高等学校试用教材

微分与积分学

下册

N·PISKUNOV 著

吉林人民出版社

高等学校试用教材

N. Piskunov著

微分与积分学

《下　册》

邓本让　陈俊文等译

景　毅　李沐苏　校

吉林人民出版社

高等学校试用教材

微 分 与 积 分 学

〈下 册〉

邓本让 陈俊文 等译

景 毅 李沐荪 校

吉林人民出版社出版 · 吉林省新华书店发行

长春市第二印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 24印张 4插页 531,000字

1983年7月第1版 1983年7月第1次印刷

印数：1—7,324册

统一书号：13091·146 定价：2.50元

内 容 提 要

原书分Ⅰ、Ⅱ两卷，共廿一章，中文译本分上、下两册出版．下册包括的内容有：微分方程、重积分、曲线积分与曲面积分、级数、付里叶级数、数学物理方程、运算微积及其某些应用、概率论与数理统计初步、矩阵等九章．

本书具有系统完整、内容广泛、论述清楚和简明易懂等特点．可作为高等工科院校电子、电信、电机、仪器、光学、机械和工程等专业的试用教材．也可作为在高等工科院校担任基础数学课的教师、研究生的教学参考书和工矿企业有关工程技术人员的自学参考书．

参加本册翻译工作的有：邓本让、陈俊文、胡锡全、周静娥．

目　　录

第一章　微分方程

1.1　问题的提出·介质阻力与运动速度成比例的运动方程·悬链线方程

设函数$y=f(x)$从数量方面反映了某种现象．常常是不能直接建立y对x的依赖关系，但是能够给出量x、y以及y对x的导数：y'，y''，…，$y^{(n)}$之间的关系，即可以写出一种微分方程．

从所建立的变量x、y和导数之间的关系，需要确定y对x的直接依赖关系，即要找出$y=f(x)$，或者，就是所谓要积分微分方程．

我们考虑两个实例．

例1．质量为m的物体从某一高度落下．如果除重力外，物体还受到与其速度成比例（比例常数k）的空气阻力的作用．要求确定这个物体下落速度的变化规律，换句话说，需要求出$v=f(t)$．

解．根据牛顿第二定律

$$m\frac{dv}{dt}=F,$$

其中$\frac{dv}{dt}$是运动物体的加速度（速度对时间的导数），而F是沿着运动方向作用于物体上的力．这个力是两个力的合力：重力mg和空气阻力$-kv$，它带负号是因为该力的方向与速

度方向相反。因此我们有

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv. \tag{1}$$

这个关系式联系着未知函数 v 和它的导数 $\frac{dv}{dt}$，它就是未知函数 v 的微分方程。这是某种类型的降落伞的运动方程。求解微分方程就是指要找出函数 $v=f(t)$，使其恒满足已给微分方程。读者很容易验证，这样的函数有无穷多个。任何形如

$$v=Ce^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k} \tag{2}$$

的函数都满足方程（1），而不管常数 C 取何值。这些函数中的哪一个函数满足所要求的 v 对 t 的依赖关系呢？为了求出这个函数，我们利用附加条件：当物体下落时给它的初始速度为 v_0（作为特殊情形它可以是零），我们假设这个初始速度是已知的，于是，未知函数必须是这样的函数：当 $t=0$ 时（当运动开始时），满足条件 $v=v_0$。把 $t=0$，$v=v_0$ 代入公式（2），我们求出

$$v_0=C+\frac{mg}{k},$$

由此

$$C=v_0-\frac{mg}{k}.$$

这样，常数 C 就被确定了，而所要求的 v 对 t 的依赖关系是

$$v=\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}. \tag{2'}$$

从这个公式得出，对充分大的 t，速度 v 几乎与 v_0 无关。

注意到如果 $k=0$（不存在空气阻力或者这个阻力很小，我们可以忽略它），则我们就得到物理学中熟知的结果*：

$$v=v_0+gt. \tag{2''}$$

这个函数满足微分方程(1)和初始条件：当 $t=0$ 时，$v=v_0$。

例 2．一条柔软均匀的绳索，两端被悬挂起来．求它在本身重力作用下形成的曲线的方程（对于任何悬挂的绳、导线、链条，方程是同样的）．

解．令 $M_0(0,b)$ 是绳的最低点，而 M 是绳上的任意一点（图 1）。我们考虑绳的一部分 M_0M。这部分在三个力的合力作用下是平衡的：

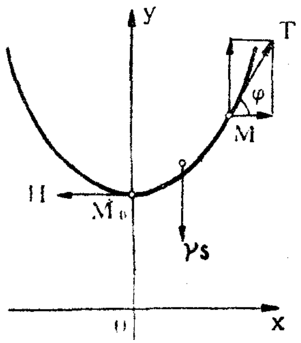

图 1

（1）张力 T，它沿着点 M 的切线方向作用并同 x 轴形成角 φ；

（2）点 M_0 处的张力 H，它沿着水平方向起作用；

（3）绳的重量 γs，垂直向下起作用，此处 s 是弧 M_0M 的长度，而 γ 是绳的线密度。

把张力 T 分解为水平和垂直的分力，我们得到平衡方程：

$$T\cos\varphi=H, \qquad T\sin\varphi=\gamma s.$$

第二个方程的各项除以第一个方程的对应项，我们得到

* 公式 (2″) 可以从 (2′) 取极限得到：

$$\lim_{k\to 0}\left[\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}\right]=v_0+gt.$$

$$\tan\varphi = \frac{\gamma}{H}s. \tag{3}$$

现在设所求的曲线方程可以写为$y = f(x)$，这里$f(x)$是要求的未知函数。注意到，

$$\tan\varphi = f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

因此

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a}s. \tag{4}$$

此处a表示比值$\frac{H}{\gamma}$.

把（4）式两端对x微分：

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\frac{ds}{dx}. \tag{5}$$

但我们知道（见上册6.1节），

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

把这个表达式代入方程（5），我们便得到所求曲线的微分方程：

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{6}$$

它表示未知函数y的一阶和二阶导数之间的关系。

在此不给出解这个方程的方法，仅指出任何形如

$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a} + C_1\right) + C_2 \tag{7}$$

的函数，对C_1和C_2的任何给定的值，都满足方程（6）.把

已给函数的一阶和二阶导数代入（6），就可以验证这一点。以后我们将指出而不证明（见1.18节），这些函数（对不同的C_1和C_2）取尽了方程（6）的所有可能的解。

这样得到的所有函数的图形，称为悬链线。

现在我们指出，应如何选择常数C_1和C_2，以便得到所求的特定悬链线，其最低点M的坐标为$(0,b)$。因为当$x=0$时，悬链线上的点的位置最低，所以该点的切线是水平的，即$\frac{dy}{dx}=0$，又知该点的纵坐标等于b，即$y=b$，于是，从（7）式我们求出

$$y'=\sinh\left(\frac{x}{a}+C_1\right),$$

在这里令$x=0$，得到$0=\sinh C_1$，因而$C_1=0$。如果点M_0的纵坐标是b，则当$x=0$时，$y=b$。

设$x=0$和$C_1=0$，从方程（7）我们得到$b=\frac{a}{2}(1+1)+C_2$，由此$C_2=b-a$。最后我们有

$$y=a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)+b-a.$$

如果我们取M_0的纵坐标等于a，则方程（7）的形式十分简单。这时悬链线的方程变成

$$y=a\cosh\left(\frac{x}{a}\right).$$

1.2 定　　义

定义1. 微分方程是联系独立变量x，未知函数$y=f(x)$