正态分布函数	651
8•18	概差	658
8•19	用概差表示正态分布 • 简化的拉普拉斯函数	659
8•20	3 σ 规则 • 误差分布	661
8•21	平均算术误差	663
8•22	精度模 • 误差分布特征之间的关系	664
8•23	二维随机变量	665
8•24	平面上的正态分布	670
8•25	二维正态分布随机变量落在边平行于扩散主轴的矩形内的概率	671
8•26	二维随机变量落在扩散椭圆内的概率	674
8•27	数理统计问题 • 统计数据	676
8•28	统计序列 • 直方图	677
8•29	确定被测量的适当值	680
8•30	确定分布律的参数 • 李雅普诺夫定理 • 拉普拉斯定理	682
第八章 习题		687
第九章 矩阵		692
9•1	线性变换 • 矩阵表示法	692
9•2	关于矩阵的一般定义	696
9•3	逆变换	698
9•4	矩阵的运算 • 矩阵的加法	701
9•5	用矩阵将一向量变换为另一向量	706
9•6	逆矩阵	708
9•7	矩阵求逆	709
9•8	线性方程组及其解的矩阵记法	712
9•9	用矩阵方法解线性方程组	713
9•10	正交映射 • 正交矩阵	717

9.11	线性变换的特征向量	721
9.12	在基底向量为特征向量时线性变换的矩阵	724
9.13	当改变基底时, 线性变换的矩阵的改变	727
9.14	二次型及其变换	730
9.15	矩阵的秩 · 线性方程组解的存在性	732
9.16	矩阵的微分法与积分法	734
9.17	微分方程组的矩阵记法及常系数微分方程组的解	736
9.18	n 阶线性微分方程的矩阵记法	743
9.19	在矩阵记法下用逐次逼近法求解变系数线性微分方程组	745
第九章	习题	750
附录		752

第一章 微分方程

1.1 问题的提出·介质阻力与运动速度成

比例的运动方程·悬链线方程

设函数 $y = f(x)$ 从数量方面反映了某种现象。常常是不能直接建立 y 对 x 的依赖关系，但是能够给出量 x 、 y 以及 y 对 x 的导数： y' ， y'' ， $\dots$ ， $y^{(n)}$ 之间的关系，即可以写出一种微分方程。

从所建立的变量 x 、 y 和导数之间的关系，需要确定 y 对 x 的直接依赖关系，即要找出 $y = f(x)$ ，或者，就是所谓要积分微分方程。

我们考虑两个实例。

例 1. 质量为 m 的物体从某一高度落下。如果除重力外，物体还受到与其速度成比例（比例常数 k ）的空气阻力的作用。要求确定这个物体下落速度的变化规律，换句话说，需要求出 $v = f(t)$ 。

解. 根据牛顿第二定律

$$m \frac{dv}{dt} = F,$$

其中 $\frac{dv}{dt}$ 是运动物体的加速度（速度对时间的导数），而 F 是沿着运动方向作用于物体上的力。这个力是两个力的合力：重力 mg 和空气阻力 $-kv$ ，它带负号是因为该力的方向与速

度方向相反。因此我们有

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv. \quad (1)$$

这个关系式联系着未知函数 v 和它的导数 $\frac{dv}{dt}$ ，它就是未知

函数 v 的微分方程。这是某种类型的降落伞的运动方程。求解微分方程就是指要找出函数 $v = f(t)$ ，使其恒满足已给微分方程。读者很容易验证，这样的函数有无穷多个。任何形如

$$v = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \quad (2)$$

的函数都满足方程 (1)，而不管常数 C 取何值。这些函数中的哪一个函数满足所要求的 v 对 t 的依赖关系呢？为了求出这个函数，我们利用附加条件：当物体下落时给它的初始速度为 v_0 。（作为特殊情形它可以是零），我们假设这个初始速度是已知的，于是，未知函数必须是这样的函数：当 $t = 0$ 时（当运动开始时），满足条件 $v = v_0$ 。把 $t = 0$ ， $v = v_0$ 代入公式 (2)，我们求出

$$v_0 = C + \frac{mg}{k},$$

由此

$$C = v_0 - \frac{mg}{k}.$$

这样，常数 C 就被确定了，而所要求的 v 对 t 的依赖关系是

$$v = \left(v_0 - \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}. \quad (2')$$

从这个公式得出,对充分大的 t , 速度 v 几乎与 v_0 无关。

注意到如果 $k = 0$ (不存在空气阻力或者这个阻力很小, 我们可以忽略它), 则我们就得到物理学中熟知的结果*:

$$v = v_0 + gt. \quad (2'')$$

这个函数满足微分方程(1)和初始条件: 当 $t = 0$ 时, $v = v_0$ 。

例 2. 一条柔软均匀的绳索, 两端被悬挂起来。求它在本身重力作用下形成的曲线的方程 (对于任何悬挂的绳、导线、链条, 方程是同样的)。

解. 令 $M_0(0, b)$ 是绳的最低点, 而 M 是绳上的任意一点 (图 1)。我们考虑绳的一部分 M_0M 。这部分在三个力的合力作用下是平衡的:

(1) 张力 T , 它沿着点 M 的切线方向作用并同 x 轴形成角 φ ;

(2) 点 M_0 处的张力 H , 它沿着水平方向起作用;

(3) 绳的重量 γs , 垂直向下起作用, 此处 s 是弧 M_0M 的长度, 而 γ 是绳的线密度。

把张力 T 分解为水平和垂直的分力, 我们得到平衡方程:

$$T \cos \varphi = H, \quad T \sin \varphi = \gamma s.$$

第二个方程的各项除以第一个方程的对应项, 我们得到

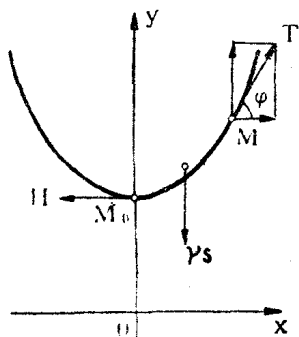


图 1

* 公式 (2'') 可以从 (2') 取极限得到:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left[\left(v_0 - \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \right] = v_0 + gt.$$

$$\tan \varphi = \frac{\gamma}{H} s. \quad (3)$$

现在设所求的曲线方程可以写为 $y = f(x)$ ，这里 $f(x)$ 是要求的未知函数。注意到，

$$\tan \varphi = f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

因此

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a} s. \quad (4)$$

此处 a 表示比值 $\frac{H}{\gamma}$ 。

把 (4) 式两端对 x 微分：

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{a} \frac{ds}{dx}. \quad (5)$$

但我们知道 (见上册 6.1 节)，

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

把这个表达式代入方程 (5)，我们便得到所求曲线的微分方程：

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (6)$$

它表示未知函数 y 的一阶和二阶导数之间的关系。

在此不给出解这个方程的方法，仅指出任何形如

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a} + C_1\right) + C_2 \quad (7)$$

的函数，对 C_1 和 C_2 的任何给定的值，都满足方程 (6)。把

已给函数的一阶和二阶导数代入 (6), 就可以验证这一点. 以后我们将指出而不证明 (见1.18节), 这些函数 (对不同的 C_1 和 C_2) 取尽了方程 (6) 的所有可能的解.

这样得到的所有函数的图形, 称为悬链线.

现在我们指出, 应如何选择常数 C_1 和 C_2 , 以便得到所求的特定悬链线, 其最低点 M 的坐标为 $(0, b)$. 因为当 $x=0$ 时, 悬链线上的点的位置最低, 所以该点的切线是水平的, 即 $\frac{dy}{dx} = 0$, 又知该点的纵坐标等于 b , 即 $y = b$, 于是, 从

(7) 式我们求出

$$y' = \sinh\left(\frac{x}{a} + C_1\right),$$

在这里令 $x=0$, 得到 $0 = \sinh C_1$, 因而 $C_1 = 0$. 如果点 M_0 的纵坐标是 b , 则当 $x=0$ 时, $y = b$.

设 $x=0$ 和 $C_1=0$, 从方程 (7) 我们得到 $b = \frac{a}{2}(1+1) + C_2$, 由此 $C_2 = b - a$. 最后我们有

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + b - a.$$

如果我们取 M_0 的纵坐标等于 a , 则方程 (7) 的形式十分简单. 这时悬链线的方程变成

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right).$$

1.2 定 义

定义 1. 微分方程是联系独立变量 x , 未知函数 $y = f(x)$